6 Revisão Bibliográfica

6.1 Métricas Espaciais

A definição da localização dos pontos que formam uma cadeia de suprimentos é um dos aspectos mais importantes no planejamento de um sistema logístico. Normalmente estes pontos representam fornecedores, produtores, armazéns de distribuição, consumidores, ou quaisquer outros elementos de uma rede logística para os quais se possa demarcar sua posição geográfica (BITTENCOURT, 2005).

A definição da localização dos pontos envolvidos numa rede logística é fundamental para a otimização de alguma medida de utilidade, como por exemplo: a redução dos custos de transporte, redução de tempo de transporte ou maximização da satisfação dos clientes.

De acordo com PIZZOLATO (2006), para a solução de problemas logísticos, são utilizados modelos por meio dos quais toda a rede logística pode ser representada. Para modelar problemas logísticos pode-se assumir dois tipos de abordagens: Análise de Redes ou Análise Agregada.

"Na análise de rede se trata de modelar o problema através de um grafo e tentar representar, da forma mais aproximada possível, a localização dos pontos de interesse: fábricas, depósitos, pontos de consumo e a rede de transporte da região." (LEAL, 2006 A).

"Na análise agregada trata-se de fazer uma aproximação agregada e freqüentemente contínua do problema e tentar encontrar soluções, as mais realistas possíveis, de alguns problemas de localização e de distribuição de produtos." (LEAL, 2006 A).

6.1.1 Análise de Rede

De acordo com LEAL (2006 B), diversos tipos de problemas podem ser atacados com a abordagem de redes. Dentre estes: problemas de sistemas elétricos, sistemas de comunicação e sistemas de transporte.

Para o entendimento e aplicabilidade da análise de redes é essencial a sedimentação do conceito de conectividade através dos chamados grafos. Um grafo é representado por um conjunto de círculos ou retângulos, denominados nós, e um conjunto de linhas, denominadas arcos, que são a ligação entre os nós. A figura a seguir ilustra um grafo com seus nós e arcos.

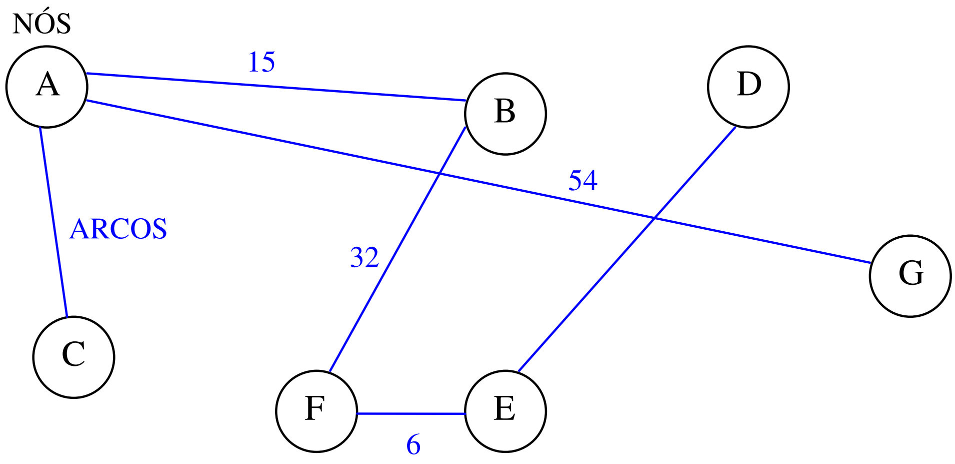

Figura 6.1: Representação de um Grafo.

Na análise de redes são atribuídos valores aos arcos e nós. A valoração dos arcos pode referir-se a comprimentos de estradas, tempos de viagens ou ainda custos. A valoração dos nós refere-se à indicação ou codificação dos mesmos como um determinado local. Na verdade a representação dos arcos está sempre associada a um par de nós ao qual o arco está conectando. Por exemplo, na figura 6.1 o arco AB com o valor 15 pode estar representando numa unidade de comprimento a distância entre as cidades representadas pelos nós A e B. A análise de rede é vastamente utilizada quando existem restrições de caminho, também chamadas de condicionantes de percurso, entre dois pontos de uma cadeia de suprimentos.

Segundo FRANCIS (1992), a análise de redes pode ser utilizada para solucionar duas categorias de problemas de localização: minimização dos custos (ou maximização dos lucros) e minimização dos custos dos serviços oferecidos a sociedade.

A primeira categoria trata de problemas típicos do setor privado, onde não existem exigências legais, como meio ambiente, ecologia, pessoas e etc. Neste caso, o interesse é puramente financeiro, sendo todos os cálculos realizados no intuito de minimizar as distâncias, ainda que para isso um ou mais pontos da rede sejam prejudicados em função do todo.

A segunda categoria trata de problemas típicos do setor público, onde existe uma preocupação em relação ao atendimento de todos os pontos da rede. Estes problemas são geralmente chamados de minimax, onde o objetivo é determinar a melhor localização de uma instalação de forma minimizar a distância entre o ponto mais longínquo e a própria instalação. Exemplos disso são os problemas de localização de hospitais, bombeiros, ambulâncias correios e etc. Desta forma todos assistidos têm a acesso à instalação, ainda que a soma das distâncias dos pontos de origem a instalação em questão não seja a menor possível. FRANCIS (1992), exemplifica esta categoria com a determinação de um posto dos bombeiros. Neste caso, o cálculo é realizado de forma a minimizar o tempo máximo de resposta a um chamado, ou seja, minimizar a maior distância entre o posto dos bombeiros e os locais de abrangência analisados.

Neste trabalho, como o interesse é determinar a melhor localização de um sistema de mistura em linha de forma minimizar os custos de tubulação, o problema é típico do setor privado, inserido na primeira categoria. Segundo BARCELOS (2002) e BASSIL (2000), para problemas de minimização dos custos (setor privado) o modelo de solução mais utilizado pela análise de redes é o das P-Medianas.

6.1.2 Análise Agregada

A análise agregada não utiliza a estrutura em grafo, adotada pela análise em rede. Neste caso, é realizada uma aproximação contínua do problema onde para o sucesso do método é fundamental a inexistência de restrições de percurso. De acordo com LEAL (2006 A), exemplos típicos destas aplicações são casos onde desejamos localizar instalações que, ao contrário da análise de redes, não oferecem barreiras, como determinar a melhor localização de plataformas de petróleo em alto mar ou a melhor localização de sistemas de irrigação em áreas planas de plantio. A análise agregada é largamente utilizada para localizar instalações num plano, por isso também é chamada de análise de localização em um plano.

SACRAS (2004) afirma que a análise agregada é muito utilizada para a solução de problemas logísticos que necessitam de uma estimativa da distância de um ponto a outro num plano. A determinação da melhor localização de um sistema de mistura em linha pode ser inserida nesta análise.

Para resolver um problema de localização, de acordo com LEAL (2006 A), a análise agregada é necessário estimar a distância entre os vários pontos do sistema. Para isso são conhecidas duas métricas: a Métrica Euclidiana e a Métrica Retangular.

6.1.3 Análise Agregada - Métrica Retangular

De acordo com LEAL (2006 A), a métrica retangular é largamente utilizada nos problemas logísticos tratados sob sistemas de transporte reticuladas, ou seja, em redes de transporte onde as ruas se cruzam perpendicularmente. Esta métrica é referenciada, por alguns autores norte-americanos, como Métrica de Manhattan ou Métrica Metropolitana, uma vez que a rede urbana de transportes da Ilha de Manhattan, na cidade de New York, segue uma estrutura de cruzamentos perpendiculares entre ruas e avenidas.

A formalização matemática consiste em, através de duas coordenadas associadas aos eixos tradicionalmente chamados x e y, determinar as respectivas distâncias entre os pontos, tanto no eixo x quanto no eixo y. Na figura 6.2 a distância entre os pontos A e B, denominada DR_{AB}, é determinada segundo a equação abaixo.

$$DR_{AB} = |x_B - x_A| + |y_B - y_A| \qquad \text{Equação 1}$$

Onde: DR_{AB} é a distância retangular entre os pontos A e B

x_A e x_B são respectivamente as coordenadas dos pontos A e B no eixo x

y_A e y_B são respectivamente as coordenadas dos pontos A e B no eixo y

Na métrica retangular, a distância entre os pontos é a mesma para qualquer caminho, ou seja, independe do caminho percorrido entre a origem e o destino. Por exemplo, na figura 6.2, a distância entre os pontos A e B é a mesma ainda que utilizemos o caminho ACB ou ADEFB.

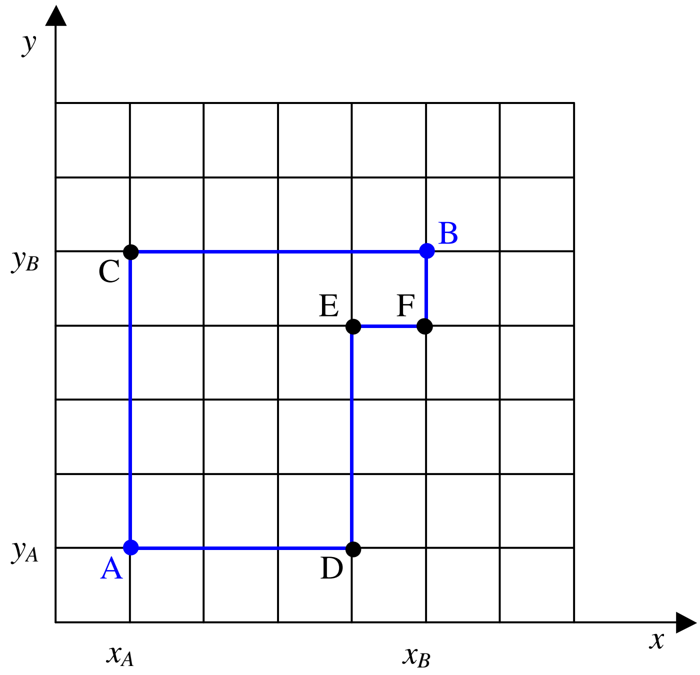

Figura 6.2: Métrica Retangular – Distância entre os Pontos A e B.

6.1.4 Análise Agregada - Métrica Euclidiana

De modo análogo à Métrica Retangular, a Métrica Euclidiana utiliza os eixos x e y formando um plano cartesiano. No entanto, a distância entre dois pontos quaisquer é calculada pela linha reta que une os respectivos pontos. Neste caso trata-se da menor distância possível entre dois pontos, portanto esta distância é sempre menor ou igual à distância real.

Segundo LEAL (2006 A), esta métrica é utilizada como uma aproximação quando a Métrica Retangular não pode ser aplicada, ou seja, quando a rede logística de transporte não é reticulada.

A figura abaixo apresenta a distância entre os pontos A e B segundo a Métrica Euclidiana.

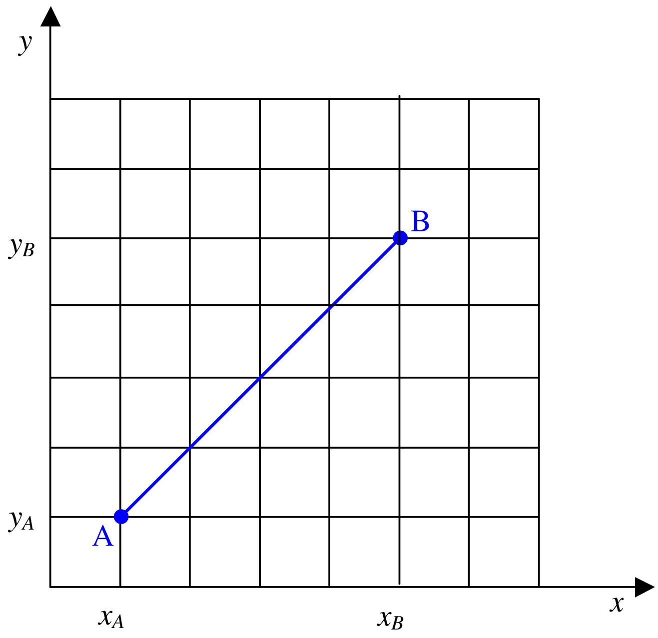

Figura 6.3: Métrica Euclidiana – Distância entre os Pontos A e B.

A determinação matemática da distância entre dois pontos segundo a Métrica Euclidiana é bastante simples. Tendo em mão as coordenadas (x_A, y_A) e (x_B, y_B), pode-se calcular a distância Euclidiana, denominada DE, segundo o conhecido Teorema de Pitágoras, de acordo com a equação abaixo.

$$DE_{AB} = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} \qquad \text{Equação 2}$$

Onde: DE_{AB} é a distância euclidiana entre os pontos A e B

x_A e x_B são respectivamente as coordenadas dos pontos A e B no eixo x

y_A e y_B são respectivamente as coordenadas dos pontos A e B no eixo y

6.1.5 Análise Agregada – Outras Métricas e Aproximações

Na prática, numa rede logística de suprimento, são raros os casos onde o trajeto entre dois pontos é representado por uma linha reta (métrica euclidiana) ou de forma retangular tão clássica quanto da Ilha de Manhattan (métrica retangular). Desta forma, de um modo geral, a distância real entre dois pontos quaisquer da cadeia fica situada entre a distância determinada pela métrica euclidiana (menor possível) e pela métrica retangular.

LEAL (2006 A) apresenta uma relação da distância real entre dois pontos e a distância euclidiana entre os mesmos pontos. Esta relação é obtida através de fatores de correção determinados por regressão linear simples. Conforme a equação abaixo, os fatores de correção estão representados pelos coeficientes "a" e "b". O coeficiente "b" também é conhecido como coeficiente angular ou fator de ajuste. O coeficiente "a", que também é conhecido como coeficiente linear, é uma constante aditiva ou subtrativa que tem o intuito de minimizar ainda mais o erro obtido nesta aproximação.

$$DR_{AB} = a + b \times DE_{AB} \qquad \text{Equação 3}$$

Onde: DR_{AB} é a distância real entre os pontos A e B

DE_{AB} é a distância euclidiana entre os pontos A e B

b é o coeficiente angular da reta

a é o coeficiente linear da reta

Conforme mencionado anteriormente, os fatores "a" e "b" são determinados através de uma regressão linear simples, buscando uma relação entre as distâncias reais e Euclidianas. Na prática são levantadas algumas distâncias reais e determinadas as respectivas distâncias Euclidianas. Após um número razoável de pares (distância real e Euclidiana) levantados é realizada a regressão linear e obtidos os valores dos coeficientes "a" e "b". Para este tipo de análise é válido lembrar que apenas dois pares de pontos são suficientes, porém quanto mais pares de pontos forem levantados melhor será a equação obtida. Definidos os coeficientes é possível calcular a distância real entre quaisquer pontos do sistema logístico fornecendo a distância Euclidiana entre estes mesmos pontos.

Em seu trabalho, LOVE (1988) propõe outra abordagem para determinar a distância real entre dois pontos. O autor cita que não é apropriado assumir somente as métricas Euclidiana e retangular como soluções de ajustes das distâncias entre pontos. De acordo com a sua teoria, as métricas Euclidiana e retangular são apenas dois casos especiais, onde ρ é igual a 1 ou 2 na equação abaixo:

$$D_{AB} = \left[|x_A - x_B|^{\rho} + |y_A - y_B|^{\rho} \right]^{1/\rho} \qquad \text{Equação 4}$$

Onde: D_{AB} é a distância entre os pontos A e B

x_A e x_B são respectivamente as coordenadas dos pontos A e B no eixo x

y_A e y_B são respectivamente as coordenadas dos pontos A e B no eixo y

ρ é a constante que ajusta a equação ao tipo de geografia do sistema.

Para LOVE (1988), determinar as distâncias reais usando a equação acima resulta em resultados mais acurados uma vez que ρ é a constante que ajusta a equação ao tipo de geografia ao qual o sistema logístico em estudo está inserido. Vale ainda mencionar que a equação acima nada mais é que a equação da métrica retangular quando ρ =1 e, de modo análogo, quando ρ =2 se transforma na equação da métrica Euclidiana.

Em seu trabalho, LOVE (1988) apresenta ainda outras cinco fórmulas que foram utilizadas para mensuração de distâncias em áreas urbanas e rurais nos Estados Unidos durante a década de 1970. No intuito de limitar o escopo deste trabalho, a apresentação das cinco fórmulas propostas por LOVE em 1988 não será realizada.

6.2 Sistemas de Informações Geográficas (SIG)

Desde as mais remotas civilizações os mapas têm sido utilizados como instrumentos para apresentar informações territoriais. Com o passar do tempo, a aplicabilidade dos mapas aumentou consideravelmente, passando os mesmos a apresentar diversos outros tipos de dados como geológicos, climáticos, populacionais e outros.

BASSIL (2000) afirma que a crescente necessidade por informações associada ao surgimento de novas tecnologias fez com que os antigos mapas fossem transformados em verdadeiros sistemas de informações geográficas.

Atualmente, os Sistemas de Informações Geográficas (SIG), ou GIS, do inglês, *Geographic Information Systems*, por serem mais acessíveis, devido ao advento da *internet*, são largamente utilizados em diversos estudos e aplicações.

Com o advento dos Sistemas de Informações Geográficas, praticamente todo o acesso aos dados deixou de ser realizado através de mapas de papel, passando a ser feito via computadores. A busca por dados específicos e, sobretudo a atualização dos mesmos, tornou-se uma tarefa muito mais simples e rápida.

Na literatura existem diversas definições para os Sistemas de Informações Geográficas. De acordo com BASSIL (2000), GIS é uma técnica de processamento baseado em sistemas computacionais que são usados para armazenar, analisar, manipular e visualizar informações geográficas que representam objetos e fenômenos em que a localização física é uma característica inerente à informação e indispensável para a análise.

Segundo BARCELOS (2002), a idéia inicial do GIS nasceu na Suécia, mas foi no Canadá, em 1962, que foi elaborado o primeiro sistema de informações geográficas. Este sistema foi denominado *Canada Geographic Infomation Syste*ms (CGIS). Na década de 1970 os Estados Unidos começaram a desenvolver pacotes de GIS, sobretudo para fins militares. Na década de 1990, com o advento da internet os Sistemas de Informações Geográficas se difundiram mundialmente para o público em geral.

“A utilização do GIS possui as vantagens de simplificar tarefas e de facilitar a apresentação dos resultados, além de poder reunir uma ampla quantidade de dados espaciais ou não, na execução de análises e aplicações gráficas. Permite também que alterações de cenários sejam feitas auxiliando a tomada de decisões, uma vez que é possível fazer várias simulações, analisá-las separadamente e checar a conclusões decisivas. Outra vantagem é a possibilidade de atualizar constantemente os dados sem a necessidade de grandes esforços.” (BARCELOS, 2002).

6.2.1 Google Earth

O *Google Earth*, inicialmente conhecido como *Earth Viewer* e desenvolvido pela empresa *Keyhole*, é um moderno Sistema de Informações Geográficas, cuja função é apresentar um modelo que simule tridimensionalmente o globo terrestre, construído a partir de fotografias de satélite.

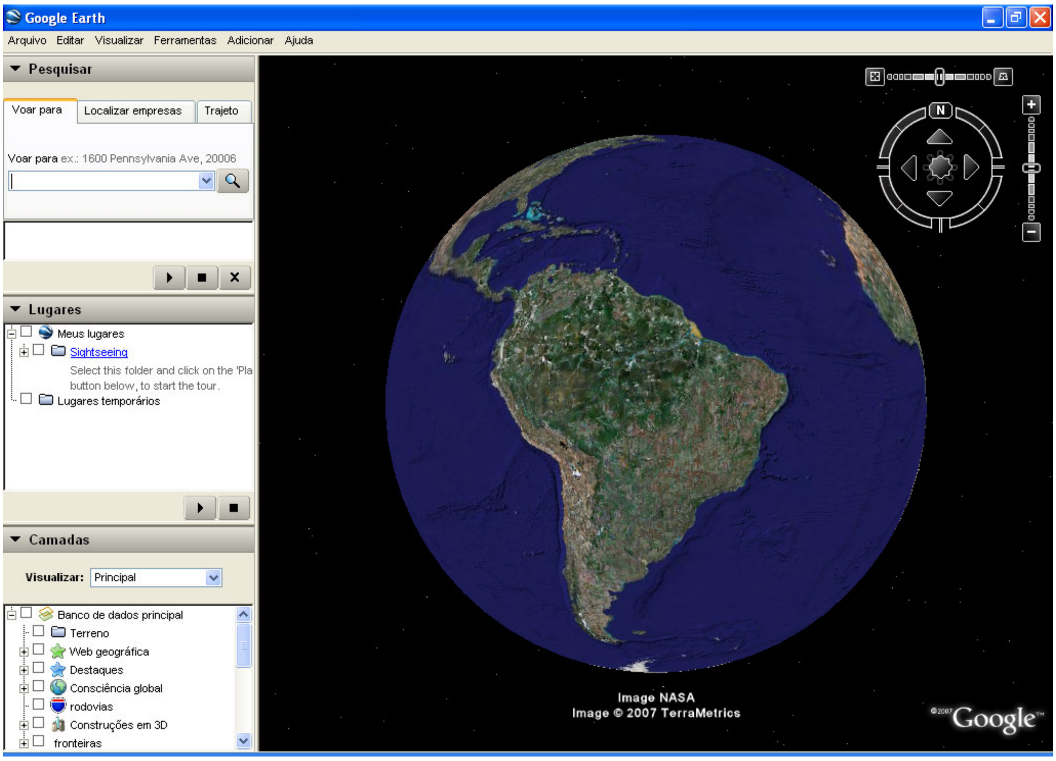

Figura 6.4: *Google Earth* – Visão Geral.

O *Google Earth* está, atualmente, disponível para uso em computadores pessoais com os sistemas operacionais: *Microsoft Windows* 2000, XP ou Vista e Mac OS X 10.3.9 ou superior. Recentemente foi disponibilizada para teste uma versão para a plataforma *Linux*.

O programa pode ser usado meramente como um gerador de mapas bidimensionais e de fotos de satélite ou como um simulador das diversas paisagens presentes no nosso planeta. Através dele, também é possível identificar lugares, construções, cidades, paisagens, rodovias, restaurantes, hotéis, entre outros elementos. A figura 6.4 ilustra algumas funcionalidades do *Google Earth*.

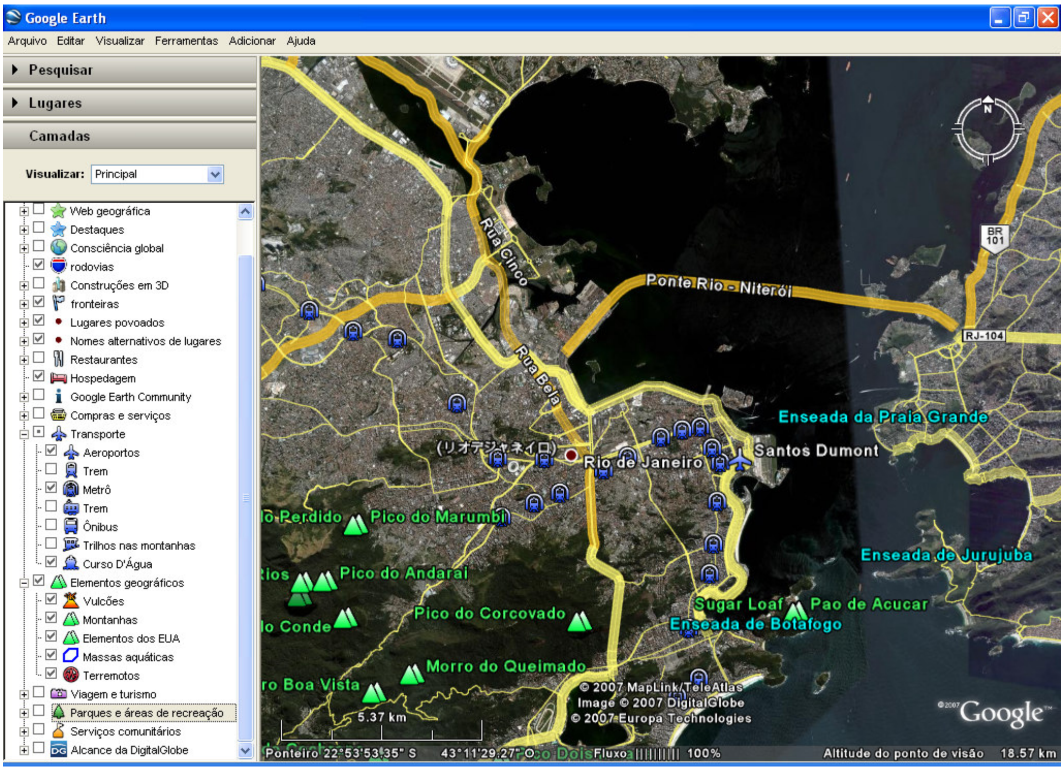

Figura 6.5: Funcionalidades do *Google Earth*.

Com a crescente demanda pelo uso deste *software*, recentemente a *Google* lançou uma nova versão do *Google Earth* onde a maioria das grandes cidades do planeta está disponível em imagens com resolução suficiente para visualizar edifícios, casas ou mesmo detalhes mais próximos como pessoas. Atualmente todo o globo terrestre já está coberto com aproximação de pelo menos 15 metros de altura.

6.3 Determinação do Ponto Central

Segundo LEAL (2006 A), a determinação do ponto central ocorre quando se deseja determinar a melhor localização para uma facilidade visando atender a um conjunto de pontos. Esta facilidade em questão pode ser uma fábrica, escola, loja, depósito, centro de distribuição ou até um sistema de mistura em linha, motivo deste trabalho.

Em função da facilidade, a qual se deseja determinar o ponto central podem ser utilizados diferentes critérios de seleção dominantes. Por exemplo, para fábricas, depósitos e centros de distribuição o critério dominante pode ser o custo de transporte, enquanto que para uma loja o critério dominante pode ser a acessibilidade dos clientes à mesma.

6.3.1 Determinação do Ponto Central pela Análise em Redes – Modelo das P-Medianas

Conforme mencionado anteriormente, o modelo das P-Medianas é o mais popular para a determinação do ponto central pela análise de redes.

Conforme PIZZOLATO (1994), o modelo das P-Medianas pode ser largamente utilizado para solucionar problemas de localização em redes. Um exemplo disso são os trabalhos desenvolvidos ou orientados por Pizzolato para determinar a melhor localização de escolas públicas em diversos bairros e até cidades do estado do Rio de Janeiro.

Segundo FRANCIS (1992), o modelo das P-Medianas consiste em localizar uma ou mais instalações numa rede de forma a minimizar a soma das distâncias entre as instalações e os pontos associados a elas. Para a solução de problemas pelo modelo das P-Medianas existem métodos exatos, que encontram a solução ótima, e métodos heurísticos, que são de natureza mais simples, porém não encontram a solução ótima.

Segundo BARCELOS (2002), e PIZZOLATO (2006), dentre os métodos heurísticos podemos citar: o método *Hakimi*, o método Pizzolato, o método de *Maranzana* e o método de *Teitz* e *Bart*. Dentre os métodos exatos pode-se citar métodos tipicamente *Branch and Bound* e métodos de Relaxação com base no Primal ou com base no Dual. FRANCIS (1992) apresenta um algoritmo para a solução de problemas de localização quando se necessita determinar apenas um único ponto central numa rede logística. O algoritmo segue o modelo 1-mediana, que nada mais é do que o modelo das P-medianas quando P é igual a 1.

Segundo BASSIL (2000), os problemas nos quais se utiliza o modelo das P-Medianas como mecanismo de solução geralmente envolvem a localização de mais de uma instalação (P maior que 1). A localização do um sistema de mistura em linha, motivo deste trabalho, representa um problema de maior simplicidade, quando comparado aos problemas abordados por BARCELOS (2002) e BASSIL (2000). Desta forma, a determinação da melhor localização do sistema de mistura em linha pelo modelo da P-Mediana não foi realizada neste trabalho.

6.3.2 Determinação do Ponto Central pela Análise Agregada – Métrica Retangular

De acordo com o item 6.1.2, devido às características físicas (universo plano e sem restrições de caminho) e lógicas do problema, a análise agregada é a metodologia mais indicada para a solução do mesmo.

SACRAS (2004) afirma que para a determinação do Ponto Central segundo análise agregada é necessário determinar as distâncias entre os pontos envolvidos. Conforme descrito no item 6.1.3, em função das ruas e avenidas da REDUC estarem distribuídas de forma cartesiana, a Métrica Retangular é a mais indicada neste caso.

A determinação do Ponto Central pela Métrica Retangular nada mais é que minimizar a função f(x,y) apresentada a seguir. Para minimizar esta função podem ser utilizados dois métodos: Método Fibonaci e método da Derivada.

$$f(x,y) = \sum_{i=1}^{n} Pi \times \left(|x - xi| + |y - yi|\right) \qquad \text{Equação 5}$$

Onde: *f(x,y)* é a função que deve ser minimizada para o cálculo do Ponto Central Retangular

n é o número de pontos de origem e/ou destino que a facilidade deve atender

xi e *yi* são respectivamente as coordenadas dos pontos de origem e/ou destino que a facilidade deve atender nos eixos x e y

x e *y* são as coordenadas do ponto central

Pi é o peso ou importância de cada ponto de origem ou destino.

Como minimizar uma função f(x,y) é igual a minimizar separadamente f(x) + f(y), podemos encontrar a solução representando a equação 5 como duas equações f(x) e f(y):

$$f(x)=\sum_{i=1}^{n} Pi \times |x-xi|$$ Equação 6

$$f(y)=\sum_{i=1}^{n} Pi \times |y-yi|$$ Equação 7

I. Método da Derivada:

Segundo LEAL (2006 A), o método da derivada é largamente utilizado em projetos de *lay-out* de instalações. Neste método o objetivo é determinar o ponto no qual a derivada da função dada inicialmente por DIF (equação 8) muda de sinal, por este motivo é denominado método da derivada. Trata-se de um método de fácil aplicação e exato. O Anexo IV descreve os conceitos matemáticos sob os quais o método da derivada está pautado.

O procedimento para solução do método é aplicado separadamente, porém de modo análogo, para as coordenadas X e Y.

As etapas de solução para a coordenada X, são as seguintes:

1. Os pontos e os pesos são ordenados por ordem crescente de valor da coordenada, neste caso X.

2. Calcula-se DIF através da equação:

$$DIF=-\sum_{i=1}^{n} Pi$$ Equação 8

Onde: *n* é o número de pontos de origem e/ou destino que a facilidade deve atender

Pi é o peso ou importância de cada ponto de origem ou destino.

3. Segue o seguinte algoritmo:

a. i=0

b. Enquanto DIF < 0 faça

c. Início

d. i = i +1

e. DIF = DIF + 2 * Pi

f. Fim

g. Xmin = Xi

Para a coordenada Y deve ser aplicado procedimento análogo.

II. Método Fibonaci:

O método Fibonaci é uma aproximação do método da Derivada. De modo similar ao método da Derivada, o procedimento de solução é aplicado separadamente para as coordenadas X e Y.

O processo de solução também é iterativo no qual é definido o número máximo de iterações (NIT). Quando maior o número de iterações maior a precisão do método em relação à resposta exata.

As etapas de solução para a coordenada X, são as seguintes:

1. Determina-se: Xinf = min Xi, Xsup = max Xi e k = 0.

2. k = k + 1, se k > NIT ➔ pare.

3. S1 = Xinf e S2 = Xsup.

4. O segmento S1 – S2 é dividido em 3 partes pelo pontos R1 e R2, onde:

$R_1 = (1 - F) * (S_2 - S_1) + S_1$ e $R_2 = F * (S_2 - S_1) + S_1$, sendo: F = 0,618 (inverso da seção Áurea).

5. Calcula-se a função f(R1) e f(R2) (equação 6): G1 = f(R1) e G2 = f(R2)

6. Descarta-se parte da função, ou a direita de G2 ou a esquerda de G1:

Se $G_1 <= G_2 \Rightarrow S_1 <= Xmin <= R_2$

Então (abandona-se o segmento $R_2 – S_2$)

Faz-se: $S_2 = R_2$ e retorna-se ao passo 2

Se $G_1 > G_2 \Rightarrow R_1 <= Xmin <= S_2$

Então (abandona-se o segmento $S_1 – R_1$)

Faz-se: $S_1 = R_1$ e retorna-se ao passo 2

7. Após NIT iterações: Xmin = (S1 + S2)/2

Para a coordenada Y deve ser aplicado procedimento análogo.

6.3.3 Determinação do Ponto Central pela Análise Agregada – Métrica Euclidiana

A determinação do ponto central pela métrica Euclidiana será apresentada a título de ilustração, uma vez que, para atender as necessidades deste trabalho, todos os cálculos serão realizados utilizando-se a métrica retangular.

A determinação do Ponto Central pela Métrica Euclidiana nada mais é que minimizar a função f(x,y) apresentada a seguir.

$$f(x,y) = \sum_{i=1}^{n} Pi \times \left[(x - xi)^2 + (y - yi)^2 \right]^{1/2} \qquad \text{Equação 9}$$

Onde: *f(x,y)* é a função que deve ser minimizada para o cálculo do Ponto Central Euclidiano *n* é o número de pontos de origem e/ou destino que a facilidade deve atender

xi e *yi* são respectivamente as coordenadas dos pontos de origem e/ou destino que a facilidade deve atender nos eixos x e y

x e *y* são as coordenadas do ponto central

Pi é o peso ou importância de cada ponto de origem ou destino.

O ponto de mínimo da equação 9 é obtido igualando a zero as derivadas de f(x,y) em relação à x e y.

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \sum_{i=1}^{N} P_i \times (x - x_i) \times \left[(x-x_i)^2 + (y-y_i)^2\right]^{-1/2} = 0$$ Equação 10

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \sum_{i=1}^{N} P_i \times (y - y_i) \times \left[(x-x_i)^2 + (y-y_i)^2\right]^{-1/2} = 0$$ Equação 11

Das equações acima se chega às soluções para x e y:

$$x = \frac{\sum_{i=1}^{N} Pi \times xi \Big/ \left[(x-xi)^2 + (y-yi)^2\right]^{1/2}}{\sum_{i=1}^{N} Pi \Big/ \left[(x-xi)^2 + (y-yi)^2\right]^{1/2}}$$ Equação 12

$$y = \frac{\sum_{i=1}^{N} Pi \times yi \Big/ \left[(x-xi)^2 + (y-yi)^2\right]^{1/2}}{\sum_{i=1}^{N} Pi \Big/ \left[(x-xi)^2 + (y-yi)^2\right]^{1/2}}$$ Equação 13

Como pode ser observado, para a solução das equações 12 e 13 é necessário a aplicação de método iterativo uma vez que para a determinação de x e de y é necessário saber a distâncias dos outros pontos da rede em relação a x e y, que não são conhecidos.

Segundo LEAL (2006 A), o método iterativo mais utilizado para a solução desta equação é o de *Weisfeld*, que consiste nas seguintes etapas:

1. Considerar inicialmente $\left[(x-xi)^2+(y-yi)^2\right]^{1/2}$ igual para qualquer valor de i, ou seja, a distância de qualquer ponto dado ao ponto central é a mesma.

2. Calcular x^0 e y^0, com as seguintes fórmulas:

$$x^0 = \frac{\sum_{i=1}^{N} P_i \times x_i}{\sum_{i=1}^{N} P_i} \qquad \text{Equação 14}$$

$$y^0 = \frac{\sum_{i=1}^{N} P_i \times y_i}{\sum_{i=1}^{N} P_i} \qquad \text{Equação 15}$$

3. Calcular os valores de $\left[(x-x_i)^2+(y-y_i)^2\right]^{1/2}$, usando os valores determinados anteriormente para x e y (x^0 e y^0).

4. Calcular x^1 e y^1 através das fórmulas:

$$x = \frac{\sum_{i=1}^{N} P_i \times x_i \Big/ \left[(x-x_i)^2 + (y-y_i)^2\right]^{1/2}}{\sum_{i=1}^{N} Pi \Big/ \left[(x-x_i)^2 + (y-y_i)^2\right]^{1/2}}$$ Equação 16

$$y = \frac{\sum_{i=1}^{N} P_i \times y_i \Big/ \left[(x-x_i)^2 + (y-y_i)^2\right]^{1/2}}{\sum_{i=1}^{N} P_i \Big/ \left[(x-x_i)^2 + (y-y_i)^2\right]^{1/2}}$$ Equação 17

5. Repetir os itens 3 e 4 até que a diferença relativa entre os dois pontos centrais calculados sequencialmente seja menor ou igual à precisão desejada. Este critério está representado a seguir:

$$\left|x^{(k+1)} - x^{(k)}\right| / x^{(k)} \leq \varepsilon$$ Equação 18

$$\left|y^{(k+1)} - y^{(k)}\right| / y^{(k)} \leq \varepsilon$$ Equação 19

Onde: ε é a precisão desejada para o cálculo.

Segundo NOVAES (1989), durante a execução deste método, existe a possibilidade do ponto central calculado coincidir com um dos pontos dados, neste caso, o resultado de $\left[(x-x_i)^2 + (y-y_i)^2\right]^{1/2}$ será zero, desta forma a solução torna-se instável, uma vez que este termo é o denominador das equações 15 e 16. Para evitar este problema é proposto um artifício na solução que, na verdade, é o acréscimo de uma constante positiva e desprezível, denominada ΔD, que tem normalmente o valor de 5 centésimos da unidade medida da distância.

Desta forma para a solução do problema, o termo $\left[(x-xi)^2+(y-yi)^2\right]^{1/2}$ fica da seguinte forma: $\left[(x-xi)^2+(y-yi)^2\right]^{1/2}+\Delta D$. Onde $\Delta D = 0{,}05 \times unidade$.