2
Fundamentação Teórica

Gráficos de Controle de Grupos

Os gráficos de controle foram projetados originalmente para serem utilizados em processos que produzem um único canal de saída. Cada tipo de gráfico de controle tradicional monitora um parâmetro de uma variável do processo; assim, por exemplo, gráficos de $\bar{X}$ monitoram a média de alguma variável, gráficos de R e de S monitoram sua variância (através da amplitude ou do desvio-padrão amostral). No entanto, são muitos comuns processos constituídos de vários canais, como por exemplo, uma máquina de envase com vários canais. Para este tipo de processo, pode-se aplicar um dos seguintes procedimentos:

1. **Utilizar um gráfico de controle individual para cada canal – Porém, se o número de fluxos for muito grande (por exemplo, no caso de uma enchedora com muitos bicos) haverá um número muito grande de gráficos de controle, dificultando o seu acompanhamento;**
2. **Utilizar algum esquema de controle que sintetize a informação dos diversos canais em apenas um ou alguns poucos gráficos.**

Idealmente a variável relevante deverá ter a mesma distribuição, com os mesmos parâmetros nos diversos canais. Se este for o caso, não existirão diferenças estatisticamente significativas entre as saídas dos canais. Entretanto, nem sempre os canais são identicamente distribuídos, e neste caso será necessário empregar esforços para a identificação das causas das diferenças e eliminá-las. Se as diferenças não puderem ser completamente eliminadas, elas devem ser minimizadas. As ações necessárias para eliminar ou reduzir as diferenças variam conforme cada processo e requerem conhecimento específico do processo.

O primeiro procedimento desenvolvido para o controle de processos multi-canal (ou multi-canal) foi o gráfico de controle de grupos (*group chart*) introduzido por Boyd (1950). Tal procedimento supõe a condição ideal de que as variáveis monitoradas nos diversos canais sejam identicamente distribuídas quando o processo está sob controle. Este modelo permite o controle de múltiplos canais através de um único gráfico. Os limites de controle são semelhantes aos dos gráficos $\bar{x}$ e *R*, mas os dados são agrupados de modo diferente ao que se adota convencionalmente. A cada instante de amostragem, é retirada uma amostra de tamanho n≥1 de cada canal, produzindo assim tantos valores de $\bar{x}$ e *R* (ou de $\bar{x}$ e *S*, ou de *x* e *MR*) quantos forem os canais. Nos gráficos são marcados para cada instante de amostragem, apenas o maior e o menor valores de $\bar{x}$ (ou de *x*) assim obtidos, e o maior valor de *R*, *S* ou *MR* (no caso de gráfico de *R*, ou *S*, se n for suficientemente grande, poderá haver um limite inferior de controle, caso em que também será marcado o menor valor de *R* ou *S*, mas, com vários canais, provavelmente n será pequeno, ou mesmo, unitário, e o gráfico de *R*, ou *MR*, ou *S* só terá limite superior). Os limites para os gráficos podem ser calculados pelas fórmulas usuais, apenas lembrando que existem estimativas de $\bar{\bar{x}}$, $\bar{R}$ ou $\bar{S}$, ou $\bar{x}$ e $\overline{MR}$, para cada canal, de modo que é necessário verificar se elas não diferem (por testes de hipóteses), e então elas podem ser combinadas (em $\bar{\bar{\bar{x}}}$, como a média dos $\bar{\bar{x}}$ dos diversos canais, $\bar{\bar{R}}$ como a média dos $\bar{R}$'s, e assim por diante). Além disso, com muitos canais a probabilidade de alarme falso aumenta, de modo que os limites devem ser alargados para neutralizar este efeito.

Nelson (1986) apresenta um critério suplementar para identificar quando um canal está sob efeito de uma causa especial: quando o número de vezes consecutivas que ele aparece numa *group chart* com o valor máximo (ou mínimo) for maior que um número *r* especificado. O comprimento médio da seqüência (*r*) sob controle unilateral para este evento é dado como:

$$CMS(1)_o = \frac{s^r - 1}{s - 1}$$

Através desta equação o referido autor gerou uma tabela com os CMS_0 para *r* assumindo valores de 3 a 6 e processos com 2 até 10 canais. Esta tabela está reproduzida a seguir:

Tabela 1 – CMS_0 para diversos valores de *r* e fluxos

No. de Fluxos	***Comprimento da Seqüência, r***			
	3	4	5	6
2	7	15	31	63
3	13	40	121	364
4	21	85	341	1365
5	31	156	781	3906
6	43	259	1555	
7	57	400	2801	
8	73	585	4681	
9	91	820		
10	111	1111		

Gráficos de Controle de Grupos para Fluxos com Médias Distintas

Segundo Pyzdek (1992) quando as médias dos canais diferem entre eles, o gráfico de controle de grupos descrito previamente não funcionará. O autor sugere uma simples modificação no mesmo, possibilitando o seu uso apesar dessas diferenças nas médias dos canais (desde que as variâncias dos canais sejam idênticas). O procedimento é:

1. **Calcula-se a média de cada canal.**
2. **Para cada canal, subtrai-se a média do canal das observações obtidas do mesmo.**
3. **Constrói-se o gráfico de controle de grupos utilizado a diferença obtida na etapa 2.**

Há casos em que tanto a média como as variâncias dos diversos canais são distintas. Uma alternativa nessas circunstâncias são as *group chart* padronizadas descritas na próxima seção.

Group Chart Padronizadas

Segundo WISE e FAIR (1998), as situações em que são recomendados os gráficos padronizados para monitoramento do processo são:

- **Para múltiplas características.**
- **Para características não similares e características com dispersões diferentes.**
- **Produção com seqüências curtas.**

A idéia é, para cada variável x_i com sua média μ_i e variância σ_i^2, trabalhar com a variável padronizada $y_i = \dfrac{x_i - \mu_i}{\sigma_i}$. Todas as variáveis terão assim a mesma média (=0) e variância (=1), podendo ser agrupadas numa mesma *group chart*. A rigor Wise e Fair (1998) não consideraram a situação de canais com diferentes parâmetros, e sim as situações de produtos com diferentes especificações, produzidos pelos mesmos equipamentos (i.e., o caso de "corridas curtas", com *setups* freqüentes), ou ainda o caso de diferentes características de qualidade. Porém a idéia pode ser estendida para o caso de uma mesma característica ou "variável" com as mesmas especificações, em múltiplos canais com diferentes parâmetros, mesmo com o processo em controle. Os autores citados preconizam, contudo, que as *group chart* (sejam de x e MR, de $\bar{x}$ e R ou de $\bar{x}$ e S) sejam constituídas sem limites de controle, usando apenas o critério de seqüências de Nelson (1986).

Gráficos de Controle para Processos com múltiplos canais

No controle de processos com múltiplos canais é importante que o gráfico de controle adotado seja capaz de tornar possível a distinção entre causas assinaláveis que afetam todos os canais, e causas que afetam somente um canal. Mortell e Runger (1995) propõem para este fim, um par de gráficos de controle: um para monitorar mudanças comuns a todos os canais e outro, para monitorar mudanças em um canal com relação aos outros. Espera-se que esses gráficos tenham desempenho superior ao dos gráficos tradicionais, graças à adoção de novas variáveis de controle, caracterizadas a seguir.

Denotando a média do subgrupo de cada canal j (j = 1, 2, ... s) no instante t (t = 1, 2, ...) por Y_{tj}, Considere o seguinte modelo para Y_{tj}:

$$Y_{tj} = \mu + A_t + e_{tj}$$

onde μ denota a média do processo, A_t denota uma variável aleatória normalmente distribuída com média 0 e variância σ_a^2, que representa a diferença da média do processo (valor esperado para todos os canais) no instante t da média μ; e e_{tj} denota uma variável aleatória distribuída normalmente, com média 0 e variância σ^2, que representa a diferença do canal j em relação à média do processo no instante t. Conseqüentemente, supondo independência entre A_t e e_{tj}, a variância da média de uma amostra (subgrupo) de tamanho n de um canal qualquer será igual a $\sigma_a^2 + \sigma^2/n$.

A quantidade A_t pode ser interpretada como a parcela variável sendo monitorada que é alterada por fatores ligados ao produto e ao equipamento no instante t e que afetam igualmente todos os canais, como a densidade do líquido, e e_{tj} pode ser interpretada como o desvio do j-ésimo canal em relação a essa parcela comum, devido a fatores de variação ligados exclusivamente ao canal j.

Se σ_a^2 é maior do que σ^2, os gráficos de controle de grupos com o critério de detecção de um ponto fora dos limites de controle são ineficientes em detectar mudanças individuais nos canais. Isso ocorre porque a variação dos pontos no gráfico é dominada pela variação de A_t (deve-se na maior parte a ela), de modo que os limites de controle são "largos" em relação a σ, e alterações em um canal podem não ser suficientemente grandes (em relação a $\sqrt{\sigma_a^2 + \frac{\sigma^2}{n}}$) para que a probabilidade de o ponto ultrapassar os limites seja alta. Para detectar tais alterações o critério de comprimento de seqüência proposto por Nelson (1986) é bastante útil, pois tal critério é construído para ser insensível, à variabilidade de A_t. No entanto, esse critério apresenta uma limitação, no caso de mais de dois canais saírem de controle ao mesmo tempo. Nestas circunstâncias, este critério pode não sinalizar essa condição de fora de controle, visto que o valor extremo (máximo ou mínimo) pode se alternar entre estes dois ou mais canais, e o método somente considera como sinal um valor extremo obtido consistentemente por um mesmo canal. Outra desvantagem é a natureza discreta do CMC_0 (ver tabela 1), que, para alguns números de canais do processo, só possui valores muito baixos (freqüência de alarmes falsos inaceitável) ou muito altos, que reduzem o poder de detectar alterações. Para solucionar esse problema, Mortell e Runger (op. Cit.) apresentam um modelo que contempla tal situação, descrito a seguir.

Como o gráfico de controle de grupos, o modelo proposto por Mortell e Runger (1995) tem duas características básicas: (1) um gráfico de controle que monitora mudança em todos os canais; e (2) um gráfico de controle que monitora a mudança em um canal relativa aos outros. Para monitorar mudanças que afetem a todos os canais, os autores propõem uma variação do gráfico de Shewhart. Ao invés de utilizar a média do subgrupo de um canal, o método por eles sugerido utiliza a média dos subgrupos entre todos os canais a cada instante t. Isto é, a estatística lançada no gráfico é $\overline{Y_t} = \sum_{j=1}^{S}\sum_{k=1}^{n}\frac{Y_{jk}}{ns}$. Desta forma o gráfico terá limites mais estreitos do que o tradicional gráfico de controle de grupos, para um mesmo ARL sob controle. Evidentemente, a média entre todos os canais possibilita ao gráfico a identificação de causas especiais que afetem simultaneamente a todos os canais. Assim como no gráfico de controle de grupos, o desempenho deste gráfico é sensível à autocorrelação em A_t (MORTELL e RUNGER, 1995), e ela deve ser levado em conta, quando existir, na escolha dos limites (é o mesmo do esquema) utilizados.

Para detectar mudanças em um canal individual, o modelo proposto por Mortell e Runger (1995) é particularmente interessante no caso em que σ_a^2 é grande em relação a σ^2, e não possui as desvantagens acima mencionadas do método do comprimento de seqüências proposto por Nelson (1986). Os autores citados sugerem como uma possibilidade, para isolar a componente de variação individual de cada canal, trabalhar com os resíduos, ou seja, as diferenças do valor individual (ou média do subgrupo, no caso de amostras com mais de uma observação por canal) de cada canal em relação a média $\hat{Y}_t$ em cada instante de amostragem. Usando o resíduo como uma variável de controle para cada canal, elimina-se a parcela de variabilidade comum a todos os canais. Conseqüentemente, os resíduos são insensíveis às variações em A_t, e também à eventual autocorrelação em A_t. De maneira análoga que para o gráfico da estatística $\overline{Y}_t$, o desvio-padrão dos resíduos é bem menor que o das observações individuais, o que permite limites mais estreitos e assim um gráfico mais poderoso.

O monitoramento dos resíduos requer um gráfico para cada canal (ou uma *group chart)* e não é tão simples quanto o procedimento de seqüência do tradicional gráfico de controle de grupos. Os autores mencionam essa possibilidade, mas propõem na verdade outra alternativa: utilizar como variável de controle a amplitude dos valores individuais (ou médias dos subgrupos, conforme o caso) dos canais em cada instante de tempo. Um único gráfico de controle, de R, pode ser utilizado para monitorar todos os canais. A estatística lançada é:

$$R_t = \max Y_{tj} - \min Y_{tj}$$

Assim como ocorre com os resíduos e com o comprimento da seqüência, o uso da estatística R_t também remove a variabilidade de A_t, o que aumenta a eficiência do esquema de CEP quando a variabilidade A_t é grande.

Mortell e Runger (1995) sintetizam seu modelo ressaltando as suas principais vantagens em relação ao critério de seqüências. O primeiro benefício é a superioridade de desempenho quando se monitora processos com um grande número de canais, e a mudança a ser detectada é de pequena magnitude, ou ainda, se mais de um canal mudar num dado instante. Outra importante característica que o diferencia do critério de seqüências é a não-necessidade de se coletar amostras de todos os canais em cada instante t. Os autores analisam o desempenho de seu esquema usando a estatística R_t com vários tipos de gráfico de controle: com um gráfico de Shewhart para R, com CUSUM e com um gráfico EWMA. O desempenho da *group chart* de resíduos é analisado por Barbosa (2008).

Gráficos de Controle para Múltiplos Fluxos com Correlação Cruzada e Autocorrelação

Passos (2005) estudou o caso real de um processo numa indústria em que os canais apresentavam correlação cruzada e autocorrelação. Através da decomposição das séries originais dos dados em duas parcelas, média dos canais no instante t, que denominou "nível-base" e a diferença individual de cada canal em relação a esse nível-base (resíduo), eliminou quase toda a correlação cruzada entre canais e transformou cada uma das parcelas consideradas em autocorrelacionadas somente. Portanto, o problema pode ser decomposto no monitoramento de duas parcelas independentes: o nível-base e diferenças para cada canal. Dois benefícios surgem desta forma de controle: o primeiro é a capacidade do modelo em detectar as causas assinaláveis que venham a afetar a todos os canais, bem como as que afetem a um canal individualmente. Para as séries de resíduos, Passos utilizou uma *group chart*. Porém, as *group charts,* como propostas por Boyd (1950) e descritas por Pyzdek (1992), ou Montgomery (2004) não consideram a correlação cruzada entre os canais, mas nem a situação em que há autocorrelação nos resíduos.

Uma das alternativas para o monitoramento de processos autocorrelacionados é a utilização desse tipo de gráfico com intervalo de tempo entre as amostras suficientemente grande para dissipar a autocorrelação (ver Costa *et al*., 2004, ou Pyzdek, 1992), o que, porém, dependendo da magnitude desse espaçamento, pode trazer o inconveniente de retardar a detecção de possíveis descontroles.

Assim, Passos (2005) solucionou o problema através de uma adaptação das *group charts* para os dados em questão considerando a autocorrelação existente. Visto que aumentar o intervalo de tempo entre as amostras como forma de se extrair o efeito da autocorrelação não era aceitável, foi feita uma adaptação no cálculo dos limites para o gráfico; a saber: não foi adotado o clássico estimador do desvio-padrão do processo baseado em MR $\left(\hat{\sigma}_0 = \overline{MR} / d_2\right)$, e sim o desvio-padrão do conjunto de dados históricos, evitando assim a subestimação da variabilidade total do processo. Com isso, os limites de controle ficam mais largos, diminuindo a probabilidade de ocorrência do erro do tipo I.

Foi assim adotado um par de gráficos de X e MR para a média das observações dos diversos canais num mesmo instante de tempo, com a finalidade de detectar variações no nível-base comum aos canais, para sinalizar possíveis problemas que viessem afetar todos os canais, e um par de *group charts* de X e MR para os resíduos de cada canal em relação ao nível-base, objetivando detectar variações em um único canal. Como são plotados somente os valores máximo e mínimo das diferenças encontradas (já que os valores intermediários se encontram entre eles), é possível visualizar se uma das diferenças sai dos limites ou se aparece várias vezes seguidas como a d_i máxima ou a d_i mínima. Na verdade, é como se existisse um gráfico para cada canal. Esta é a principal característica de uma *group chart*: sintetizar o controle de diversos canais em um único gráfico.

O processo em questão, porém, apresentava a peculiaridade de que as médias e as variâncias das diversas diferenças (de cada canal em relação ao nível-base) diferiam de canal para canal. Isso era inevitável no processo, pois os canais não admitiam ajustes individuais. Passo (2005) mencionou a possibilidade de trabalhar com dados padronizados, mas a empresa preferiu outra alternativa (alegando a grande capacidade do processo): para cada canal j, calcular os limites de controle para um gráfico de observações individuais das suas diferenças em relação ao nível-base (resíduos): LSC_j e LIC_j , bem como o limite superior de controle para um gráfico de MR (todos esses limites, lembrando, levando em conta a autocorrelação dos dados e não calculados pelas fórmulas usuais); isto feito, adotar como limites para o *group chart* de diferenças o maior dos LSC_j e o menor dos LIC_j; analogamente adotar como LSC para o *group chart* de MR, o maior dos LSCs calculados. Passos teve ainda dificuldades de validar os valores calculados, por interrupção do processo (a empresa tinha produzido e estocado grande quantidade do produto) mas verificou muitos alarmes e também que parâmetros do processo tinham mudado meses depois. Aliando-se a esses fatores, limitações de tempo impediram-na de ir mais longe na investigação, mas ela deixou como uma das sugestões para prosseguimento de pesquisa, a investigação de um esquema de controle que estabelecesse os limites em função da capacidade do processo, de forma análoga ao trabalho de Guimarães (2001), ou como uma versão multicanal do seu esquema de CEP para um processo autocorrelacionado com um único canal.