# Bibliografia


[1] API STD 617 $7^{th}$ EDITION. **Axial and Centrifugal Compressors and Expander-compressors for petroleum, chemical and gas industry services**. Standard $7^{th}$ edition, America Petroleum Institute, Washington DC, USA, 2002.

[2] ALLAIRE, PAUL E. **Introduction to journal bearing design for turbomachinery**. $16^{th}$ turbomachinery symposium, Texas A & M University, USA, 1987.

[3] ALLAIRE, PAUL E., NICHOLAS, J. **Curso de Mancais para Turbomáquinas**. Centro de Ensino Sul/Sudeste, PETROBRAS, volume I, Rio de Janeiro, março 1994.

[4] ALLAIRE, PAUL E., NICHOLAS, J. **Curso de Mancais para Turbomáquinas**. Centro de Ensino Sul/Sudeste, PETROBRAS, volume II, Rio de Janeiro, março 1994.

[5] AVITABILE, P. **Experimental Modal Analysis**. Journal of Sound and Vibration, p. 1–11, January 2001.

[6] BERGER, S., BONNEAU, O., FRÊNE, J. **Influence of Axial Thrust Bearing on the Dynamic Behavior of an Elastic Shaft: Coupling Between the Axial Dynamic Behavior and the Bending Vibrations of a Flexible Shaft**. Journal of Vibration and Acoustic, p. 145-149, April 2001.

[7] BROCKETT, T. **Thermohydrodynamic Lubrication in Thrust Bearing**. PhD thesis, School of Engineering and Applied Science, University of Virginia, USA, 1994.

[8] CHILDS, DARA W. **Turbomachinery Rotordynamics, Phenomena, Modelling,** & **Analysis**. John Wiley & Sons, Inc., 605 Third Avenue, New York, NY $10158 - 0012$.

[9] DIMAROGONAS, A.D. **Vibration for Engineers**. Prentice-Hall Inc., USA, 1996.

[10] ANDREW D. DIMAROGONAS, S. A. PAIPETIS. **Analitical Methods in Rotor Dynamics**. Applied Science Publishers, Ripple Road, Barking, Essex, England, 1983.

[11] R. GASCH, R. NORDMANN, H.PFÜZNER. **Rotordynamik**. Springer-Verlag, Berlin, Deutschland, 2006.

[12] HATCH, MICHAEL R. **Vibration Simulation Using Matlab and Ansys**, Chapman and Hall/CRC,Boca Raton, Florida 33431, SA, 2001.

[13] JIMIM H., ZHI-FANG F. **Modal Analysis**, Butterworth-Heinemann, Linacre House, Jordan Hill, USA, 2001.

[14] HUGHES, THOMAS J. R. **The Finite Element Method. Linear Static and Dynamic Finite Element Analysis**. Dover Publications Inc, Mineapolis, USA, 1987.

[15] INMAN, D. J. **Engineering Vibration**. Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey 07632, 1996.

[16] WANG W., KIRKHOPE, J . **New Eigensolutions and Modal Analysis for Gyroscopic/Rotor Systems, Part1: Undamped Systems**. Journal of Sound and Vibration, vol. 175, pages 159-170, Academic Press Ltd, February, 1994.

[17] W. WANG, KIRKHOPE, J . **New Eigensolutions and Modal Analysis for Gyroscopic/Rotor Systems, Part2: Perturbation Analysis for Damped Systems**. Journal of Sound and Vibration, vol. 175, pages 171-183, Academic Press Ltd, February, 1994.

[18] LALANNE, M., FERRARIS, G. **Rotordynamics, Prediction in Engineering**. John Wiley & Sons Ltd, Bafins Lane, Chichester, West Sussex, PO191UD, England, 1990.

[19] KREYSZIG, E . **Advanced Engineering Mathematics**. John Willey & Sons, USA, 2006.

[20] NUNO M.M. MAIA, J. M. S. **Theoretical and Experimental Modal Analysis**, 1997.

[21] MEIROVITCH, L . **Principles and Techniques of Vibration**. Prentice Hall, Upper Sadlle River, New Jersey 07458, USA, 1997.

[22] MEIROVITCH, L . **Elements of Vibration Analysis, Second Edition**. McGraw-Hill Book Company, USA, 1989.

[23] MITTWOLLEN, N, HEGEL, T., GLIENICKE, J. **Effect of Hydrodynamic Thrust Bearings on Lateral Shaft Vibrations**. Journal of Tribology, vol.113, p. 811-818, October, 1991.

[24] NELSON, H.. **A finite rotating shaft element using timoshenko beam theory**. Journal of Mechanical Design, p. 793–803, October 1980.

[25] RITTO, T. G. **Análise de Vibrações de Sistemas Lineares e Não-Lineares no Contexto da Formulação Fraca Análise Modal e Decomposição de Karhuenen-Lòeve**. MSc Thesis, Departamento de Engenharia Mecânica, PUC-Rio, Rio de Janeiro, RJ, Brasil, 2006.

[26] RODRIGUEZ, P.. **Effect of Tilting Pad Thrust Bearing on Rotor Stability and Forced Response**. PhD Thesis, School of Engineering and Applied Science, University of Virginia, USA, 2000.

[27] LECKAR H., SAMPAIO R . **Aspectos Matemáticos de Vibrações**. Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rua Marquês de São Vicente, 225, CEP 22453-900, Rio de Janeiro, 2005.

[28] SANT'ANNA R., WEBER H., MATTOS W . **Case study of a Catastrophic Thrust Bearing Failure in a Blower due to Axial Ressonance**. $7^{th}$ IFToMM Conference on Rotor Dynamics, Vienna, Austria, p. 10, September 2006.

[29] SHABANA, AHMMED A. **Theory of of Vibration, Volume II: Discrete and Continuous Systems** . Springer-Verlag New York, USA, 1995.

[30] STRANG, G. **Linear Algebra and Its Aplications, Fourth Edition**. Thompson Brooks/Cole, Belmont California, USA, 2006.

[31] TIMOSHENKO S. P., GOODIER J. N. **Theory of Elasticity, Thrid Edition**. McGraw-Hill International Editions, USA, 1970.

[32] YU, J. **Axial Vibration due to Thrust Bearing and its Elimination**. $7^{th}$ IFToMM Conference on Rotor Dynamics, Vienna, Austria, p. 9, September 2006.

# A
# Anexos

## A.1
## Energia Cinética Devido à Rotação

### A.1.1
### Velocidade Angular

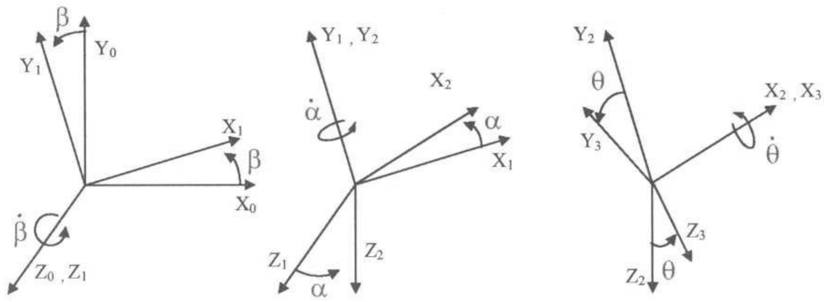


Figura A.1: Sistemas de Referências

Sistemas de Referências.

$(X_0, Y_0, Z_0) \longrightarrow$ sistema inercial;
$(X_1, Y_1, Z_1) \longrightarrow$ sistema vinculado ao referencial 1 (rotação $\dot{\beta}$);
$(X_2, Y_2, Z_3) \longrightarrow$ sistema vinculado ao referencial 2 (rotação $\dot{\alpha}$);
$(X_2, Y_2, Z_3) \longrightarrow$ sistema vinculado ao referencial 3 (rotação $\dot{\theta}$);

Matrizes de Transformação. Transformação do referencial inercial para o referencial 1.

$$ {}_1T_0 \begin{bmatrix} cos(\beta) & sen(\beta) & 0 \\ -sen(\beta) & cos(\beta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} . \tag{A-1} $$

Transformação do referencial 1 para o referencial 2.

$$ {}_2T_1 \begin{bmatrix} cos(\alpha) & 0 & -sen(\alpha) \\ 0 & 1 & 0 \\ sen(\alpha) & 0 & cos(\alpha) \end{bmatrix} . \tag{A-2} $$

Transformação do referencial 2 para o referencial 3.

$$ {}_3T_2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & cos(\theta) & sen(\theta) \\ 0 & -sen(\theta) & cos(\theta) \end{bmatrix} . \tag{A-3} $$



Velocidades Angulares. Velocidade do referencial 1 em relação a 0, no sistema de coordenadas 1.

$$ {}^1({}_1\omega_0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\beta} \end{bmatrix} . \tag{A-4} $$

Velocidade do referencial 2 em relação ao 1, no sistema de coordenadas 2.

$$ {}^2({}_2\omega_1) = \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{\alpha} \\ 0 \end{bmatrix} . \tag{A-5} $$

Velocidade do referencial 3 em relação 2, no sistema de coordenadas 3.

$$ {}^3({}_3\omega_2) = \begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} . \tag{A-6} $$

Velocidade angular do corpo em relação ao referencial inercial, escrito no sistema de coordenadas 3:

$$ {}^3({}_3\omega_0) =^3 ({}_2\omega_1) +^3 ({}_3\omega_2) +^3 (\omega_3) \tag{A-7} $$

$$^3({}_3\omega_0) = ({}_3T_2)({}_2T_1)\ ^1({}_1\omega_0) + ({}_3T_2)\ ^2({}_2\omega_1) +^3 ({}_2\omega_3)\,. \tag{A-8}$$

Utilizando-se do MATLAB® para o cálculo, pode-se escrever:

$$^3({}_3\omega_0) = \begin{bmatrix} \dot{\theta} - sen(\alpha)\dot{\beta} \\ sen(\theta)cos(\alpha)\dot{\beta} + cos(\theta)\dot{\alpha} \\ cos(\theta)cos(\alpha)\dot{\beta} - sen(\theta)\dot{\alpha} \end{bmatrix}. \tag{A-9}$$

### A.1.2 Energia Cinética

Considere-se o referencial vinculado ao corpo, isto é o rotor (referencial 3), de maneiras que o eixo coincida com os eixos principais devido à simetria do rotor, então:

$$[\text{Inertia}] = \begin{bmatrix} I_p & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix}. \tag{A-10}$$

Onde $I_p$ é o momento polar de inércia do rotor e $I$ momento diametral de inercia.

$$T =^3 ({}_3\omega_0)^T\ [\text{Inertia}]\ ^3({}_3\omega_0)\,. \tag{A-11}$$

Utilizando-se do MATLAB® para calcular:

$$T = \frac{1}{2}I_p(\dot{\beta}^2 - \dot{\beta}^2 cos(\alpha)^2 - 2sen(\alpha)\dot{\beta}\dot{\theta} + \dot{\theta}^2) + \frac{1}{2}I(cos(\alpha)^2\dot{\beta}^2 + \dot{\alpha}^2)\,. \tag{A-12}$$

Simplificam-se as equação acima pressupondo-se pequenas rotações: $\alpha$ e $\beta \Rightarrow sen(\alpha) \sim \alpha$, $sen(\beta) \sim \beta$, $cos(\alpha) \sim 1$, e $cos(\beta) \sim 1$.

A energia cinética então pode ser escrita como:

$$T = \frac{1}{2}I_p(\dot{\theta}^2 - 2\dot{\theta}\alpha\dot{\beta}) + \frac{1}{2}I(\dot{\beta}^2 + \dot{\alpha}^2)\,. \tag{A-13}$$

## A.2
## Funções de Forma - Modelo da Viga de Timoshenko

Formulação da viga de Timoshenko:

$$GAK_s(-\theta'(x) - w''(x)) = 0\,,$$

$$GAK_s(\theta(x) + w'(x)) - EI\theta''(x) = 0\,. \tag{A-14}$$

Os graus de liberdade são vistos na figura A.2.

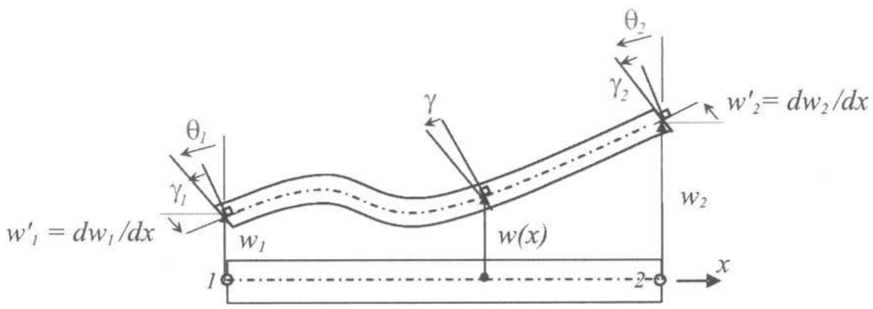


Figura A.2: Graus de liberdade de um elemento de viga

Observar que o ângulo de cizalhamento é $\gamma = \theta - dw/dx$. Neste modelo a seção ransversal de área permanece plana, mas não necessariamente pendicular a linha neutra. Considerando-se o material homogêneo-isotrópico com densidade $\rho$, módulo de elasticidade $E$, modulo de cizalhamento $G$, fator de cizalhamento $k_s$; e a viga com propriedades geométricas $A$ (área de seção transversal) e $I$ (momento de inércia). O deslocamento vertical é dado por $w$ e $f$ é a força externa.

A relação entre as coordenadas do elemento e as coordenadas é dada por: $\xi = x/l$, onde $l$ é o tamanho do elemento. A equação será escrita em coordenadas do elemento, desta forma as derivadas devem ser calculadas da seguinte maneira:

$$\frac{dw(x)}{dx} = \frac{dw(\xi)}{d\xi}\frac{d\xi}{dx} = w'(\xi)\frac{1}{l} \tag{A-15}$$

and

$$\frac{d^2w(x)}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dw(x)}{dx}\right)\,. \tag{A-16}$$

Utilizando-se o resultado da primeira derivada, tém-se:

$$\frac{d^2w(x)}{dx^2} = w'(\xi)\underbrace{\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{l}\right)}_{=0} + \left(\frac{d^2w(\xi)}{d\xi^2}\frac{d\xi}{dx}\right)\left(\frac{1}{l}\right) = w''(\xi)\frac{1}{l^2}\,. \tag{A-17}$$

O mesmo ocorre para $\theta(x)$: $\dfrac{d\theta(x)}{dx} = \theta'(\xi)\dfrac{1}{l}$ e $\dfrac{d^2\theta(x)}{dx^2} = \theta''(\xi)\dfrac{1}{l^2}$.
Então a Eq. (A-14) pode ser reescrita como:

$$\frac{GAK_s(-l\theta'(\xi) - w''(\xi))}{l^2} = 0\,,$$

$$\frac{GAK_s(l\theta(\xi) + w'(\xi))}{l} - \frac{EI\theta''(\xi)}{l^2} = 0\,. \tag{A-18}$$

$w$ e $\theta$ serão representados como:

$$\begin{pmatrix} w \\ \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} & h_{13} & h_{14} \\ h_{21} & h_{22} & h_{23} & h_{24} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ \theta_1 \\ w_2 \\ \theta_2 \end{pmatrix}. \tag{A-19}$$

As condições de contorno podem serescritas como:

$$w(0) = w_1 \quad w(1) = w_2 \quad \theta(0) = \theta_1 \quad \theta(1) = \theta_2\,. \tag{A-20}$$

Introduzindo a Eq. (A-20) na Eq. (A-18), e usando-se o MATLAB® para os cáculos:

$$\begin{aligned} w(\xi) = \frac{1}{12EI + GAk_s l^2}\Big[&(12EI - 12EI\xi + GAk_s l^2 - 3GAk_s\xi^2 l^2 + 2GAk_s\xi^3 l^2)w_1 \\ &(12EI\xi + 3GAk_s\xi^2 l^2 + 2GAk_s\xi^3 l^2)w_2 \\ &(-6EI\xi l + 6EI\xi^2 l - GAk_s\xi l^3 + 2GAk_s\xi^2 l^3 - GAk_s\xi^3 l^3)\theta_1 \\ &(6EI\xi l - 6EI\xi^2 l + GAk_s\xi^2 l^3 - GAk_s\xi^3 l^3)\theta_2\Big]\,, \end{aligned} \tag{A-21}$$

$$\theta(\xi) = \frac{1}{12EI + GAk_s l^2}\Big[(GAk_s\xi l - GAk_s\xi^2 l)w_1 + (-GAk_s\xi l + GAk_s\xi^2 l)w_2$$

$$(12EI - 12EI\xi + GAk_s l^2 - GAk_s \xi l^2 + 3GAk_s \xi^2 l^2)\theta_1 \tag{A-22}$$

$$(12EI\xi - 2GAk_s \xi l^2 + 3GAk_s \xi^2 l^2)\theta_2\big] \ . \tag{A-23}$$

Definindo-se:

$$\varphi = \frac{12EI}{GAk_s l^2} \ . \tag{A-24}$$

Então:

$$\frac{12EI}{12EI + GAk_s l^2} = \frac{\varphi}{1+\varphi} \quad \text{e} \quad \frac{GAk_s l^2}{12EI + GAk_s l^2} = \frac{1}{1+\varphi} \ . \tag{A-25}$$

As funções de forma são dadas por:

$$h_{11} = \frac{1}{1+\varphi}\left(1 - 3\xi^2 + 2\xi^3 + \varphi\left(1-\xi\right)\right) \ , \tag{A-26}$$

$$h_{12} = \frac{l}{1+\varphi}\left(-\xi + 2\xi^2 - \xi^3 + \frac{\varphi}{2}\left(\xi + \xi^2\right)\right) \ , \tag{A-27}$$

$$h_{13} = \frac{1}{1+\varphi}\left(3\xi^2 - 2\xi^3 + \varphi\xi\right) \ , \tag{A-28}$$

$$h_{14} = \frac{l}{1+\varphi}\left(\xi^2 - \xi^3 + \frac{\varphi}{2}\left(\xi - \xi^2\right)\right) \ , \tag{A-29}$$

$$h_{21} = \frac{1}{(1+\varphi)l}\left(6\xi - 6\xi^2\right) \ , \tag{A-30}$$

$$h_{22} = \frac{1}{1+\varphi}\left(1 - 4\xi + 3\xi^2 + \varphi\left(1-\xi\right)\right) \ , \tag{A-31}$$

$$h_{23} = \frac{1}{(1+\varphi)l}\left(-6\xi + 6\xi^2\right) \ , \tag{A-32}$$

$$h_{24} = \frac{1}{1+\varphi}\left(-2\xi + 3\xi^2 + \varphi\xi\right) \ . \tag{A-33}$$

Observar que se $\varphi = 0$, as funções $h_{11}, h_{12}, h_{13}$ e $h_{14}$ serão funções de Hermite, então os elementos da matriz serão os mesmos para o modelo de Euler-Bernoulli. Esta função de forma são mostradas na Fig. A.3 para $\varphi = 10^{-4}$.

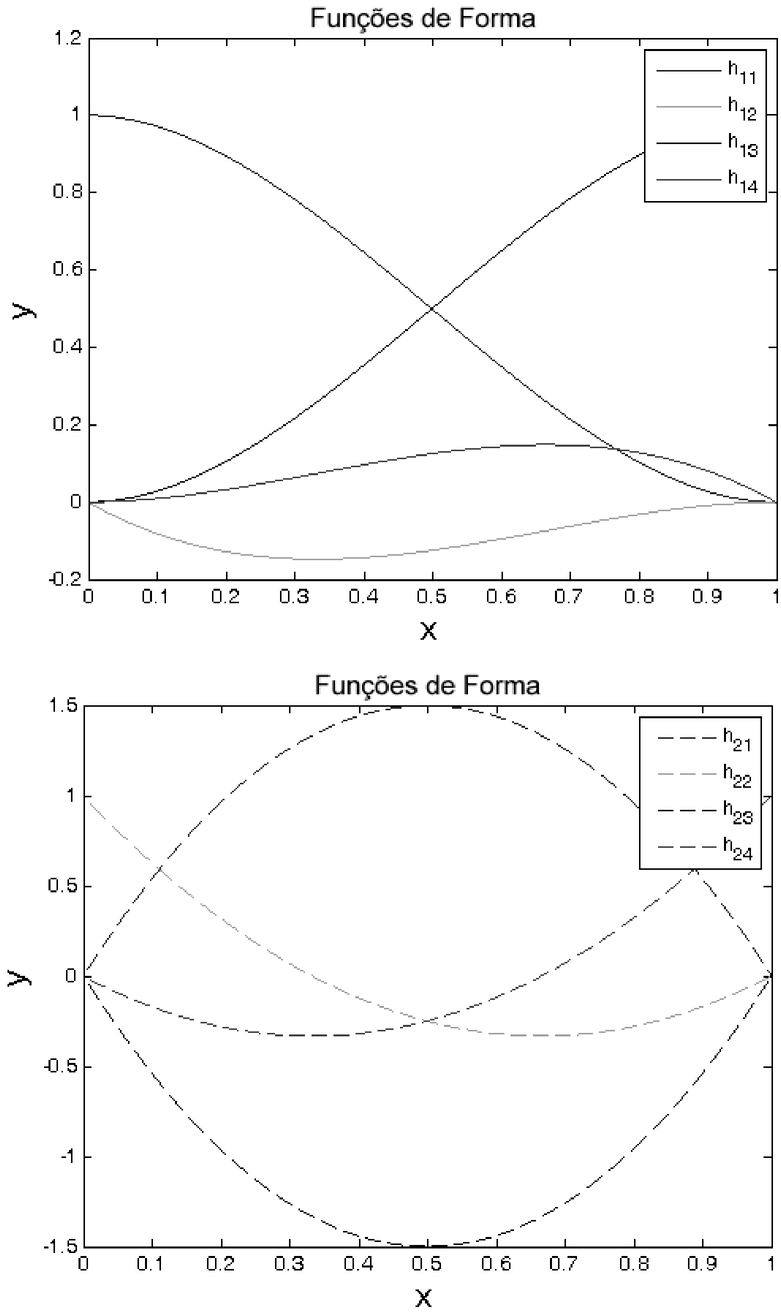


Figura A.3: Funções de forma para um elemento de viga de Timoshenko.

## A.3
## Modelo Simplificado de Rotor

O problema industrial descrito no capítulo 2 deve ser analisado de uma forma que se aplique um modelo numérico que possa modelar o problema industrial do compressor *bp*, figura 2.10. Considere-se o caso mais simples de simulação numérica, que é o modelo do rotor de Laval, sobre o que se discorrerá.
O modelo de rotor estudado, chamado de Laval em homenagem ao brilhante engenheiro sueco que o propôs ao fim do século $XIX$, é de um rotor bi-apoiado, com as seguintes características:

- Massa concentrada no impelidor;
- Eixo de massa desprezível, mas dotado de elasticidade, suposta linear, caracterizado pela rigidez $k$, que gira a uma rotação de $\omega$ em na direção $z$.
- Impelidor gira sobre seu próprio centro ($\Omega$) e orbita em relação à linha de centro dos apoios (mancais).
- O centro de massa $G$ não coincide como centro geométrico do disco $O$ (**desbalanceamento**).
- A excentricidade $e$ é o módulo do vetor $\overrightarrow{OG}$.
- $x$ e $y$ são as coordenadas do centro do disco $O$ em relação ao sistema fixo, $x - y$, com eixo $z$ passando pelo centro dos mancais .

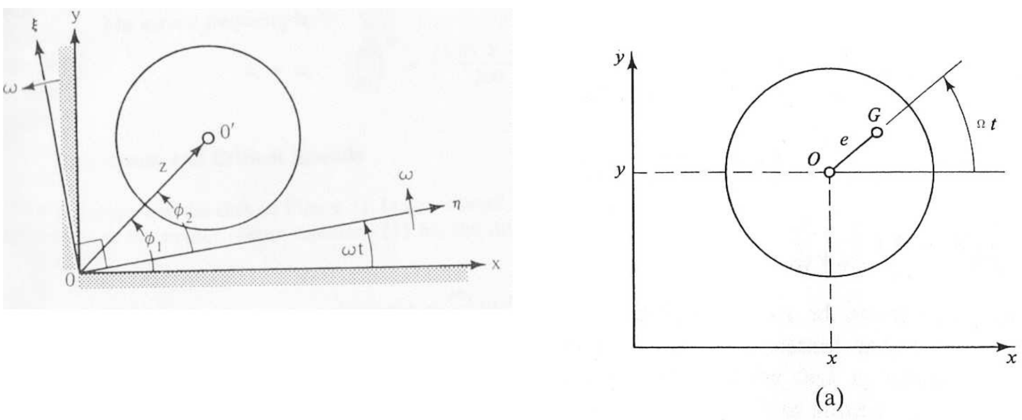


Figura A.4: Referencial Móvel $\xi \times \eta$

Considere-se inicialmente o rotor rígido, com o eixo z perpendicular ao impelidor (sem considerar o efeito giroscópico), ou seja, o movimento com apenas dois graus de liberdade.

As coordenadas do centro de massa $G$ são:

$$\begin{cases} x & + & e\cos\Omega t \\ y & + & e\sin\Omega t \end{cases}$$

Aplicando a Lei de Newton ao movimento, para $\dfrac{d\phi}{dt} = \Omega$, obtém-se:

$$\begin{cases} m\frac{d^2(x+e\cos\Omega t)}{dt^2} & + & kx & = & 0 \\ m\frac{d^2(y+e\sin\Omega t)}{dt^2} & + & ky & = & 0 \\ & & J\ddot{\phi} & = & 0 \end{cases} \tag{A-34}$$

Observa-se da equação A-34 que as equações não são acopladas e não dependem da coordenada angular $\phi$ se $\dot{\phi} = \Omega$ é constante. A euqação do movimento A-34 pode ser deduzida das equações de energia, utilizando-se a equação de Lagrange.

**A Equação de Lagrange do movimento** A-35 é dada de forma mais geral por:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_k} = Q_k, k = 1, 2, ..., n \tag{A-35}$$

e observa-se que $Q_k$ corresponde a forças generalizadas tanto conservativas quanto não-conservativas.
É comum se distinguir entre forças conservativas e não-conservativas, ou,

$$Q_k = Q_{kc} + Q_{knc}, k = 1, 2, ..., n \tag{A-36}$$

Relembrando-se que a energia potencial depende apenas das coordenadas, pode-se escrever:

$$\delta W_c = -\delta V = -\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial q_k}\delta q_k = \sum_{k=1}^{n} = Q_{kc}\delta q_k \tag{A-37}$$

de maneiras que as forças conservativas generalizadas tem a seguinte forma

$$Q_{kc} = -\frac{\partial V}{\partial q_k}, k = 1, 2, ..., n \tag{A-38}$$

Introduzindo-se a equação A-36 e a equação A-38 na equação A-35 obtém-se

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_k} + \frac{\partial V}{\partial q_k} = Q_{knc}, k = 1, 2, ..., n \tag{A-39}$$

e finalmente como as a energia potencial não depende das velocidades a equação A-39 pode ser escrita na forma:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_k} = Q_{knc}, k = 1, 2, ..., n \qquad \text{(A-40)}$$

onde $\mathbf{L} = \mathbf{T} - \mathbf{V}$ é o Lagrangiano.
Considerando-se as premissas de que no movimento não se consideram forças não-conservativas, a equação de Lagrange aplicada ao movimento do rotor de Laval A.3 rígido é dada considerando-se:

– Energia Cinética e Potencial associadas ao movimento, em relação às coordenadas do referencial estacionário, sendo $\omega$ a rotação do centro do impelidor em relação ao sistema fixo $x - y - z$:

$$\begin{cases} T = \frac{1}{2}m\left[d\frac{(x+e\cos\Omega t)}{dt}\right]^2 + \frac{1}{2}m\left[\frac{d(y+e\sin\Omega t)}{d}\right]^2 + \frac{1}{2}J\omega^2 \\ V = \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}ky^2 \end{cases}$$

Aplicando-se a Equação de Lagrange para $x, y$ e $\phi$ chega-se a (para $\dot{\phi} = \Omega$):

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}[\frac{\partial}{\partial \dot{x}}(T-V)] - \frac{\partial}{\partial x}(T-V) = m\frac{d^2(x+e\cos\Omega t)}{dt^2} + kx = 0 \\ \frac{d}{dt}[\frac{\partial}{\partial \dot{y}}(T-V)] - \frac{\partial}{\partial y}(T-V) = m\frac{d^2(y+e\sin\Omega t)}{dt^2} + ky = 0 \\ \frac{d}{dt}[\frac{\partial}{\partial \dot{\phi}}(T-V)] - \frac{\partial}{\partial \phi}(T-V) = \frac{d}{dt}[J\omega] = 0 \end{cases} \qquad \text{(A-41)}$$

As primeiras equações de A-34 e A-41 são idênticas, equanto as últimas simplesmente implica que $\omega = \Omega$, a velocidade de rotação constante. Desta forma o movimento radial do disco independe do movimento em relação ao eixo $z$, sob as premissas assumidas.

## Representação Polar e Precessão

Multiplicando-se a segunda equação de A-34 por $\imath = (-1)^{\frac{1}{2}}$ e adicionando-a à segunda, obtém-se:

$$m(\ddot{x} + \imath\ddot{y}) + k(x + \imath y) = me\Omega^2 e^{i\Omega t} \qquad \text{(A-42)}$$

Introduzindo-se $r = x + \imath y$, pode-se escrever:

$$m\ddot{r} + kr = me\Omega^2 e^{i\Omega t} \qquad \text{(A-43)}$$

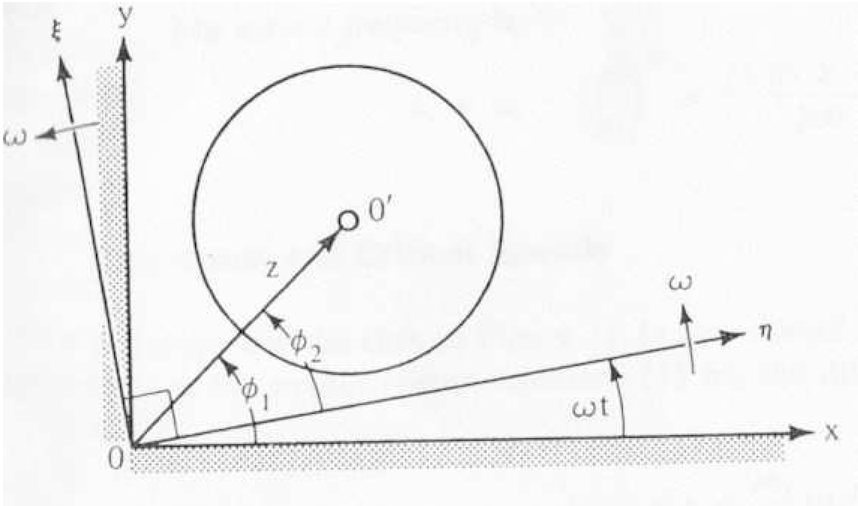


Figura A.5: Sistema de coordenadas estacionário e móvel

Para se entender o significado físico da quantidade $r$ considera-se um sistema de coordenadas $(x, \imath y)$ no plano do disco com sua origem no centro do disco na posição de equilíbrio estático. Se o centro do disco é deslocado da posição de equilíbrio de $x$ e $y$, $r = x + \imath y$, o raio $r$ representa o vetor $\overrightarrow{\mathbf{OO'}}$ da figura A.3, se se considera o pano $x - \imath y$ como o plano complexo. Uma vantagem da equação A-43 é que o número de equações que descreve o movemento é dividida por dois, mas, em contrapartida opera-se com números complexos.

Considere-se o sistema móvel $(\eta, \xi)$, figura A.3, que gira a uma rotação constante $\omega = \Omega$ em relação a $O$. Seja o numero complexo $\zeta$ a distância entre $\overrightarrow{\mathbf{OO'}}$ medida no referencial móvel, dada pelas seguintes coordenadas:

$$\zeta = \eta + \imath\xi \tag{A-44}$$

Entre $r$ e $\zeta$ existe a seguinte relação:

$$r = \zeta e^{\imath\Omega t} \tag{A-45}$$

$$\zeta = r e^{-\imath\Omega t} \tag{A-46}$$

Sendo $\mathbf{R}$ o comprimento do vetor $\overrightarrow{\mathbf{OO'}}$ suas coordenadas polares em

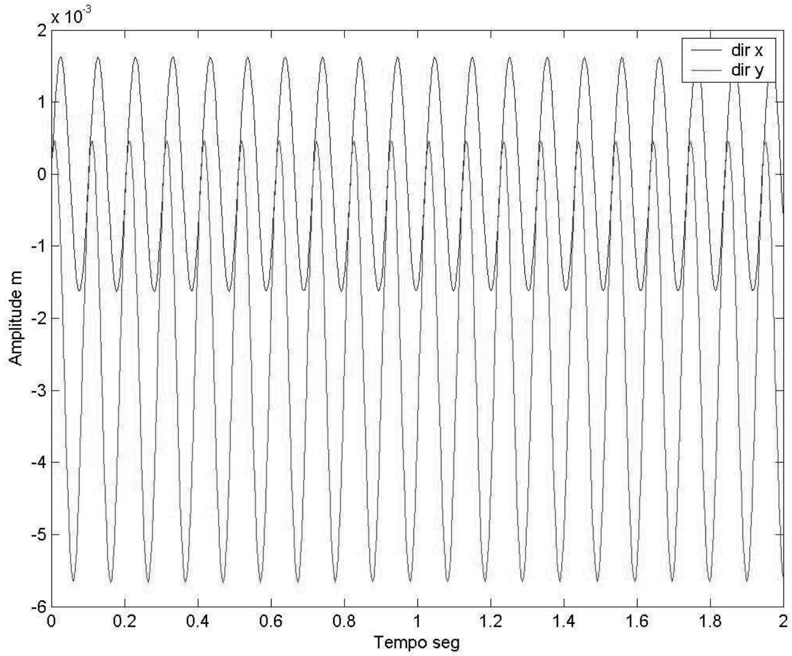


Figura A.6: Simulação do Rotor de Laval



ambos sistemas de coordenadas são:

$$r = \mathbf{R}e^{\imath\phi_1}, \zeta = \mathbf{R}e^{\imath\phi_2} \tag{A-47}$$

$$\frac{r}{\zeta} = e^{\imath(\phi_1 - \phi_2)} = e^{\imath\Omega t}. \tag{A-48}$$

Em termos do sistema móvel de coordenadas, a equação A-43 pode ser escrita como:

$$m(\ddot{\zeta} + 2\imath\Omega\dot{\zeta} - \Omega^2\zeta)e^{\imath\Omega t} + k\zeta e^{\imath\Omega t} = me\Omega^2 e^{\imath\Omega t} \tag{A-49}$$

Sabendo-se que $\sqrt{\frac{k}{m}} = \omega_n$, a primeira freqüência natural do sistema, e dividindo-se a equação A-49 por $me^{\imath\Omega t}$, obtém-se a equação do movimento no sistema de coordenadas móveis:

$$\ddot{\zeta} + 2\imath\Omega\dot{\zeta} + ({\omega^2}_n - \Omega^2)\zeta = e\Omega^2 \tag{A-50}$$

Dinâmica do rotor de ”de Laval”, sem dissipação de energia, na figura A.3 é um mero sistema massa-mola com dois graus de liberdade.

### Limitações do Modelo de Laval

- O modelo "de Laval"nem sequer representa os esforços axiais sobre mancais axial (de escora) do compressor.
- O modelo não considera a massa do eixo na dinâmica do rotor nem as variações geométricas e físicas das secções transversais ao longo do rotor.
- O modelo separa rigidez de massa;
- O problema observado não poderia sequer ser abordado no modelo simplificado "de Laval", uma vez que a posição do defeito se localizava num ponto sem massa, nem considerada na formulação do modelo.