3
Esquema Proposto

Com base no modelo subjacente de processo e hipóteses admitidas, que apresenta inicialmente, este capítulo desenvolve o esquema de controle proposto e as expressões para cálculo dos seus limites de controle. Ele finaliza pelo modelo matemático de medidas de desempenho para o caso de alteração em apenas um dos canais, que é o foco deste trabalho e cuja detecção é o objetivo primordial do esquema de controle proposto.

3.1.
Modelo do Processo

Seja um processo com s canais do qual, periodicamente, são tomadas n observações (medidas) da característica de qualidade, x, em cada canal. Tanto o esquema de CEP aqui proposto, como tal análise de desempenho, pressupõe que a j-ésima medida da característica de qualidade efetuada no canal i no instante t, x_{tij}, seja representada pelo seguinte modelo:

$$x_{tij} = b_t + e_{tij}, \qquad t = 0,1,2....;\ i = 1,2,...s;\ j = 1,2...n \tag{3.1}$$

onde b_t representa o valor do nível-base real (componente comum a todos os canais) no instante t, e e_{tij} representa a diferença de cada canal em relação ao nível-base real (j-ésimo valor da componente individual do canal i no instante t).

O nível-base pode ser constante (no caso de perfeita independência entre os canais, não havendo componente comum de variação), ou variável. Neste último caso, seus valores ao longo do tempo podem ser i.i.d. ou apresentar autocorrelação.. Aqui, supõe-se que para processos em controle, as diferenças dos canais em relação ao nível-base são aleatórias e normalmente distribuídas com média nula, o que significa que todos os canais apresentam o mesmo ajuste e mesma dispersão, isto é:

$$e_{tij} \sim N(0,\sigma^2), \quad \forall \text{ j} \tag{3.2}$$

Além disso, supõe-se que os valores de e_{tij} dos diversos canais num mesmo instante de tempo sejam independentes (nenhuma correlação cruzada entre os $e_{ti}'s$, sendo toda a parcela de variação comum aos canais representada pelo nível-base e sendo as diferenças, portanto, ruídos aleatórios). Assim, toda eventual autocorrelação presente numa série de valores sucessivos da característica de qualidade x em um mesmo canal será devida a autocorrelação do nível-base, dado que os $e_{ti}'s$ não exibem autocorrelação. Formalmente, tem-se que: Cov(e_{tij}, e_{tkl}) = 0, $\forall$ t, i, j, k, l, desde que $(i, j) \neq (k, l)$, valendo inclusive para $j=l$ desde que $i\neq k$, e para $i=k$ desde que $j\neq l$).

Este é o modelo considerado por M&R, e que parece representar bem um grande número de processos multicanal reais. Correlação cruzada e autocorrelação dos $e_i's$ podem surgir devido à presença de causas especiais, mas quando em controle, grande número dos PMC reais pode ser bem representados pelo modelo apresentado. Dos seus pressupostos, talvez o mais freqüentemente violado seja o de que os $e_i's$ possuem média nula, ou seja, de que todos os canais possuem o mesmo ajuste. Passos (2005) e Barros (2008) mostram processos reais em que isso não ocorre.

3.2. Decomposição das Observações

A idéia aqui proposta para o CEP consiste em controlar separadamente o nível-base b_t e as flutuações individuais dos canais, e_{tij}. Como, porém, não é possível medir diretamente b_t nem e_i, mas apenas x_{tij}, torna-se necessário então, que x_{tij} seja decomposto.

Cada valor medido da variável de interesse (x_{tij}) em cada canal no instante t, é, portanto, decomposto em uma "estimativa" ou "medida" de b_t e em uma "estimativa" ou "medida" de e_{tij}, como será visto a seguir.

As palavras “estimativa” e “medida” foram postas entre aspas, pois, a rigor, não representam uma coisa nem outra. De fato, não se trata de estimativas de parâmetros, pois aplicam-se a valores particulares, individuais, das variáveis aleatórias b e e; porém tampouco se trata de medidas individuais, já que tais valores não podem ser medidos diretamente, apenas “estimados”. Feita essa ressalva, daqui em diante será usado o termo “estimativa”, por simplicidade.

É importante definir a notação não usual que será empregada no restante deste trabalho. Utilizar-se-á um ponto (“.”) na posição de um índice de uma variável para indicar a média aritmética dos valores de uma variável quando varia-se o índice em questão. Por exemplo, dada a variável x_{tij}, t = 1, 2, ...; i = 1, 2, ..., s; j =1, 2, ..., n; então $x_{ti\cdot}$ representa $\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} x_{tij}$ e $x_{t\cdot\cdot}$ representa $\frac{1}{sn}\sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{n} x_{tij}$. Tal notação difere da usual, em que o ponto indica, não a média, mas sim o somatório dos valores da variável, e na qual, para se indicar a média, é necessário, além do ponto no lugar do(s) índice(s) que varia(m), uma barra horizontal sobre a variável (na notação usual, as médias do exemplo seriam denotadas por $\bar{x}_{ti\cdot}$ e por $\bar{x}_{t\cdot\cdot}$). Tal barra não será empregada aqui, pois freqüentemente será usado o “chapéu” (“^”) para representar estimadores, e o uso simultâneo do chapéu e da barra sobre uma variável sobrecarregaria a notação. Como não haverá necessidade de referir-se a somatórios (que só têm uso neste trabalho como passo intermediário do cálculo de médias), não há risco de ambigüidade com a eliminação da barra, desde que o leitor tenha presente que o ponto sempre indicará média aritmética.

a) Estimativa do nível-base no instante *t*

O valor b_t do nível-base do processo no instante t poderá ser estimado por:

$$\hat{b}_t = \bar{x}_t = \frac{1}{ns}\sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{n} x_{tij} \tag{3.3}$$

onde, relembrando, x_{tij} representa o valor da *j-ésima* observação do canal i no instante t.

b) Estimativas de e_{tij} e de $\bar{e}_{ti}$

A expressão (3.1) pode ser reescrita como:

$$e_{tij} = x_{tij} - b_t \tag{3.4}$$

Como já mencionado anteriormente, o valor exato de b_t não é conhecido e, em conseqüência, tampouco se conhece o valor exato de e_{tij}. Assim, no lugar das parcelas individuais dos canais, e_{tij}, monitorar-se-ão suas estimativas $\hat{e}_{tij}$, dadas pelas diferenças entre as observações em cada canal e o nível-base estimado:

$$\hat{e}_{tij} = x_{tij} - \hat{b}_t \tag{3.5}$$

A partir da equação (3.5) é possível escrever a estimativa da diferença média do valor no canal i em relação a b_t (o que equivale à estimativa do valor esperado de e_{tij}), como:

$$\hat{e}_{ti\cdot} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\hat{e}_{tij} \tag{3.6a}$$

ou,

$$\hat{e}_{ti\cdot} = x_{ti\cdot} - \hat{b}_t \tag{3.6b}$$

onde

$$x_{ti\cdot} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} x_{tij} \tag{3.6c}$$

Portanto, a estimativa de $\bar{d}_{ti}$ e $\bar{e}_{ti}$ pode ser calculada tanto por (3.5) e (3.6a) como por (3.6c) e (3.6b).

Sintetizando: o modelo aqui proposto para CEP multicanal constitui-se de dois "processos" independentes que utilizam dois gráficos de controle distintos para seu monitoramento, um para o nível-base e outro para as diferenças em relação ao nível-base, como será visto nas Seções 3.5 e 3.6 a seguir.

Antes de prosseguir, apresentar-se-ão algumas relações que serão úteis para os desenvolvimentos mais adiante.

Substituindo-se (3.1) em (3.6c) é fácil ver que:

$$x_{ti\cdot} = b_t + e_{ti\cdot} \qquad (3.7a)$$

onde $e_{ti\cdot}$, ainda que não possa ser calculado diretamente pela expressão que se segue, corresponde a:

$$\bar{e}_{ti} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} e_{tij} \qquad (3.7b)$$

E ainda, substituindo-se em (3.3) o somatório mais interno por $\bar{x}_{ti}$ (de acordo com 3.6c) e, em seguida, substituindo-se $x_{ti\cdot}$ por (3.7a) chega-se a:

$$\hat{b}_t = b_t + e_{t\cdot\cdot} \qquad (3.8)$$

onde $e_{t\cdot\cdot}$ ainda que não possa ser calculado diretamente, corresponde a:

$$e_{t\cdot\cdot} = \frac{1}{s}\sum_{i=1}^{s} e_{ti\cdot} \qquad (3.9)$$

3.3.
Tipo de Causa Especial Considerada

O presente trabalho analisa tanto o desempenho do esquema proposto, como o desempenho do esquema proposto por M&R (para que comparações entre os dois esquemas possam ser realizadas) apenas no que diz respeito à detecção de alterações na média de um dos $e_i's$: no caso de ela mudar de para um valor $\delta\sigma$, mantendo-se neste valor até que haja uma intervenção no processo. Supõe-se que as variâncias permaneçam inalteradas: alteração na dispersão do processo não está no escopo deste trabalho. O caso de alterações no parâmetro do nível-base também não será analisado, devido a três razões, a saber:

- Todos os três esquemas considerados (M&R, Runger *et al.* e o esquema proposto) monitoram o nível-base da mesma forma: sua estimativa, calculada através da média das observações de todos os canais, é monitorada por alguma técnica de controle estatístico de processos univariados: um gráfico de Shewhart, um par de gráficos de controle, um esquema CUSUM ou EWMA, sendo que a escolha do tipo do esquema a ser utilizado dependerá da presença ou não de autocorrelação em b_t; portanto, quanto ao monitoramento do nível-base, os esquemas não diferem;

- Qualquer que seja o esquema de CEP univariado adotado para o monitoramento do nível-base, não se trata de uma abordagem específica para processos multicanal, e sim de gráficos e esquemas já conhecidos e com o desempenho fartamente analisado;
- Todos os três esquemas de controle em análise neste trabalho separam as componentes do processo e suas variações de tal forma que causas especiais que afetem o nível-base não têm efeito sobre os (e_{tij}) e suas estimativas (a recíproca não é verdadeira, como será visto mais adiante).

3.4. Medidas de Desempenho

Duas medidas de desempenho serão utilizadas na análise dos esquemas de controle aqui estudados: a probabilidade de sinal, p (dada a presença de uma causa especial que desloque a média de um canal em $\delta\sigma$ unidades) e o número médio de amostras até um sinal, NMA_1.

Em processos univariados com observações i.i.d., utilizando-se gráficos de Shewhart, o número de amostras até um sinal possui distribuição geométrica com parâmetro p (igual à probabilidade de sinal, constante) de modo que o NMA_1, o valor esperado desta variável, é dado por:

$$NMA_1 = \frac{1}{p} \tag{3.10}$$

No caso de múltiplos canais, porém, há diferentes sinais possíveis: sinal associado ao canal que sofreu alteração, sinal associado a outros canais ou sinal pelo gráfico do nível-base. Estes sinais, por sua vez, possuem diferentes probabilidades, de modo que também podem ser definidos diferentes NMA_1's: número de amostras até sinal associado ao canal afetado, número de amostras até qualquer sinal, por exemplo. A situação de processos multicanal é mais complexa que a de processos univariados, inclusive porque a ocorrência de um tipo de sinal pode levar à interrupção do processo, impedindo assim que outros sinais possam vir a ocorrer (viola-se aqui a premissa da distribuição geométrica, de que as provas de Bernoulli sejam repetidas independentemente até o primeiro sucesso). Vários desses NMA_1's deixam de ser médias de uma distribuição geométrica, e não podem ser calculados por (3.10). Em alguns casos pode nem fazer sentido falar em NMA. Além disso, passa a haver dependência entre os diversos eventos "sinal" possíveis em um mesmo instante de tempo (como será visto adiante).

É fácil observar que ocorrendo uma mudança de magnitude relativamente alta, na média de um dos canais, ela afetará também a estimativa $\hat{b}_t$, dada por (3.3) principalmente quando o processo é constituído de poucos canais. Assim, haverá uma influência direta, tanto na probabilidade de o canal que sofreu a mudança sinalizar, como na probabilidade de o gráfico do nível-base sinalizar e ainda, pelo viés introduzido em $\hat{b}_t$ que se refletirá nas diferenças estimadas (ver expressão 3.6b) na probabilidade de outros canais sinalizarem.

Tendo em vista tudo acima exposto e a não independência entre os canais, as probabilidades de sinal serão calculadas analiticamente para diversos tipos de sinal, mas algumas serão obtidas por simulação. Além disso, não é possível trabalhar com NMA para todas as probabilidades obtidas.

A dificuldade de se obter analiticamente a probabilidade de sinal e o NMA_1 também ocorre no caso do gráfico de R_t proposto por M&R, dado que a distribuição da amplitude relativa só se aplica ao caso em que os valores considerados (valores provenientes dos diversos canais) constituem uma amostra aleatória de uma distribuição normal, condição que não é satisfeita no caso de um único canal ter sua média alterada.

3.5. Gráficos de Controle para o Nível-Base

O gráfico de controle para o nível-base é utilizado a fim de monitorar causas especiais que afetem o processo como um todo (todos os canais simultaneamente).

Como foi dito na Seção 2.3, não está no escopo do presente trabalho a análise do desempenho do esquema proposto na detecção de causas especiais que afetem o nível-base (i.e., na sinalização de alterações nos parâmetros da parcela comum a todos os canais). Porém o gráfico do nível-base também pode sinalizar alterações na média da parcela individual de um dos canais, e neste contexto cabe aqui analisar o seu desempenho.

O nível-base (ou parcela de variação comum a todos os canais) pode ser autocorrelacionado ou não, o que permite que diversos esquemas de controle estatístico sejam utilizados, para seu monitoramento: um gráfico de controle de Shewhart, um gráfico de controle com “limites alargados” (Costa *et al*., 2005, Cap 6), de CUSUM ou EWMA para os resíduos de um modelo de série temporal ajustado aos dados, dentre outros.

Como se trata do primeiro trabalho sobre o método proposto, será considerado o caso mais simples, de um gráfico de Shewhart (gráfico de $\overline{X}$, pois $\hat{b}_t$ é a média das sn observações — n observações de cada um dos s canais — em cada instante de amostragem). Outros esquemas de controle, como gráficos EWMA, CUSUM ou outros, podem ser analisados como extensões posteriores, e o desempenho do gráfico de Shewhart pode ser utilizado como referencial para avaliação dos ganhos de desempenho que tais esquemas podem proporcionar.

O desempenho do gráfico do nível-base variará não apenas conforme o tipo de esquema de controle adotado, mas também em função do valor da razão entre sua variância e a variância das parcelas individuais de cada canal.

Como discutido anteriormente, o valor do nível-base, b_t, não pode ser obtido diretamente, o que faz com que a variável controlada pelo gráfico em questão seja sua “estimativa” $\hat{b}_t$. Para cálculo dos limites de controle, é preciso que tanto o valor esperado quanto a variância de $\hat{b}_t$ sejam conhecidos.

Com o processo em controle, $\hat{b}_t$ é um estimador não-viesado de b_t; portanto seu valor esperado é igual a E(b_t). Para fins de análise de desempenho não importa qual seja o valor particular de E(b_t), que, por simplicidade e sem perda de generalidade, pode ser considerado nulo e, em conseqüência,

$$E(\hat{b}_t) = 0 \tag{3.11}$$

Cabe ressaltar que (3.11) vale com o processo em controle. Ocorrendo um deslocamento na média de alguns dos $e_i's$, um viés será introduzido em $\hat{b}_t$, como será visto oportunamente.

De (3.8) ou (3.9), ou, alternativamente, substituindo-se a equação (3.1) em (3.3), o valor "estimado" para o nível-base pode ser escrito como:

$$\hat{b}_t = b_t + \frac{1}{ns}\sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{n} e_{tij} \tag{3.12}$$

e, a partir da equação (3.12), pode-se escrever a variância do valor estimado do nível-base, como

$$V\left(\hat{b}_t\right) = V\left(b_t\right) + V\left(\frac{1}{ns}\sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{n} e_{tij}\right) \tag{3.13a}$$

$$V\left(\hat{b}_t\right) = V\left(b_t\right) + \frac{1}{(ns)^2} ns\sigma^2 \tag{3.13b}$$

$$V\left(\hat{b}_t\right) = \sigma_b{}^2 + \frac{\sigma^2}{ns} \tag{3.13c}$$

A partir de (3.13c), os limites de "k-sigma" para o gráfico do nível base são dados por:

$$LSC = +k\sqrt{\sigma_b{}^2 + \frac{\sigma^2}{ns}} \tag{3.14}$$

$$LIC = -k\sqrt{\sigma_b{}^2 + \frac{\sigma^2}{ns}} \tag{3.15}$$

onde

$$k = -\Phi^{-1}\left(\alpha/2\right)$$

sendo α a probabilidade de alarme falso especificada e Φ a distribuição normal padrão acumulada.

As equações (3.14) e (3.15) mostram que os limites do gráfico do nível-base dependem da razão entre a sua variância (do nível-base, σ_b^2) e a variância das parcelas individuais de cada canal, σ^2. A sensibilidade desse gráfico a deslocamentos de magnitude $\delta\sigma$ na média individual de um canal dependerá dessa razão, sendo tanto maior quanto menor a razão σ_b^2/σ^2 (porque os limites de controle em (3.14) e (3.15) serão tanto mais estreitos em relação a σ quanto menor for σ_b^2). Os dois casos extremos são: quando a razão tende para infinito, caso em que o gráfico do nível-base será completamente insensível a alterações nas parcelas individuais dos canais (neste caso, a contribuição das parcelas individuais dos canais torna-se irrelevante para a variabilidade do processo, mas cabe a perguntar se tal caso extremo existe na prática), e quando o nível base é constante (canais perfeitamente independentes), e portanto $\sigma_b^2 = 0$. Este é o caso em que a sensibilidade do gráfico do nível-base a alterações nas parcelas individuais dos canais é máxima. Sua análise, portanto, tem interesse, pois fornece limitantes superiores para a probabilidade de sinalização de uma alteração na parcela individual de um canal pelo gráfico do nível-base (no caso em que este não seja constante).

De fato, no caso de o nível-base em controle ser constante (canais perfeitamente independentes), não seria necessário o cálculo das diferenças em relação ao nível-base (pois neste caso pode-se trabalhar diretamente com *group charts* convencionais dos valores observados dos diversos canais, x_{tij}, ou melhor, de suas médias, $x_{ti.}$); portanto a *group chart* aqui proposta (de diferenças em relação ao nível-base estimado) perde sentido nesta situação. Ainda assim, pode ser vantajoso manter um gráfico de controle para o nível-base, para indicar a ocorrência de causas especiais que afetem todos os canais simultaneamente, pois ele deverá ter maior sensibilidade que a *group chart* para sinalizar esse tipo de causa especial. E tal gráfico seria sensível também, adicionalmente, a causas que afetassem apenas um dos canais.

Aqui será analisado o efeito da alteração na média da parcela individual de um dos canais sobre o gráfico do nível-base apenas neste caso extremo em que o nível-base, com processo em controle, assume um valor constante: $b_t = b, \forall t$. Embora este não seja o caso que motivou este trabalho (pois a *group chart* de diferenças proposta só tem sentido no caso em que o nível-base oscila, como recurso para filtrar a sua variação), sua análise tem uma dupla utilidade: em primeiro lugar, repita-se, as probabilidades de sinalização de alterações na parcela de um dos canais pelo gráfico do nível-base que determinadas para este caso são limitantes superiores para os valores exatos dessas probabilidades no caso geral em foco (lembrando que no caso geral essas probabilidades variam de processo para processo, dependendo da razão

σ_b^2/σ^2); e no caso particular de canais independentes (caso em que se utilizaria uma *group chart* convencional e um gráfico para o nível-base), estas probabilidades serão exatas (mesmo não sendo tal caso o foco deste trabalho, trata-se de um resultado adicional).

Neste caso, as equações (3.14) e (3.15) para os limites do gráfico do nível-base simplificam-se para:

$$LSC = +k\frac{\sigma}{\sqrt{ns}} \tag{3.14a}$$

$$LIC = -k\frac{\sigma}{\sqrt{ns}} \tag{3.15a}$$

3.6. Gráficos de Controle para as Diferenças em Relação ao Nível-Base

3.6.1. Considerações Iniciais

A presente seção tem como objetivo descrever a *group chart* das diferenças, esquema de controle proposto para monitoramento de causas especiais que afetem um ou poucos canais, assim como estudar a distribuição em controle das diferenças $\hat{e}_{ti}$ em relação ao nível-base (das observações individuais em cada canal, isto é, n = 1), ou, de modo geral, das diferenças médias $\hat{e}_{ti\cdot}$ (no caso em que cada instante de tempo t são feitas diversas observações por canal), de modo a obter as expressões necessárias para o cálculo de seus limites de controle.

É importante ressaltar que, apesar do uso das diferenças em relação ao nível-base ter sido mencionado como um possível esquema de controle estatístico de processo multicanal por M&R, e de tais diferenças terem sido efetivamente empregadas em *group charts* em um processo real por Passos (2005), a presente análise formal e as expressões dos limites de controle são, ao nosso conhecimento, inéditas. Além de não apresentarem nenhuma fórmula, M&R não discutem aspectos das distribuições das estatísticas empregadas. Passos (2005), por sua vez, defrontouse com um processo em que as diferenças (e_{tij}), além de não serem identicamente distribuídas (possuindo médias e variâncias distintas de canal para canal), apresentavam um pequeno grau de autocorrelação em cada canal. A solução adotada, por preferência da empresa, foi calcular limites para cada diferença $\hat{e}_{ti}$ de cada canal com base numa estimativa do seu desvio-padrão de longo-prazo, σ_i (de modo a levar em conta o efeito da autocorrelação) e adotar para a *group chart*, o maior dos limites superiores ($Max\ LSC_i$) e menor dos limites inferiores ($Min\ LIC_i$). Assim, o presente modelo é, ao nosso conhecimento, original.

3.6.2. Distribuições em Controle das Diferenças Calculadas

Para um processo sob controle, supõe-se que todos os e_{tij} possuam distribuição normal com média nula e desvio-padrão σ constante (ver equação (3.2)). Porém, suas estimativas $\hat{e}_{tij}$ não são calculadas por (3.4), subtraindo de x_{tij} o nível-base teórico, b_t, que é desconhecido, mas sim por (3.5), subtraindo de x_{tij} a estimativa do nível-base, $\hat{b}_t$, que é a média dos diversos x_{tij}. Como visto na Seção 3.2, tal estimativa possui valor esperado igual a b_t e variância igual a σ^2/ns.

É importante observar que apesar de, por hipótese do modelo, as parcelas individuais e_{tij} de cada canal (e suas médias $e_{ti\cdot}$, no caso de mais de uma observação por canal, i.e., de n>1) serem independentes do valor do nível-base (b_t) e também independentes umas das outras ($e_{ti\cdot}$ independente de $e_{tk\cdot}$ para $i \neq k$), as diferenças médias estimadas $\hat{e}_{ti\cdot}$ em relação ao nível-base estimado $\hat{b}_t$ são correlacionadas com o valor do nível-base estimado ($\hat{b}_t$) e não são independentes umas das outras ($\hat{e}_{ti\cdot}$ não é independente de $\hat{e}_{tk\cdot}$ para $i \neq k$).

Substituindo-se a expressão (3.7a) e (3.8) em (3.6b), a diferença média em relação ao nível-base estimado ($\hat{e}_{ti\cdot}$) passa a ser escrita como:

$$\hat{e}_{ti\cdot} = e_{ti\cdot} - e_{t\cdot\cdot} \qquad (3.16a)$$

o que equivale a:

$$\hat{e}_{ti\cdot} = \bar{e}_{ti} - \frac{1}{s}\sum_{k=1}^{s} e_{tk} \tag{3.16b}$$

ou ainda a:

$$\hat{e}_{ti\cdot} = \left(\frac{s-1}{s}\right) e_{ti\cdot} - \frac{1}{s}\sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{s} e_{tk} \tag{3.16c}$$

Dado que, com o processo em controle,

$$e_{ti\cdot} \sim N\left(0, \frac{\sigma^2}{n}\right), \ \forall\, t,i \tag{3.17}$$

e dada a independência dos e_{tij} para diferentes valores de t, i e j, (que implica a independência dos e_{ti} para diferentes valores de t e i então:

$$e_{t\cdot\cdot} \sim N\left(0, \frac{\sigma^2}{ns}\right) \tag{3.18}$$

Portanto, o valor esperado da diferença média em relação ao nível-base estimado, expresso em função da equação (3.16a), corresponde a:

$$E(\hat{e}_{ti\cdot}) = E(e_{ti\cdot}) - E(e_{t\cdot\cdot}) \tag{3.19a}$$

É fácil perceber, a partir das expressões (3.16c), (3.17) e (3.18), que o valor esperado de $\hat{e}_{ti\cdot}$ é nulo, isto é,

$$E(\hat{e}_{ti\cdot}) = 0 \tag{3.19b}$$

Já a variância de $\hat{e}_{ti\cdot}$ pode ser obtida de duas formas distintas. Na primeira forma, a variância é obtida em função da expressão (3.16a), como:

$$V(\hat{e}_{ti\cdot}) = V(e_{ti\cdot} - e_{t\cdot\cdot}) \tag{3.20a}$$

$$V(\hat{e}_{ti}\,\cdot) = V(e_{ti\cdot}) + V(e_{t\cdot\cdot}) - 2Cov(e_{ti\cdot}, e_{t\cdot\cdot}) \tag{3.20b}$$

onde

$$V(e_{ti\cdot}) = \frac{\sigma^2}{n} \tag{3.20c}$$

$$V(e_{t\cdot\cdot}) = \frac{\sigma^2}{ns} \tag{3.20d}$$

e, como demonstrado no Apêndice B,

$$Cov(e_{ti\cdot}, e_{t\cdot\cdot}) = \frac{\sigma^2}{ns} \tag{3.20e}$$

o que leva a:

$$V(\hat{e}_{ti\cdot}) = \left(\frac{s-1}{s}\right)\frac{\sigma^2}{n} \tag{3.20f}$$

Na segunda forma, a variância de $\hat{e}_{ti}\cdot$ pode ser calculada mais diretamente a partir de (3.16a), e lembrando que os $e_{tk}'s$ são independentes, por:

$$V(\hat{e}_{ti}\cdot) = \left(\frac{s-1}{s}\right)^2 \frac{\sigma^2}{n} + \left(\frac{1}{s}\right)^2 (s-1)\frac{\sigma^2}{n} \tag{3.21a}$$

que, se reduz simplesmente a:

$$V(\hat{e}_{ti\cdot}) = \left(\frac{s-1}{s}\right)\frac{\sigma^2}{n} \tag{3.21b}$$

que é idêntica à expressão (3.20f).

Sintetizando: estando o processo sob controle, a diferença média em relação ao nível-base estimado ($\hat{e}_{ti\cdot}$) possui valor esperado zero e variância igual à $\left(\frac{s-1}{s}\right)\frac{\sigma^2}{n}$.

3.6.3. Limites de Controle

Com base na distribuição de $\hat{e}_{ti}$ (ou de $\hat{e}_{ti\cdot}$ no caso de n >1), os limites de controle para as *group charts* das diferenças (ou das diferenças médias $\hat{e}_{ti\cdot}$) podem ser estabelecidos a ± k desvios-padrão da sua média (que foi vista ser nula com o processo em controle), onde o valor de k deve ser estabelecido de forma a garantir que a probabilidade de alarme falso seja suficientemente pequena. A partir de uma probabilidade de alarme falso especificada, pode-se então, calcular o valor de k correspondente.

Como s canais estão sendo considerados, a probabilidade de alarme falso total (α_{global}), pode ser muito maior que a probabilidade de alarme falso para cada canal individualmente ($\alpha_{individual}$), fato que deve ser considerado ao se calcular os limites de controle para o gráfico em questão.

Suponha-se inicialmente independência entre os diversos $\hat{e}_{ti\cdot}$'s (isto é, $\hat{e}_{ti\cdot}$ e $\hat{e}_{tj\cdot}$ independentes se $i \neq j$). Já foi dito que $\hat{e}_{ti}$ e $\hat{e}_{tj}$ não são independentes; portanto $\hat{e}_{ti\cdot}$ e $\hat{e}_{tj\cdot}$ também não serão. Admita-se, porém, apenas provisoriamente, essa hipótese, para fins de exposição. Chamando de $\alpha_{individual}$ e α_{global} as probabilidades de alarme falso individual e global, respectivamente, a probabilidade de nenhum canal sinalizar na presença de uma causa especial seria:

$$\left(1-\alpha_{global}\right) = (1-\alpha_{individual})^{s} \tag{3.22a}$$

o que permite que $\alpha_{individual}$ seja determinado, em função de um valor α_{global} especificado, por:

$$\alpha_{individual} = 1-\sqrt[s]{1-\alpha_{global}} \tag{3.22b}$$

Assim, a partir de um valor especificado para α_{global}, $\alpha_{individual}$ pode ser obtido pela equação (3.22b) acima, o que, por sua vez, permite o cálculo do parâmetro k, como:

$$k = -\Phi^{-1}\left(\frac{\alpha_{individual}}{2}\right) \tag{3.23}$$

Observe que na equação (3.23) o valor de $\alpha_{individual}$ é dividido por dois, o que deve-se ao fato de tanto limite superior quanto o limite inferior de controle serem considerados.

Tomando como exemplo um processo constituído de 20 canais, especificando-se uma probabilidade total de alarme falso, $\alpha_{global} = 0{,}0027$, ter-se-ia:

$$\alpha_{individual} = 1-\sqrt[20]{1-0{,}0027} = 0{,}00014 \tag{3.24}$$

o que corresponde a um valor de k = 3,817.

O procedimento acima para determinação de k possui uma falha dado que pressupõe que os $\hat{e}_{ti\cdot}$'s sejam independentes, quando na verdade apresentam correlação entre si. Para um processo com s canais, a correlação ρ_{ij} entre duas diferenças médias calculadas quaisquer $\hat{e}_{ti\cdot}$ e $\hat{e}_{tj\cdot}$ (para $i \neq j$) é:

$$\rho_{ij} = \frac{-1}{(s-1)} \text{ para } \forall\, i, j, i \neq j \tag{3.25}$$

A demonstração encontra-se no Apêndice C.

O efeito dessa correlação é fazer com que o valor real, exato, de α_{global} (que pode ser calculado integrando-se a distribuição multivariada dos $\hat{e}_{ti\cdot}'s$ fora da região s-variada definida pelos limites de controle determinados) seja menor que o valor fornecido por (3.22a). Em outras palavras, a suposição de independência entre os $\hat{e}_i's$ leva à superestimação da probabilidade de alarme falso global.

No caso extremo de apenas dois canais (s = 2), a expressão (3.25) se reduz a:

$$\rho_{ij} = \frac{-1}{(2-1)} = -1 \tag{3.26}$$

De fato, como $\hat{b}$ é a média dos $x_{ti\cdot}'s$, no caso de s = 2, $\hat{b}_t$ equivale ao ponto médio $\frac{(x_{t1\cdot} + x_{t2\cdot})}{2}$ e $\hat{e}_{t1\cdot} = -\hat{e}_{t2\cdot}$ ou, $\hat{e}_{t1\cdot} = \frac{(x_{t1\cdot} - x_{t2\cdot})}{2}$ e $\hat{e}_{t2\cdot} = \frac{(x_{t2\cdot} - x_{t1\cdot})}{2}$.

Neste caso, os dois canais sinalizam sempre juntos, $\alpha_{individual}$ é igual a α_{global} e a expressão (3.22b) não deve ser utilizada para compensar o efeito de o processo ser constituído por mais de um canal.

No caso de um processo com três canais (s = 3), a correlação entre canais cai (em módulo), para:

$$\rho_{ij} = \left| \frac{-1}{(3-1)} \right| = 0{,}5 \tag{3.27}$$

Embora esta correlação leve a um valor de α_{global} menor que o fornecido pela expressão (3.22b), essa redução já é menos significativa que no caso de dois canais.

Calculando, para vários valores de α_{global} especificados, os limites de controle por (3.22b) e (3.23), com s = 3 (processo com três canais), e, em seguida, calculando os valores exatos de α_{global} para uma *group chart* com esses limites, verifica-se que a redução do α_{global} em relação ao especificado é da ordem de apenas 5%, sendo menor para menores valores especificados de α_{global}. Pode-se também comparar os NMA_0's exatos e especificados, o que é equivalente a comparar as probabilidades de alarme falso, pois

$$NMA_{0\,global} = \frac{1}{\alpha_{global}} \tag{3.28}$$

A Tabela 3.1 fornece o NMA_0 exato para alguns valores de NMA_0 especificados para processos com 3 canais.

Tabela 3.1– Erro da Expressão (3.22b) no cálculo do NMA_0 global e valores de k que levam aos valores nominais de NMA_0's para processo com três canais (*s* = 3).

NMA_0			
Especificado	Exato	Diferença (%)	*k* que resulta no NMA_0 especificado
100	106,622	6,62	2,917
200	209,995	5	2,947
370,38	385,89	4,19	3,129

Fonte: Própria

Os NMA_0's exatos da Tabela 3.1 foram obtidos por um programa computacional que calcula a probabilidade de nenhum dos três canais sinalizar integrando a distribuição normal trivariada na região dentro dos limites de controle. Outro programa semelhante foi utilizado para o caso de um processo com dois canais, confirmando que, neste caso, $\alpha_{individual}$ é igual a α_{global}.

No caso de três canais, a pequena magnitude do aumento no NMA_0 global com o uso dos limites de controle determinados pelas expressões (3.22b) e (3.23) mostra que elas podem ser utilizadas, dado seu pequeno impacto na prática e dado que os limites assim determinados são conservadores (levam a uma freqüência de alarmes falsos menor que o especificado: α menor, NMA_0 maior). Contudo, o poder do gráfico evidentemente, será um pouco menor que no caso dos limites que correspondam exatamente ao α_{global} (ou NMA_0 global) especificado. Assim, para $s = 3$, buscou-se iterativamente, por tentativas, valores para *k* que levassem a valores exatos de NMA_0 global iguais a 100, 200 e 370,38. Tais valores estão disponíveis na Tabela 3.1 acima.

A expressão (3.25) mostra que, a correlação entre os diferentes $\hat{e}_{ti}$'s diminui (em módulo) com o aumento do número de canais (sendo igual a -1/3 no caso de quatro canais, -1/4 no caso de cinco canais, e assim por diante); isso faz com que os erros percentuais nos valores de NMA_0 (ou de α_{global}) calculados pela expressão

(3.22b) se tornem cada vez menos relevantes (como já é sabido, menores que 5% já para s = 4). Dessa forma, recomenda-se que, para $s \geq 4$ os limites sejam estabelecidos com base nas expressões (3.22b) e (3.23).

Como visto anteriormente, para um processo em controle, as diferenças médias $\hat{e}_{ti\cdot}$ são normalmente distribuídas (pois são combinações lineares de variáveis aleatórias normalmente distribuídas) com média nula (expressão 3.19b) e desvio-padrão igual a $\sqrt{\frac{s-1}{s}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ (expressão 3.21b), o que permite que os limites de controle para as diferenças $\hat{e}_{ti\cdot}$ sejam representados por:

$$LSC = k\sqrt{\frac{s-1}{s}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \qquad (3.29)$$

$$LIC = -k\sqrt{\frac{s-1}{s}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \qquad (3.30)$$

onde:

s = número de canais;

n = número de diferentes medidas por canal em um mesmo instante de tempo, isto é, o tamanho da amostra;

σ = desvio-padrão das diferenças reais em relação ao nível-base “teórico”, e

k é obtido da seguinte forma:

- Pela equação (3.23), com $\alpha_{individual}$ igual a α_{global}, no caso de processos com dois canais (s = 2)
- Pela Tabela 3.1 caso o processo contenha três canais (s= 3), ou
- Pelas equações (3.22b) e (3.23), caso o processo tenha mais de três canais ($s > 3$)

Quanto a σ e às expressões (3.29) e (3.30), alguns comentários devem ser feitos: σ é o desvio-padrão das diferenças **reais** em relação à b_t; se for desconhecido, deve ser estimado. Todavia, como b_t não é conhecido, o usuário provavelmente poderá estimar o desvio-padrão dos $\hat{e}_{ti\cdot}$'s, que têm como valor esperado $\sqrt{\frac{s-1}{ns}}\sigma$. Neste caso, para cálculo dos limites de controle, basta multiplicar essa estimativa por *k*.

Apenas no caso de b_t ser constante (com o processo em controle) – situação pouco comum – o desvio-padrão das diferenças reais poderá ser estimado diretamente, pois coincidirá com o desvio-padrão dos x_{tij}. Neste caso, porém, pode não haver muito sentido em trabalhar com uma *group chart* das diferenças médias, sendo mais coerente, portanto, trabalhar com uma *group chart* dos $x_{ti\cdot}$, dado que as correlações cruzadas (que são devidas à variação da parcela comum b_t) desaparecerão, e cada valor corresponderá diretamente à medida (ou média das medidas) da variável de interesse em cada canal.

As expressões (3.29) e (3.30) para os limites de controle possuem, portanto, interesse essencialmente teórico. São úteis tanto para a compreensão do funcionamento do *group chart* proposto, como para análises de desempenho do esquema a partir de dados simulados. No caso da simulação, os dados gerados correspondem a valores de e_i, independentes, e a relação entre os limites de controle e o desvio-padrão dos dados gerados é expressa pelas equações (3.29) e (3.30).

3.7. Medidas de Desempenho sob Presença de Causa Especial

Se a média da parcela individual, e_i, de um canal qualquer (mas de apenas um canal), sofrer um deslocamento de δ desvios-padrão, que faça com que este canal saia de controle, passando a ter média $\mu_i = \delta\sigma$, permanecendo, porém, o desvio-padrão inalterado, não apenas a diferença média estimada $\hat{e}_{ti\cdot}$ terá seu valor estimado alterado, mas também o nível-base estimado ($\hat{b}_t$) e, em decorrência, as diferenças médias estimadas $\hat{e}_{tk\cdot}$ dos demais canais ($k = 1, 2 \ldots s,\ k \neq i$). As alterações sofridas por tais estatísticas afetarão as probabilidades de sinal da *group chart* de diferenças (tanto a probabilidade de sinal associado ao canal afetado, quanto a probabilidade de sinais associados aos demais canais) e também a probabilidade de sinal pelo gráfico do nível-base.

A seguir, serão apresentadas as alterações sofridas pelas estatísticas, assim como as fórmulas que permitem o cálculo das probabilidades dos diversos tipos de sinal na presença de uma causa especial, que altere a média da parcela individual e_i de algum dos canais do processo.

a) Probabilidade de Sinal pelo Gráfico do Nível-Base no Caso de a Parcela Individual de um Canal Sofrer o Efeito de uma Causa Especial

Como foi visto, a estimativa do nível-base é obtida pela expressão (3.3), que pode ser expressa, equivalentemente, como:

$$\hat{b}_t = \frac{1}{s}\sum_{k=1}^{s} x_{tk\cdot} \tag{3.31a}$$

na qual

$$x_{tk\cdot} = b_t + e_{tk\cdot} \tag{3.31b}$$

que é idêntica à expressão (3.7a).

Substituindo-se (3.31b) em (3.31a), esta pode ser reescrita como:

$$\hat{b}_t = b_t + \frac{1}{s}\sum_{k=1}^{s} e_{tk\cdot} \tag{3.31c}$$

onde $\sum_{k=1}^{s} e_{tk\cdot}$ pode ser, decomposta em duas parcelas:

$$\sum_{k=1}^{s} e_{tk\cdot} = e_{ti\cdot} + \sum_{\substack{k=1 \\ k\neq i}}^{s} e_{tk\cdot} \tag{3.31d}$$

O valor esperado do nível-base estimado pode ser obtido substituindo-se a expressão (3.31d) em (3.31c), o que resulta na equação:

$$E\left(\hat{b}_t\right) = E\left[b_t + \frac{1}{s}\left(e_{ti\cdot} + \sum_{\substack{k=1 \\ k\neq i}}^{s} e_{tk\cdot}\right)\right] \tag{3.32a}$$

sendo que:

$$E(e_{ti\cdot}) = \delta\sigma \tag{3.32b}$$

para o canal *i*, que sofreu a mudança, e,

$$E(e_{tk\cdot}) = 0\,,\ \forall\ k \neq i \tag{3.32c}$$

para qualquer outro canal que não tenha sua média alterada.

E, finalmente, pelas expressões (3.32a), (3.32b) e (3.32c) é possível obter uma expressão final para o valor esperado do nível-base estimado quando um dos canais sofre um *shift* de $\delta\sigma$ em sua média:

$$E(\hat{b}_t) = b_t + \frac{\delta\sigma}{s} \tag{3.32d}$$

Na situação aqui considerada, $b_t = 0$ e, portanto:

$$E(\hat{b}_t) = \frac{\delta\sigma}{s} \tag{3.32e}$$

Estando o processo sob influência de uma causa especial responsável pela alteração na média da parcela individual de um dos *s* canais do processo, a probabilidade de sinal pelo gráfico nível-base é dada por:

$$P_{nb} = 1 - \left[P(\hat{b}_t < LSC) - P(\hat{b}_t < LIC) \right] \tag{3.33}$$

Lembrando que (por 3.13d e 3.32c) $\hat{b}_t \sim N\left(\frac{\delta\sigma}{s}, \frac{\sigma^2}{ns}\right)$ e substituindo LSC e LIC da expressão anterior por suas equações correspondentes, (3.14) e (3.15), esta pode ser reescrita como:

$$P_{nb} = 1 - \left[\Phi\left(\frac{k\frac{\sigma}{\sqrt{ns}} - \frac{\delta\sigma}{s}}{\sigma/\sqrt{ns}} \right) - \Phi\left(\frac{-k\frac{\sigma}{\sqrt{ns}} - \frac{\delta\sigma}{s}}{\sigma/\sqrt{ns}} \right) \right] \tag{3.34a}$$

Simplificando-se chega-se a:

$$P_{nb} = 1 - \left[\Phi\left(k - \delta\sqrt{\frac{n}{s}} \right) - \Phi\left(-k - \delta\sqrt{\frac{n}{s}} \right) \right] \tag{3.34b}$$

que é a probabilidade de ocorrer um sinal no gráfico do nível-base, devido a uma alteração na média da parcela individual de um dos canais.

b) Probabilidade de Sinal Associada ao Canal Afetado pela Causa Especial:

Quando a parcela individual do canal *i*, e_i, tem sua média deslocada para $\delta\sigma$, o valor esperado da diferença média em relação ao nível-base estimado deste canal $\hat{e}_{ti\cdot}$, pode ser escrito, a partir da equação (3.16c), como:

$$E(\hat{e}_{ti}\,\cdot) = E\left[\left(\frac{s-1}{s}\right)e_{ti\cdot} - \frac{1}{s}\sum_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{s} e_{tk\cdot}\right] \tag{3.35a}$$

$$E(\hat{e}_{ti\cdot}) = \left(\frac{s-1}{s}\right)E(e_{ti\cdot}) - \frac{1}{s}\sum_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{s} E(e_{tk\cdot}) \tag{3.35b}$$

Lembrando que os valores esperados no membro direito de (3.35b) são:

$$E(e_{ti\cdot}) = \delta\sigma \tag{3.36}$$

para o canal *i* que teve sua média alterada para $\delta\sigma$, e

$$E(e_{tk\cdot}) = 0 \quad \forall \quad k \neq i \tag{3.37}$$

para os demais canais, que não tiveram sua média alterada pela presença da causa especial, e substituindo esses valores em (3.35b) chega-se a:

$$E(\hat{e}_{ti\cdot}) = \left(\frac{s-1}{s}\right)\delta\sigma \tag{3.38}$$

A probabilidade de um sinal na *group chart* associado ao canal que sofreu a mudança é dada por:

$$P_{\hat{e}_{ti\cdot}} = 1 - \left[P(\hat{e}_{ti\cdot} < LSC) - P(\hat{e}_{ti\cdot} < LIC)\right] \tag{3.39a}$$

Lembrando que, por (3.15b) e por (3.38), $\hat{e}_{ti} \sim N\left(\left(\frac{s-1}{s}\right)\delta\sigma, \left(\frac{s-1}{s}\right)\frac{\sigma^2}{n}\right)$ e substituindo-se LSC e LIC na expressão anterior por suas equações correspondentes (3.29) e (3.30), obtém-se:

$$P_{\hat{e}_{ti\cdot}} = 1 - \Phi\left[\left(\frac{k\sigma\sqrt{\frac{s-1}{ns}} - \frac{\delta\sigma(s-1)}{s}}{\sqrt{\frac{s-1}{ns}}\,\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{-k\sigma\sqrt{\frac{s-1}{ns}} - \frac{\delta\sigma(s-1)}{s}}{\sqrt{\frac{s-1}{ns}}\,\sigma}\right)\right] \tag{3.39b}$$

que equivale, simplificando, a:

$$P_{\hat{e}ti\cdot} = 1 - \left[\Phi\left(k - \delta\sqrt{\frac{n(s-1)}{s}} \right) - \Phi\left(-k - \delta\sqrt{\frac{n(s-1)}{s}} \right) \right] \quad (3.39c)$$

c) Probabilidade de Sinalização por um Canal Diferente do Afetado pela Causa Especial:

Considerando a diferença média em relação ao nível-base estimado para qualquer outro canal *k* que não foi afetado pela causa especial como

$$\hat{e}_{tk\cdot} = x_{tk\cdot} - \hat{b}_t \quad (3.40a)$$

seu valor esperado será:

$$E(\hat{e}_{tk\cdot}) = E(x_{tk\cdot}) - E(\hat{b}_t) \quad (3.40b)$$

Substituindo-se (3.31b) e (3.32d) em (3.40b), obtém-se que:

$$E(\hat{e}_{tk\cdot}) = b_t + E(e_{tk\cdot}) - \left(b_t + \frac{\delta\sigma}{s} \right) \quad (3.40c)$$

onde ,

$$E(e_{tk\cdot}) = 0 \text{ para } k \neq i \quad (3.41)$$

para qualquer canal que não tenho sofrido alteração em sua média, portanto

$$E(\hat{e}_{tk\cdot}) = -\frac{\delta\sigma}{s} \quad (3.42)$$

O valor da probabilidade de que, sob presença da causa especial considerada, a *group chart* sinalize em qualquer outro canal que não tenha sido afetado pela causa é dada por:

$$P_{\hat{e}tk\cdot} = 1 - \left[P(\hat{e}_{tk\cdot} < LSC) - P(\hat{e}_{tk}\cdot < LIC) \right] \quad (3.43a)$$

Mais uma vez, substituindo-se as expressões referentes aos limites da *group chart* e lembrando que $\hat{e}_{tk\cdot} \sim N\left(\frac{-\delta\sigma}{s}, \left(\frac{s-1}{s} \right) \frac{\sigma^2}{n} \right)$, obtém-se:

$$P_{\hat{e}_{tk}\cdot} = 1 - \left[\Phi\left(\frac{k\sigma\sqrt{\frac{s-1}{ns}} + \frac{\delta\sigma}{s}}{\sqrt{\frac{s-1}{ns}}\sigma} \right) - \Phi\left(\frac{-k\sigma\sqrt{\frac{s-1}{ns}} + \frac{\delta\sigma}{s}}{\sqrt{\frac{s-1}{ns}}\sigma} \right) \right] \quad (3.43b)$$

que, simplificada, pode ser escrita como:

$$P_{\hat{e}_{tk}\cdot} = 1 - \left[\Phi\left(k + \frac{\delta\sqrt{n}}{\sqrt{s(s-1)}} \right) - \Phi\left(-k + \frac{\delta\sqrt{n}}{\sqrt{s(s-1)}} \right) \right] \quad (3.43c)$$

$P_{\hat{e}_{tk}\cdot}$ é a probabilidade de sinalização por um canal não afetado pela causa especial, para cada canal, individualmente. Se os valores de $\hat{e}_{tk}\cdot$ fossem independentes para os diversos canais ($k = 1,2...s;\ k \neq i$), então o número de sinais simultâneos por canais não afetados seguiria uma distribuição binomial, e a probabilidade de sinal por algum (pelo menos um) canal não afetado seria dada por:

$$1 - \left(1 - P_{\hat{e}_{tk}\cdot}\right)^{s-1} \quad (3.44)$$

Contudo, como os valores de $\hat{e}_{tk}\cdot$ são correlacionados, essa expressão superestima a probabilidade de sinal por um ou mais canal(is) não afetado(s) pela causa especial.

O sinal em um canal que não foi afetado (dado que outro canal foi afetado pela causa especial), que pode ser considerado alarme falso, também pode ser considerado alarme verdadeiro quando a procura da causa especial que não é encontrada no canal que sinalizou acabe levando a uma maior investigação que, finalmente, resulte na descoberta da mesma no canal afetado. A conseqüência de tais sinais, portanto, variará conforme a natureza do processo, a conduta da equipe (por exemplo, investigar apenas o canal associado ao sinal, ou prosseguir na investigação) e o tipo de testes de diagnóstico. Além disso, é diferente a situação de tal sinal ocorrer sem que ocorra um sinal associado ao canal realmente afetado, ou ocorrer juntamente com o sinal associado ao canal afetado, de modo que a própria probabilidade de sinal dada por (3.44) deve ser interpretada cautelosamente.