4
Análise Modal

4.1
Introdução

Este Capítulo tem como objetivos: basicamente representar a dinâmica de modelos mecânicos lineares e ajudar a desenvolver um entendimento das técnicas de análise modal, onde a resposta total do sistema pode ser construída pela combinação de modos individuais de vibração.
Dados os três sistemas de complexidade crescente a seguir:

$$[M]u(t) + [K]u(t) = 0(t). \tag{4-1}$$

$$[M]u(t) + [G]u(t) + [K]u(t) = 0(t). \tag{4-2}$$

$$[M]u(t) + [C \ + \ G]u(t) + [K]u(t) = 0(t). \tag{4-3}$$

apresenta-se a análise modal de cada um deles.
No caso do problema industrial apresentado nesta Dissertação, a análise modal, e a dinâmica do sistema com forçamento, será baseada na equação 4-2.

A natureza do amortecimento num sistema determinará a forma de sua representação. Em estruturas levemente amortecidas, onde o amortecimento vem de perdas em juntas, por exemplo, pode-se utilizar a análise modal, permitindo-se reconstruir o problema em termos de modos individuais de vibração, com um tipo particular de amortecimento, dito proporcional. Para sistemas fortemente amortecidos, o tipo mais geral com amortecimento não-proporcional, tem-se que utilizar as equações diferenciais acopladas para solução do problema.

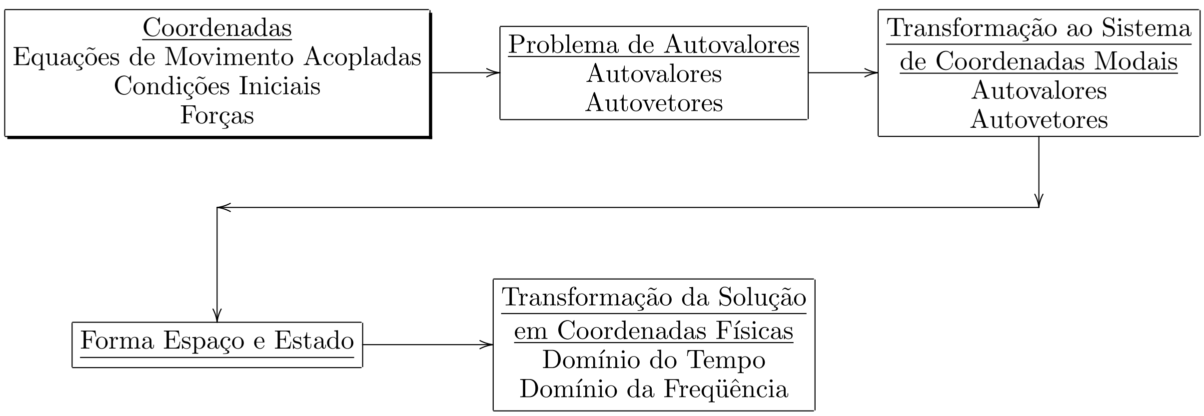
O diagrama da figura 4.1 mostra a metodologia para analisar uma estrutura levemente amortecida usando modos normais. A solução começa por se obterem as equações de movimento não-amortecido em coordenadas

físicas. O próximo passo é solucionar o problema de autovalor, gerando autovalores (freqüências naturais) e autovetores (modos de vibrar). Esta é a parte mais intuitiva do problema e permite aprofundar-se na dinâmica da estrutura pelo reconhecimento de seus modos e freqüências naturais.
Para se obterem as respostas em freqüência e no domínio do tempo faz-se necessário transformar-se o modelo das coordenadas físicas originais para um novo sistema, o modal ou sistema de coordenadas principais, operando as equações originais com a matriz de autovetores. Na matriz de coordenadas modais as equações não-amortecidas originais acopladas de movimento são transformadas para um mesmo número de equações não-acopladas de equações. Cada equação desacoplada representa um modo particular de vibração do sistema. É neste momento em que o amortecimento proporcional é aplicado. É trivial resolverem-se estas equações desacopladas para a resposta dos modos de vibração para funções de forçamento ou condições iniciais, uma vez que cada equação representa um sistema com um grau de liberdade. A resposta desejada é então trazida para o sistema de coordenadas físicas, de novo, utilizando-se a matriz de autovetores para conversão, resultando na solução em coordenadas físicas.
A seqüência da Análise Modal de um dado sistema "complicado"é:

1. transformar o sistema num sistema de coordenadas mais simples;

2. solucionar o sistema no sistema mais simples de coordenadas;

3. retornar ao sistema de coordenadas original (analogamente ao se utilizar das Transformadas de Laplace para solução de sistemas de equações diferenciais).



4.1.1
Funções de Transferência

Sistema com um grau de liberdade

Sistemas lineares de múltiplos graus de liberdade comportam-se como multiplos sistemas de um grau de liberdade. Portanto um simples exemplo de um sistema de um grau de liberdade, amortecido, pode ser extrapolado para um sistema de múltiplos graus como se vê a seguir.

A equação deste sistema é dada por:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = f \tag{4-4}$$

Tomando-se a transformada de Laplace para solucionar uma equação diferencial de segunda ordem, dadas condições iniciais:

$$\mathcal{L}\{\ddot{x}(t)\} = s^2X(s) - sx(0) - \frac{dx(0)}{ds} \tag{4-5}$$

onde $x(0)$ e $\frac{dx(0)}{ds}$ são as condições de posição e velocidade iniciais, respectivamente e Xds é a transformada de Laplace de x.

$$\mathcal{L}\{\ddot{x}(t)\} = s^2X(s) \tag{4-6}$$

A transformada de Laplace para uma equação de um grau de liberdade, equação 4-4, é dada por:

$$ms^2X(s) + csX(s) + kX(s) = F(s) \tag{4-7}$$

A função de transferência é dada por:

$$\frac{X(s)}{F(s)} = \frac{1}{ms^2 + cs + k} = \frac{\frac{1}{m}}{s^2 + \frac{c}{m}s + \frac{k}{m}} \tag{4-8}$$

A função 4-8 pode ser reescrita definindo-se:

1. $\omega_n = \frac{k}{m}$, onde ω_n é a freqüência natural do sistema conservativo associado, medida em radianos/segundo;

2. $c_{cr} = 2\sqrt{km}$, onde c_{cr} é o valor do amortecimento "crítico";

3. ζ é o coeficiente do amortecimento proporcional, dado como $\frac{C}{C_{cr}}$;

Reescrevendo a equação 4-8 com as substituições devidas chega-se a:

$$\frac{X(s)}{F(s)} = \frac{\frac{1}{m}}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \quad (4\text{-}9)$$

Substituindo-se "s" por "jω" para se calcular a resposta em freqüência, onde "j" é o operador imaginário, a equação 4-9 torna-se:

$$\frac{X(j\omega)}{F(j\omega)} = \frac{\frac{1}{m}}{(j\omega)^2 + 2\zeta\omega_n(j\omega) + \omega_n^2} =$$
$$\frac{\frac{1}{m}}{-(\omega)^2 + 2\zeta\omega_n\omega j + \omega_n^2} = \frac{\frac{1}{m\omega^2}}{-1 + \frac{2\zeta\omega_n j}{\omega} + \frac{\omega_n^2}{\omega^2}} =$$
$$\frac{\frac{1}{m\omega^2}}{(\frac{\omega_n^2}{\omega^2} - 1) + \frac{2\zeta\omega_n j}{\omega}} = \frac{\frac{1}{m\omega^2}}{[(\frac{\omega_n}{\omega})^2 - 1] + j2\zeta(\frac{\omega_n}{\omega})} \quad (4\text{-}10)$$

Observa-se que a equação 4-10 da resposta em freqüência mostra como varia $\frac{X}{F}$ em função da freqüência, ω. A razão é um número complexo como propriedades interessantes em diferentes valores de $\frac{\omega_n}{\omega}$.
A baixas freqüências relativas à freqüência de ressonância, $\omega_n^2 \gg \omega\omega_n \gg \omega^2$, a função de transferência é dada por:

$$\frac{z(j\omega)}{F(j\omega)} = \frac{\frac{1}{m}}{-(\omega)^2 + 2\zeta\omega_n\omega j + \omega_n^2} \cong \frac{\frac{1}{m}}{\omega_n^2} = \frac{1}{m\omega_n^2} = \frac{1}{m(\frac{k}{m})} = \frac{1}{k} \quad (4\text{-}11)$$

Uma vez que o valor resposta em freqüência em qualquer freqüência é um número complexo, pode-se obter a magnitude e fase.

$$\left|\frac{X(j\omega)}{F(j\omega)}\right| = \frac{1}{k}$$
$$\angle\frac{X(j\omega)}{F(j\omega)} = 0 \quad (4\text{-}12)$$

Então o ganho a baixa freqüência é constante $(\frac{1}{k})$, ou o inverso da rigidez. A fase é 0^o, porque o sinal é positivo.

A altas freqüências, $\omega^2 \gg \omega\omega_n \gg \omega_n^2$.

$$\frac{X(j\omega)}{F(j\omega)} = \frac{\dfrac{1}{m}}{-(\omega)^2 + 2\zeta\omega_n\omega j + \omega_n^2} \cong \frac{\frac{1}{m}}{-\omega^2} = \frac{-1}{m\omega^2} \tag{4-13}$$

$$\left|\frac{X(j\omega)}{F(j\omega)}\right| = \left|\frac{-1}{m\omega^2}\right| = \frac{1}{m\omega^2}$$
$$\angle\frac{X(j\omega)}{F(j\omega)} = -180^o \tag{4-14}$$

A altas freqüências o ganho é dado por $\dfrac{1}{(m\omega^2)}$ e a fase é 180^o, porque o sinal é negativo.

À freqüência de ressonância $\omega = \omega_n$, a função de transferência é dada por:

$$\frac{X(j\omega)}{F(j\omega)} = \frac{\dfrac{1}{m}}{-(\omega)^2 + 2\zeta\omega_n\omega j + \omega_n^2}$$
$$= \frac{\frac{1}{m}}{2\zeta\omega\omega_n mj} = \frac{1}{\frac{2\zeta kmjJ}{m}} = \frac{1}{2\zeta kj} = \frac{\frac{1}{k}}{2\zeta j} = \frac{\frac{-j}{k}}{2\zeta} \tag{4-15}$$

Magnitude e fase de ressonância:

$$\left|\frac{X(j\omega)}{F(j\omega)}\right| = \left|\frac{\frac{-j}{k}}{2\zeta}\right| = \frac{\frac{1}{k}}{2\zeta}$$
$$\angle\frac{X(j\omega)}{F(j\omega)} = -90^o \tag{4-16}$$

A magnitude da ressonância é o ganho a baixa freqüência, $\frac{1}{k}$, dividida por 2ζ. Desde que ζ é um número normalmente pequeno, 1% do amortecimento crítico ou 0.01, a magnitude na ressonância é amplificada. O angulo de fase na ressonância é -90^o, como na figura 4.1

A relação entre a magnitude do ângulo de fase, variando-se o coeficiente de amortecimento de 0.1 a 1.0 com passo de 0.1 é mostrado na figura 4.2.
O programa para traçagem dos gráficos das figuras 4.1 e 4.2 é desenvolvido em MATLAB®, **sdofxfer.m**, obtidos com a referência [12].
Considerando-se que $m = k = 1.0$. Estes m e k resultam num ω_n de valor

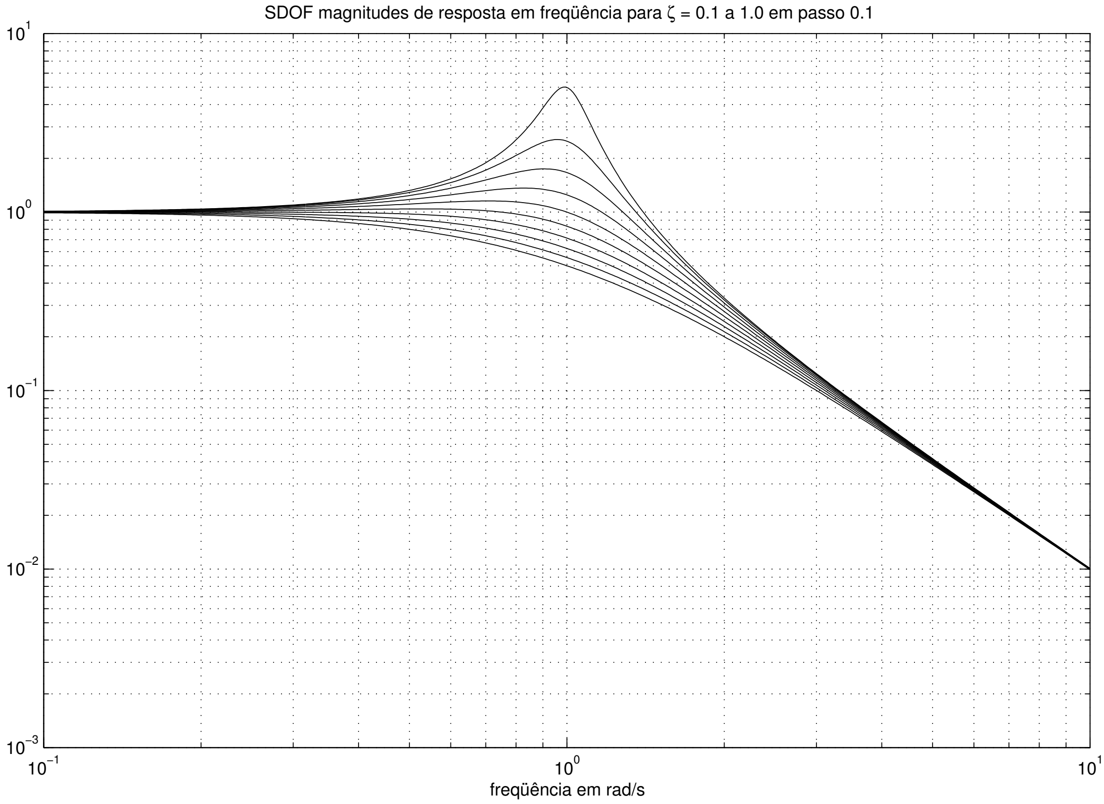


Figura 4.1: Magnitude versus Freqüência

1.0 rad/seg.

O pico de vibração na figura 4.1 ocorre na freqüência de 1.0 rad/seg. A magnitude da baixa freqüência é $\dfrac{1}{k} = 10^0 = 1$, como pode ser visto na figura 4.1. Todas as curvas dos valores de amortecimento são próximos de 1.0 a baixas freqüências.

A altas freqüências a magnitude é dada por $\dfrac{1}{(m\omega^2)}$, e, desde que $m = 1$, obtém-se a magnitude como $\dfrac{1}{\omega^2}$. Confirmando-se na figura 4.1 a freqüência a 10 rad/seg, a magnitude é $\frac{1}{100}$ ou 0.01.

Observar que a curvatura das assíntotas a baixa freqüência é zero, significando que ela não muda com a freqüência. No entanto a curvatura das assíntotas à alta freqüência é "-2", significando que para cada incremento decimal a magnitude a altas freqüências decai em duas ordem de magnitude devido ao termo ω^2 no denominador. A curvatura "-2"num gráfico log-magnitude versus log-freqüência vem da equação 4-17

$$log\,|altafrequencia| \propto log(\frac{1}{\omega^2}) = -2log\omega \tag{4-17}$$

Da figura 4.2 observa-se que na ressonância ($\omega_n = 1.0$ rad/seg) a fase para todos os valores de amortecimento é -90^o. À baixas freqüências, a fase se aproxima de 0^o e a altas freqüências a fase se aproxima de -180^o.

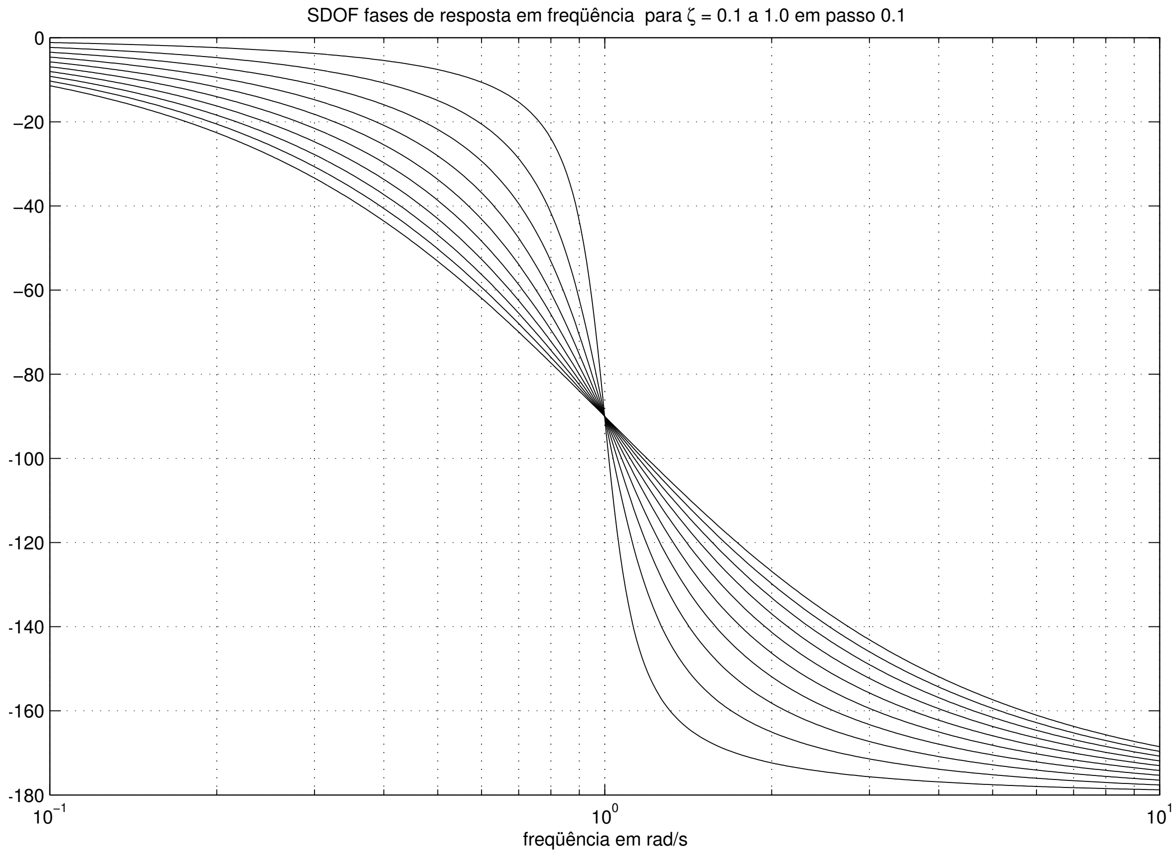


Figura 4.2: Fase versus Freqüência para Diferentes Coeficientes de Amortecimento

Locus das Raízes

É interessante obterem-se valores de pólos e zeros de uma maneira sistemática. Utilizando-se o MATLAB®, para diversos valores de amortecimento pode-se calcular pólos e zeros, utilizando-se o programa tdofpz3x3rlocus.m baseado em [12].

Traça-se o gráfico para vários valores de amortecimento de **c1** e **c2**. Valores de amortecimento nulo fornecem pólos e zeros no eixo imaginário. Os pólos são localizados a 0, 0, $\pm 1j$, $\pm 1.732j$. Os zeros são localizados a $\pm 0.62j$ e $\pm 1.62j$. Na medida em que se incrementa o amortecimento a partir do zero, os pólos e zeros (exceto os dois pólos da origem) partem para a esquerda, longe do eixo imaginário. Pólos e zeros movem-se a diferentes taxas a medida que o coeficiente de amortecimento varia. Os pólos a $\pm 1j$ e zeros $\pm 0.62j$ movem-se a esquerda menos que os pólos a $\pm 1.732j$ e os zeros a $\pm 1.62j$.

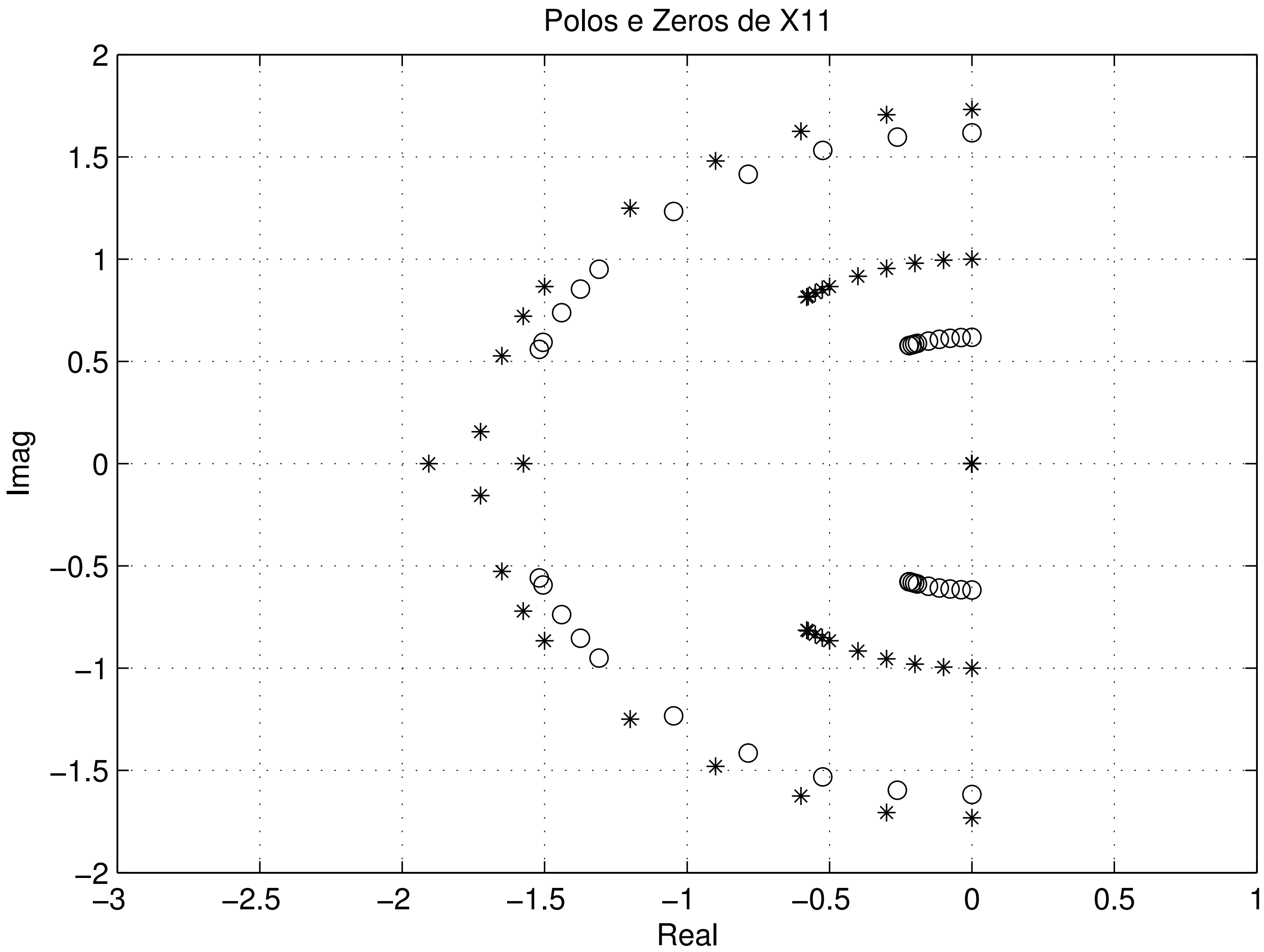


Figura 4.3: Locus de Raízes de Pólos e Zeros para Função de Transferência

4.1.2
Sistema com Três Graus de Liberdade

Para um sistema com três graus de liberdade, sistema massa -mola na horizontal, restringindo-se cada um dos outros dois graus de liberdade, montam-se as matrizes de massa, rigidez e amortecimento.
Após montarem-se as equações de movimento, passa-se do domínio do tempo para o domínio da freqüência, utilizando-se da transformada de Laplace nas equações de movimento.
O sistema de três graus de liberdade em forma matricial é escrito na forma:

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \ddot{x}_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_1 & -c_1 & 0 \\ -c_1 & (c_1+c_2) & -c_2 \\ 0 & -c_2 & c_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} +$$

$$\begin{bmatrix} k_1 & -k_1 & 0 \\ -k_1 & (k_1+k_2) & -k_2 \\ 0 & -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{bmatrix}$$

Aplicandos-se a transformada de Laplace, assumindo as condições iniciais de deslocamento e velocidade nulos, representa-se a equação matricial de movimento representadas pelos deslocamentos originais X_1, X_2 e X_3:

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s^2X_1 \\ s^2X_2 \\ s^2X_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_1 & -c_1 & 0 \\ -c_1 & (c_1+c_2) & -c_2 \\ 0 & -c_2 & c_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} sX_1 \\ sX_2 \\ sX_3 \end{bmatrix} +$$

$$\begin{bmatrix} k_1 & -k_1 & 0 \\ -k_1 & (k_1+k_2) & -k_2 \\ 0 & -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{bmatrix}$$

Rearranjando-se os termos na forma de Laplace, obtém-se:

$$\begin{bmatrix} (m_1s^2+c_1s+k_1) & (-c_1s-k_1) & 0 \\ (-c_1s-k_1) & (m_2s^2+c_1s+k_1+k_2) & (-c_2s-k_2) \\ 0 & (c_2s-k_2) & (m_3s^2+c_2s+k_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{bmatrix}$$

Desenvolvendo-se a equação no domínio da freqüência após a aplicação da transformada de Laplace chegam-se às seguintes funções de transferência:

$$\frac{X_1}{F_1} = \left\{ \begin{array}{c} s^4(m_2m_3) + s^3(m_3c_1 + m_3c_2 + m_2c_2) + s^2(c_1c_2 + m_2k_2 + m_3k_1 + m_3k_2) + \\ s(c_1k_2 + c_2k_1) + k_1k_2 \end{array} \right\} / Den$$

$$\frac{X_1}{F_2} = \{s^3(m_3c_1) + s^2(c_1c_2 + m_1k_1) + s(c_1k_2 + c_2k_1) + k_1k_2\}/Den$$

$$\frac{X_1}{F_3} = \{s^2(c_1c_2) + s(c_1k_2 + c_2k_1) + k_1k_2\}/Den$$

$$\frac{X_2}{F_1} = \{s^3(m_3c_1) + s^2(c_1c_2 + m_3k_1) + s(c_1k_2 + c_2k_1) + k_1k_2\}/Den$$

$$\frac{X_2}{F_2} = \left\{ \begin{array}{c} s^4(m_1m_3) + s^3(m_1c_2 + m_3c_1) \\ +s^2(m_1k_2 + c_1c_2 + m_3k_1) \\ +s(c_1k_2 + c_2k_1) + k_1k_2 \end{array} \right\} / Den$$

$$\frac{X_2}{F_3} = \{s^3(m_1c_2) + s^3(m_1k_2 + c_1c_2) + s(c_1k_2 + c_2k_1) + k_1k_2\}/Den$$

$$\frac{X_3}{F_1} = \{s^2(c_1c_2) + s(c_1k_2 + c_2k_1) + k_1k_2\}/Den$$

$$\frac{X_3}{F_2} = \{s^3(m_3c_1) + s^2(m_1k_2 + c_1c_2)s(c_1k_2 + c_2k_1) + k_1k_2\}/Den$$

$$\frac{X_2}{F_2} = \left\{ \begin{array}{c} s^4(m_1m_2) + s^3(m_1c_2 + m_2c_1) \\ +s^2(m_2k_1 + m_1k_2 + c_1c_2) \\ +s(c_1k_2 + c_2k_1) + k_1k_2 \end{array} \right\}/Den$$

Enquanto Den é:

$$Den = s^2 \left\{ \begin{array}{c} s^4(m_1m_2m_3) + s^3(m_2m_3c_1 + m_1m_3c_1 + m_1m_2c_2 + m_1m_3c_2) \\ +s^2(m_1m_3k_1 + m_1m_3k_2 + m_2c_1c_2 + m_3c_1c_2 + m_1c_1c_2 + k_1m_2m_3) \\ +s(m_3c_1k_2 + m_2c_2k_1) + m_1c_2k_1 + m_1c_1k_2 + m_3c_2k_1 + m_2c_1k_2) \\ +(m_1k_1k_2 + m_2k_1k_2 + m_3k_1k_2) \end{array} \right\}$$

O denominador, Den, comum à todas funções de transferência, gera a **equação característica**, $Den = 0$.
Simplificando-se o sistema tem-se:

$$\begin{aligned} m_1 = m_2 = m_3 &= m \\ c_1 = c_2 &= c \\ k_1 = k_2 &= k \end{aligned} \tag{4-18}$$

$$X_{11} = \frac{X_1}{F_1} = (m^2s^4 + 3mcs^3 + (c^2 + 3mk)s^2 + 2cks + k^2)/Den1 \tag{4-19}$$

$$X_{12} = \frac{X_1}{F_2} = (mcs^3 + (c^2 + mk)s^2 + 2cks + k^2)/Den1 \tag{4-20}$$

$$X_{13} = \frac{X_1}{F_3} = (c^2s^2 + 2cks + k^2)/Den1 \tag{4-21}$$

$$X_{21} = \frac{X_2}{F_1} = (mcs^3 + (c^2 + mk)s^2 + 2cks + k^2)/Den1 \tag{4-22}$$

$$X_{22} = \frac{X_2}{F_2} = (m^2s^4 + 2mcs^3 + (c^2 + 2mk)s^2 + 2cks + k^2)/Den1 \quad (4\text{-}23)$$

$$X_{23} = \frac{X_2}{F_3} = (mcs^3 + (c^2 + mk)s^2 + 2cks + k^2)/Den1 \quad (4\text{-}24)$$

$$X_{31} = \frac{X_3}{F_1} = (c^2s^2 + 2cks + k^2)/Den1 \quad (4\text{-}25)$$

$$X_{32} = \frac{X_3}{F_2} = (mcs^3 + (c^2 + mk)s^2 + 2cks + k^2)/Den1 \quad (4\text{-}26)$$

$$X_{33} = \frac{X_3}{F_3} = (m^2s^4 + 2mcs^3 + (c^2 + 2mk)s^2 + 2cks + k^2)/Den1 \quad (4\text{-}27)$$

onde:

$$Den1 = \{m^3s^4 + 4m^2cs^3 + (4m^2k + 3mc^2)s^2 + 6mcks + 3mk^2\}s^2 \quad (4\text{-}28)$$

4.2 Análise Modal de um Sistema de Múltiplos Graus de Liberdade Não-Amortecido

A análise modal de um sistema dinâmico de múltiplos graus de liberdade é uma extensão natural de um sistema de um grau de liberdade. Para muitos sistemas mecânicos e estruturas mecânicas, mais de uma coordenada é necessário para descrever seu movimento e vibração suficientemente. O resultado é um sistema de múltiplos graus de liberdade. Tal modelo é caracterizado pelas matrizes de massa e rigidez.

4.2.1 Modos Normais de Um Sistema de Múltiplos Graus de Liberdade Não-amortecido

A equação de movimento livre para um sistema de múltiplos graus de liberdade leva ao seguinte problema de autovalor:

$$([K] - \lambda^2[M])\Psi = 0 \quad (4\text{-}29)$$

Ambas matrizes $[M]$ e $[K]$ são simétricas. A matriz de massa é positivo-definida e a de rigidez pode ser positiva semi-definida se o sistema possui modo de vibração de corpo rígido.

A solução da equação 4-29 é composta de 'n' autovalores ω_r^2 e de 'n' autovetores $\Psi_r (r = 1, 2, ..., n)$. A raiz quadrada destes autovalores são as freqüências naturais do sistema e os autovetores, seus modos de vibrar. É claro que os modos de vibração não são únicos uma vez que os múltiplos de Ψ_r também satisfazem a equação 4-29. Os modos de vibrar Ψ_r são ditos *modos principais* ou *modos normais* do sistema. Eles também são chamados os modos *não amortecidos* por razões óbvias.

Sabe-se da Álgebra Linear que se as freqüências naturais são não-nulas e distintas, então todos os modos de vibrar são independentes. Desta forma, 'n' modos de vibrar formam uma base do espaço vetorial de dimensão 'n'. Caso algumas freqüências naturais coincidam , a independência dos correspondentes modos de vibrar se perde.

Seja um sistema massa-mola com 4 massas.

$$[M] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} Kg \tag{4-30}$$

e

$$[K] = \begin{bmatrix} 2000 & -1000 & 0 & 0 \\ -1000 & 2000 & -1000 & 0 \\ 0 & -1000 & 2000 & -1000 \\ 0 & 0 & -1000 & 2000 \end{bmatrix} N/m \tag{4-31}$$

Uma solução da equação 4-29 produz os seguintes autovalores e autovetores os quais mostram as freqüências naturais e os modos de vibrar do sistema:

$$\lambda_1^2 = 381.987(rad/s)^2 \; \lambda_2^2 = 1381.97(rad/s)^2$$
$$\lambda_3^2 = 2618.03(rad/s)^2 \; \lambda_4^2 = 3618.03(rad/s)^2$$

e

$$\Psi_1 = \begin{Bmatrix} 0.37363 \\ 0.60455 \\ 0.60455 \\ 0.37363 \end{Bmatrix} \Psi_2 = \begin{Bmatrix} -0.36180 \\ -0.22361 \\ 0.22361 \\ 0.36180 \end{Bmatrix}$$

$$\Psi_3 = \begin{Bmatrix} -0.44721 \\ 0.27639 \\ 0.27639 \\ -0.44721 \end{Bmatrix} \Psi_4 = \begin{Bmatrix} -0.82706 \\ 1.33821 \\ -1.33821 \\ 0.82706 \end{Bmatrix} \tag{4-32}$$

Normalmente em análise modal representam-se os autovalores e autovetores em forma de matrizes de maneira que:

$$[\lambda_r^2] = \begin{bmatrix} 381.966 & & & \\ & 1381.97 & & \\ & & 2618.03 & \\ & & & 3618.03 \end{bmatrix} (rad/s)^2 \tag{4-33}$$

e

$$[\Psi] = \begin{bmatrix} 0.37363 & 0.60455 & 0.60455 & 0.37363 \\ -0.36180 & -0.22361 & 0.22361 & 0.36180 \\ -0.44721 & 0.27639 & 0.27639 & -0.44721 \\ -0.82706 & 1.33821 & -1.33821 & 0.82706 \end{bmatrix} \tag{4-34}$$

Ou seja

$$[\lambda_r^2] = \begin{bmatrix} \omega_1^2 & & & \\ & \omega_2^2 & & \\ & & \omega_3^2 & \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ & & & \omega_n^2 \end{bmatrix} (rad/s)^2 \tag{4-35}$$

e

$$[\Psi] = \begin{bmatrix} \Psi_1 & \Psi_2 & \Psi_3 & \dots & \Psi_n \end{bmatrix} \tag{4-36}$$

$[\lambda_r^2]$ é dita de matriz espectral e $[\Psi]$ é dita matriz modal.

Com as equações 4-35 e 4-36, a equação 4-29 pode ser escrita na forma:

$$[K][\Psi] = [M][\Psi][\omega_r^2] \tag{4-37}$$

Verifica-se o seguinte do exemplo numérico:

$$[K] = \begin{bmatrix} 2000 & -1000 & 0 & 0 \\ -1000 & 2000 & -1000 & 0 \\ 0 & -1000 & 2000 & -1000 \\ 0 & 0 & -1000 & 2000 \end{bmatrix} N/m \times \begin{bmatrix} 0.37363 & 0.60455 & 0.60455 & 0.37363 \\ -0.36180 & -0.22361 & 0.22361 & 0.36180 \\ -0.44721 & 0.27639 & 0.27639 & -0.44721 \\ -0.82706 & 1.33821 & -1.33821 & 0.82706 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.37363 & 0.60455 & 0.60455 & 0.37363 \\ -0.36180 & -0.22361 & 0.22361 & 0.36180 \\ -0.44721 & 0.27639 & 0.27639 & -0.44721 \\ -0.82706 & 1.33821 & -1.33821 & 0.82706 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 381.966 & & & \\ & 1381.97 & & \\ & & 2618.03 & \\ & & & 3618.03 \end{bmatrix} (rad/s)^2 \quad (4\text{-}38)$$

Ortogonalidade de um Sistema Não-amortecido de Múltiplos Graus de Liberdade

As propriedades de ortogonalidade de um sistema não-amortecido de múltiplos graus de liberdade são manifestas entre o seu modelo espacial e o seu modelo modal. Considere o r^{esimo} e s^{esimo} modo do sistema. A equação 4-29 torna-se:

$$([K] - \omega_r^2[M])\Psi_r = 0 \quad (4\text{-}39)$$

e

$$([K] - \omega_s^2[M])\Psi_s = 0 \quad (4\text{-}40)$$

Premultiplicando-se 4-40 por Ψ_r^T dá:

$$\Psi_r^T([K] - \omega_s^2[M])\Psi_s = 0 \quad (4\text{-}41)$$

Transponde-se a equação 4-39 e pós-multiplicando-a por Ψ_s, dá:

$$\Psi_r^T([K] - \omega_r^2[M])\Psi_s = 0 \quad (4\text{-}42)$$

Subtraindo-se as equações 4-41 e 4-42 obtém-se:

$$(\omega_s^2 - \omega_r^2)\Psi_r^T[M]\Psi_s = 0 \quad (4\text{-}43)$$

Desde que $\omega_s^2 \neq \omega_r^2$, a equação 4-43 mostra que, para $r \neq s$

$$\Psi_r^T[M]\Psi_s = 0 \quad (4\text{-}44)$$

Substituindo-se a equação 4-44 na equação 4-42, dá, para $r \neq s$:

$$\Psi_r^T[K]\Psi_s = 0 \quad (4\text{-}45)$$

Com as equações 4-44 e 4-45 significa que os modos de vibrar são ortogonais entre si com respeito às matrizes $[M]$ e $[K]$. Pre-multiplicando-se a equação 4-39 por Ψ_r^T, obtém-se:

$$\Psi_r^T[K]\Psi_s = \omega_r^2\Psi_r^T[K]\Psi_r \; (r = 1, 2, ..., n) \tag{4-46}$$

Sejam:

$$\Psi_r^T[M]\Psi_r = m_r \tag{4-47}$$

$$\Psi_r^T[K]\Psi_r = k_s \tag{4-48}$$

$$\omega_r^2 = \frac{k_r}{m_r} \; (r = 1, 2, ..., n) \tag{4-49}$$

Chamam-se m_r e k_r de *massa modal* e *rigidez modal*, ou *massa generalizada* e *rigidez generalizada* do, r^{esimo} modo, porém não têm as mesmas unidades de massa e rigidez.

O resultado das equações 4-39 a 4-48 dizem que os modos de vibrar de um sistema não-amortecido de múltiplos graus de liberdade com freqüências naturais distintas são ortogonais entre si com respeito a matriz de massa e a matriz de rigidez. Isto é conhecido como **princípio da ortogonalidade**. Na forma matricial este princípio pode ser escrito mais sucintamente na forma:

$$\Psi^T[M]\Psi = [m_i] = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & m_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & m_n \end{bmatrix} \tag{4-50}$$

$$\Psi^T[K]\Psi = [k_i] = \begin{bmatrix} k_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & k_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & k_n \end{bmatrix} \tag{4-51}$$

e

$$[\omega_r^2] = [k_i][m_i]^{-1} \tag{4-52}$$

A matriz $[m_i]$ é referida como a matriz de massa modal, $[k_i]$ como a matriz de rigidez modal. Nelas, os elementos diagonais $[m_i]$ são as massas do i^{esimo} modo e $[k_i]$ a rigidez modal deste modo.

Desde que 'n' modos de vibrar de um sistema de múltiplos graus de liberdade não-amortecido conjuntamente formam a base para um espaço vetorial de dimensão 'n', pode-se afirmar que a vibração livre do sistema consiste na combinação linear de todos os modos. A equação de movimento do sistema converte-se num problema de autovalor.

$$([K] - \lambda^2[M])X = 0 \tag{4-53}$$

Assim tem-se:

$$X = [\Psi]Y \tag{4-54}$$

A equação 4-53 se torna:

$$([K] - \lambda^2[M])[\Psi]Y = 0 \tag{4-55}$$

Premultiplicando-se a equação 4-55 por $[\Psi]^T$ e usando-se o princípio da ortogonalidade, a equação se transforma em:

$$([k_i] - \lambda^2[m_i])Y = 0 \tag{4-56}$$

Desta forma, descobre-se que os modos de vibração podem diagonalizar a equação matricial de movimento e desacoplar as 'n' equação acopladas em 'n' equações independentes. Isto significa que um sistema de múlitplos graus de liberdade agora efetivamente se transforma num conjunto de sistemas de um grau de liberdade.

O desacoplamento não só permite uma conveniente análise numérica, como também oferece a interpretação física de seu comportamento modal.

4.2.2 Resposta em Freqüência de Um Sistema Não-amortecido com Múltiplos Graus de Liberdade

Matriz de Rigidez Dinâmica e Matriz de Receptância

O sistema de múltiplos graus de liberdade com forçamento tem a seguinte equação de movimento:

$$[M]\ddot{x}(t) + [K]x(t) = f(t) \tag{4-57}$$

Na equação 4-57 $f(t)$ é um vetor de força $n \times 1$ de 'n' forças externas. Se estas forças são harmônicas, com a mesma freqüência e fase (assume-se fase zero), então:

$$f(t) = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ \dots \\ \dots \\ F_n \end{bmatrix} \sin \omega t \quad (4\text{-}58)$$

Na equação 4-58 F_r $(r = 1, 2, ..., n)$ são as amplitudes das forças harmônicas. Estas são grandezas reais.
Seja uma barra engastada exccitada por um conjunto de forças externas.
O sistema vibrará harmonicamente. Os vetores de aceleração e deslocamento podem ser expressos como:

$$x(t) = \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \dots \\ \dots \\ X_n \end{Bmatrix} \sin \omega t = X \sin \omega t \quad (4\text{-}59)$$

e

$$\ddot{x}(t) = -\omega^2 \begin{Bmatrix} \ddot{X}_1 \\ \ddot{X}_2 \\ \dots \\ \dots \\ \ddot{X}_n \end{Bmatrix} \sin \omega t = -\omega^2 \ddot{X} \sin \omega t \quad (4\text{-}60)$$

Susbstituindo-se as equações 4-59 e 4-60 na equação 4-58, tem-se:

$$-\omega^2 [M] X \sin \omega t + [K] X \sin \omega t = F \sin \omega t \quad (4\text{-}61)$$

ou

$$([K] - \omega^2 [M]) X = F \quad (4\text{-}62)$$

A matriz $([K] - \omega^2[M])$ é conhecida como *matriz de rigidez dinâmica* de um sistema de múltiplos graus de liberdade não-amortecido (e possui unidades de rigidez), e é denotada por $[Z(\omega)]$, isto é:

$$[Z(\omega)] = [K] - \omega^2 [M] \quad (4\text{-}63)$$

e $z_{ij}(\omega) = k_{ij} - \omega^2 m_{ij}$. Então a equação 4-62 pode ser escrita como:

$$[Z(\omega)] X = F \quad (4\text{-}64)$$

Caso a matriz $[Z(\omega)]$ seja não-singular (o que é verdade a menos que ω seja igual a uma das freqüências naturais), então a amplitude da resposta do sistema pode ser escrita como:

$$X = [Z(\omega)]^{-1} F \tag{4-65}$$

O inverso da matriz $[Z(\omega)]$ é chamada de *matriz de receptância FRF* do sistema e é denotada por $[\alpha(\omega)]$, isto é:

$$[\alpha(\omega)] = ([K] - \omega^2 [M])^{-1} = \begin{bmatrix} \alpha_{11}(\omega) & \alpha_{12}(\omega) & \dots & \alpha_{1n}(\omega) \\ \alpha_{21}(\omega) & \alpha_{22}(\omega) & \dots & \alpha_{2n}(\omega) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{n1}(\omega) & \alpha_{n2}(\omega) & \dots & \alpha_{nn}(\omega) \end{bmatrix} \tag{4-66}$$

A equação 4-65 pode ser escrita como:

$$X = [\alpha(\omega)] F \tag{4-67}$$

A matriz de receptância é simétrica, porque a matriz de rigidez dinâmica é simétrica. A propriedade de simetria manisfesta a natureza recíproca de um sistema de múltiplos graus de liberdade em relação às suas respostas de vibração. Assim, uma resposta na coordenada 'i' devido a uma força aplicada na coordenada 'j' é a mesma resposta na coordenada 'j' devido à força aplicada na coordenada 'i. Quando a resposta e excitação coincidem num mesmo ponto ($i = j$), a Função Resposta em Freqüência (FRF) é referida como um *ponto FRF*. De outra forma é chamada *transferência em FRF*.
É importante saber que, embora derivada da vibração de um forçamento, as receptâncias FRF refletem a propriedade de vibração linear de um sistema, similar aos das freqüências naturais e dos modos de vibração do sistema. Por isto, elas não dependem das forças externas. Esta dependência só ocorre se o sistema for não-linear.

Interpretação Física da Receptância FRF

O principal significado da receptância FRF num sistema de múltiplos graus de liberdade não é tão óbvio como num sistema de um grau de liberdade. No entanto, ela existe para cada função de receptância na matriz $[\alpha(\omega)]$.

Seja a amplitude de resposta na coordenada 'i', a equação 4-67 pode ser reduzida a:

$$X_i = \alpha(\omega_{i1})F_1 + \alpha(\omega_{i2})F_2 + \ldots + \alpha(\omega_{in})F_n \tag{4-68}$$

Caso apenas uma força seja aplicada ao sistema, por exemplo F_j, então a equação 4-68 se reduz a:

$$\alpha(\omega_{ij}) = \frac{X_i}{F_j}\,(F_r = 0,\; r = 1, 2, ..., n\; e\; r \neq j) \tag{4-69}$$

Isto sugere que o ij^{esimo} elemento na matriz $[\alpha(\omega)]$ é a função resposta em freqüência quando o sistema tem apenas uma força de entrada aplicada à coordenada 'j' e a resposta é medida na coordenada 'i'. Esta é a interpretação física da receptância FRF para um sistema com múltiplos graus de liberdade.

Se houver uma força adicional, (por exemplo F_r e $r \neq j$), aplicada ao sistema, então a razão $\frac{X_i}{F_j}$ não dará aa receptância FRF $\alpha(\omega)_{ij}$, pois, neste caso:

$$\frac{X_i}{F_j} = \alpha(\omega)_{ij} + \alpha(\omega)_{ir}\frac{F_r}{F_j} \tag{4-70}$$

As FRF de mobilidade e acelerância de um sistema de múltiplos graus de liberdade derivam-se da receptância. Então, se a matriz FRF de acelerância é denotada por $[A(\omega)]$ e mobilidade por $[Y(\omega)]$, então se tem:

$$[Y(\omega)] = -j\omega[\alpha(\omega)] \tag{4-71}$$

e

$$[A(\omega)] = -\omega^2[\alpha(\omega)] \tag{4-72}$$

4.2.3 Gráfico de FRF para Sistema de Múltiplos Graus de Liberdade Não-amortecido

A FRF de um sistema de múltiplos graus de liberdade não-amortecido pode ser mostrado de diferentes formas. Uma seleção apropriada de gráficos pode dar ênfase em alguns aspectos que se queiram chamar a atenção na FRF. Gráfico de magnitude, gráficos de magnitude log-log e da inversa da FRF são várias formas usuais de se mostrar uma FRF.

O gráfico de magnitude de uma FRF pode mostrar magnitude de uma FRF contra a freqüência em escala linear. Por exemplo pode-se mostrar α_{11} de um sistema de 4 graus de liberdade. A magnitude do gráfico mostra claramente

as ressonâncias. No entanto detalhes da curva são ofuscados por causa da proeminência dos picos de ressonância. Em particular, características como anti-ressonâncias são visíveis.
Mudar a escala do gráfico de linear para logarítmica é uma possibilidade de melhor visualizar características do gráfico de FRF. Na prática é mais conveniente utilizar decibéis que qnado se refere a uma quantidade unitária de FRF. No entanto a receptância de um sistema de 4 graus de liberdade se traçado em escala dB, torna-se uma curva mostrada em gráfico. A comparação entre as curvas de receptância em escala linear e em dB mostra que a vantagem de se usar a escala dB onde se vê claramente as anti-ressonâncias. No gráfico log-log também se vêm anti-ressonâncias e se revelam as propriedades assintóticas de uma FRF.
Uma FRF pode também ser representada em forma inversa, em escala linear e em dB. Aparentemente a inversa de uma FRF ajuda a expor as vizinhanças das anti-ressonâncias e a mínima de uma FRF. No entano seu real significado recai sobre a extração dos dados modais.

4.2.4
Modos de Massa-normalizada e Modelo Modal de um Sistema de Múltiplos Graus de Liberdade Não-amortecido

Modos de vibrar de um sistema são únicos desde que múltiplos dos mesmo sejam igualmente válidos. Modos de vibrar nomalizados pela massa são representações particulares dos modos de vibrar. Eles são importantes no desenvolvimento subseqüente de uma teoria de análise modal, especialmente quando aplicado à analise modal experimental.
Um modo de vibar massa-normalizado é um modo normaizado usando a massa modal. Desde que $\Psi_r^T[M]\Psi_r = m_r\,(r = 1, 2, ..., n)$ os modos de vibrar Ψ_r podem ser normalizados da seguinte forma:

$$\phi_r = \frac{1}{\sqrt{m_r}}\Psi_r\;(r = 1, 2, ..., n) \qquad (4\text{-}73)$$

Na equação 4-73 ϕ_r é chamado de *modo de vibrar massa-normalizado* do sistema. A equação 4-73 também pode ser escrita na forma:

$$[\Phi] = [\Psi][m_i]^{\frac{-1}{2}} \qquad (4\text{-}74)$$

Desta forma pode-se verificar que usando-se os modos de vibrar massa-normalizados, as equações 4-40 e 4-41 se tornam:

$$[\Phi]^T[M][\Phi] = [I] \tag{4-75}$$

e

$$[\Phi]^T[K][\Phi] = [\omega_r^2] \tag{4-76}$$

Matrizes de modo de vibrar massa-normalizadas $[\Phi]$ são *únicas* para um sistema de múltipos graus de liberdade. A importância dos modo de vibrar massa-normalizados recai no entanto no fato que na função resposta em freqüência de um sistema de múltiplos graus de liberdade não-amortecido pode ser expressa em termos de modos de vibrar massa-normalizados e das freqüências naturais. Tal expressão de uma FRF expressa a essência da análise modal.
As matrizes $[\omega_r^2]$ e $[\Phi]$ de um sistema com múltilos graus de liberdadeconstitue seu modelo modaldo deste sistema. Este modelo pode ser derivado de um modelo espacial de um sistema o qual possui é aracterizado por matrizes $[M]$ e $[K]$. O modelo de resposta do sistema contém suas FRF.

4.2.5
Funções de Resposta em Freqüência e o Modelo Modal

Decomposição FRF Usando-se Dados Modais

Apesar da matriz de receptância FRF estar definida na equação 4-66, a derivação da matriz por esta equação pode ser uma tarefa demorada uma vez que para cada freqüência, uma matriz de rgidez dinâmica $n \times n$ tem que ser invertida. No entanto, valendo-se do princípio da ortogonalidade de um sistema de múltplos graus de liberdade, a matriz de receptância pode ser derivada muito mais facilmente das matrizes de freqüências naturais e de modos de vibrar. Começando-se com a equação 4-66, leva-se a:

$$[\Phi]^T[K] - \omega^2[M][\Phi] = [\Phi]^T[\alpha(\omega)]^{-1}[\Phi] \tag{4-77}$$

ou

$$[(\omega_r^2 - \omega^2)] = [\Phi]^T[\alpha(\omega)]^{-1}[\Phi] \tag{4-78}$$

isto é

$$[\alpha(\omega)] = [\Phi][(\omega_r^2 - \omega^2)]^{-1}[\Phi]^T \tag{4-79}$$

Pode-se observar que $[\alpha(\omega)]$ é simétrica, o que indica um princípio de reciprocidade.

Para a receptância de um grau de liberdade FRF $\alpha_{jk}(\omega)$, a equação 4-79 também pode ser escrita como:

$$\alpha_{jk}(\omega) = \frac{\phi_{j1}\phi_{k1}}{\omega_1^2-\omega^2}+\frac{\phi_{j2}\phi_{k2}}{\omega_2^2-\omega^2}+\ldots+\frac{\phi_{jn}\phi_{kn}}{\omega_n^2-\omega^2} = \phi_{j1}phi_{k1}\ \phi_{j2}\phi_{k2}\ \ldots\ \phi_{jn}\phi_{kn} \left\{ \begin{array}{c} \frac{1}{\omega_1^2-\omega^2} \\ \frac{1}{\omega_2^2-\omega^2} \\ \ldots \\ \frac{1}{\omega_n^2-\omega^2} \end{array} \right\} \tag{4-80}$$

A equação 4-80 é a essência da análise modal. Expressando-se a FRF pelos dados modais, torna-se clara a contribuição de cada modo na FRF.

4.3 Análise Modal de Um Sistema com Múltiplos Graus de Liberdade Amortecido

A teoria da análise modal para sistemas não amortecidos se aplica quando se considera que o amortecimento é negligenciável. A presença de amortecimento não muda o aspecto da teoria aplicada no caso não-amortecido, no entanto um tratamento matemático diferenciado deve ser feito para se extender a análise modal ao caso de sistemas amortecidos. Os dois principais modelos de análise modal em sistemas de múltiplos raus de liberdade são o modelo do amortecimento viscoso e o modelo do amortecimento estrutural. A distribuição do amortecimento é um aspecto importante do modelo assim como a sua magnitude.

As equações acopladas de movimento para um sistema não-amortecido podem ser desacopladas usando-se o princípio da ortogonalidade. No entanto analisar individualmente cada modo é conveniente. Quando o amortecimento é considerado no modelo, há uma maior dificuldade em desacoplar as equações ou até mesmo pode ser impossível fazê-lo. Por isso o modelo de sistemas de múltiplos graus de liberdade com amortecimento necessita de um tratamento matemático diferente.

Lidar com sistemas dinâmicos com múltiplos graus de liberdade amortecidos ajuda a delinear uma comparação entre seu tratamento e tratamento dispensado a sistemas de um grau de liberade.

4.3.1 Modelos de Amortecimento Proporcional

Um modelo de amortecimento proporcional e o primeiro modelo analítico usado para estudar o amortecimento para um sistema de múlitplos graus de liberdade. A menos das propriedades de massa e de rigidez, o amortecimento normalmente não pode ser modelado, o que gera uma grande dificuldade na análise de sistemas de múltiplos graus de liberdade amortecido. A proposição do amortecimento proporcional permite levar adiante a análise.

O amortecimento proporcional encontra significativas aplicações em análise por elementos finitos onde o amorecimento é necessário a ser incorporado a fim de representar o sistema de forma mais próxima a realidade e predizer seu comportamento. Na teoria da análise modal, a importância do amortecimento proporcional permite modos de vibrar idênticos aos do modo não-amortecido.

Inicia-se a análise com um sistema sem forçamento. Se a distribuição do amortecimento do sistema com 'n' graus de liberdade com amortecimento viscoso é denotado pela matriz $[C]$, a equação matricial do movimento do sistema é dada por:

$$[M][\ddot{x}] + [C][\dot{x}] + [K][x] = 0 \tag{4-81}$$

Na equação 4-81 $[C]$ é positivo-definida ou positiva semi-definida. Diferentemente do caso não amortecido, não há um conjunto de coordendas principais, os quais desacoplam a equação 4-81. Em particular caso se usem os modos de vibração $[\Phi]$, então ambas as matrizes de massa $[M]$ e de rigidez $[K]$ podem ser diagonalizadas. Não ocorrendo com a matriz de amortecimento $[C]$, deixando a equação ainda acoplada. A condição especial de distribuição de amortecimento que permite a diagonalização da matriz $[C]$, assim como as matrizes $[K]$ e $[M]$ é o amortecimento proporcional.

O modelo de amortecimento proporcional representou uma significativa contribuição à análise modal. Sem a necessidade de um tratamento matemático sofisticado, uma estrutura considerada com amortecimento proporcioanl usando-se a teoria de um sistema não-amortecido com múltiplos graus de liberdade.

A proposta de amortecimento proporcional veio muito antes do estudo da análise modal. Rayleigh indicou em seu trabalho *A Teoria do Som*, publicado inicialmente em 1845, que se o mortecimento viscoso $[C]$ for proporcional à massa e à rigidez (ou se as forças de amortecimento forem proporcionais às energias cinética e potencial do sistema), então poderia se escrever:

$$[C] = \alpha[M] + \beta[K] \tag{4-82}$$

onde α e β são constantes reais e positivas. A equação 4-81 pode então ser desacoplada assim como a equação matricial de um sistema não-amortecido. A substituição da equação 4-82 na equação 4-81 leva a:

$$[M]\ddot{x} + (\alpha[M] + \beta[K])\dot{x} + [K]x = 0 \tag{4-83}$$

Repetindo-se o processo de desacoplamento para o caso não-amortecido usando a matriz de modos de vibrar $[\Phi]$ (obtida considerando-se $[C] = [0]$ da equação 4-81) levará às seguintes equações desacopladas:

$$[m_r]\ddot{x}_p + (\alpha[m_r] + \beta[k_r])\dot{x}_p + [k_r]x_p = 0 \tag{4-84}$$

ou

$$[m_r]\ddot{x}_p + [c_r]\dot{x}_p + [k_r]x_p = 0 \tag{4-85}$$

onde a matriz $[c_r]$ é chamada de *matriz de amortecimento modal* ou *matriz de amortecimento generalizada*. Obviamente a matriz dos modos de vibrar não-amortecidos $[\Phi]$ pode diagonalizar a matriz de amortecimento proporcional assim como as matrizes de massa e rigidez. Portanto $[\Phi]$ (que é uma matriz real), é também a matriz dos modos de vibrar para o sistema com modelo de amortecimento viscoso proporcional. Para a análise modal, esta é a característica mais importante para um modelo de amortecimento proporcional.

A equação 4-85 consiste de n equações desacopladas. As freqüências naturais amortecidas para o r^{esimo} modo, ω_r pode ser estimada por:

$$\underline{\omega_r} = \omega_r\sqrt{1-\zeta_r^2} \tag{4-86}$$

$$\zeta_r = \frac{\alpha}{2\omega_r} + \frac{\beta\omega_r}{2} \tag{4-87}$$

ζ_r é a razão ou taxa de amortecimento para o modo r. A equação 4-87 mostra que o coeficiente de amortecimento com amortecimento viscoso proporcional é diferente para cada modo.

O amortecimento proporcional definido na equação 4-82 não é o único modelo de amortecimento que facilita o desacoplamento do sistema. Uma expressão mais geral para o modelo de amortecimento é dada por:

$$[K][M]^{-1}[C] = [C][M]^{-1}[K] \tag{4-88}$$

Isto pode ser obtido supondo-se que $[\Psi]^T[C][\Psi]$ é uma matriz diagonal. Dado isto, segue-se que: $[\Psi]^T[C][\Psi][m_r]^{-1}[k_r] = [k_r][m_r][\Psi]^T[C][\Psi]$. Usando-se as equações 4-50 e 4-51, esta equação pode ser transformada na equação 4-88. O modelo de amortecimento estrutural é usado também na análise de um sistema com múltiplos graus de liberdade. A equação de movimento com 'n' graus de liberdade com amortecimento estrutural é dada por:

$$[M]\ddot{x} + [K]x + j[H]x = 0 \tag{4-89}$$

onde $[H]$ é a matriz de amortecimento estrutural e $\jmath$ é a unidade imaginária. Se a mtariz de amortecimento $[H]$ é proporcional às matrizes de massa e rigidez, então, pode-se escrever:

$$[H] = \mu[M] + \nu[K] \tag{4-90}$$

sendo ambos μ e ν constantes reais positivas. Pode-se achar que como no caso de amortecimento viscoso, a matriz de modos do sistema com amortecimento proporcional estrutural seja idêntica para ao modo não amortecido do sistema. As freqüências naturais do sistema são dadas por:

$$\lambda_r^2 = \omega_r^2(1 + \jmath\eta_r) \tag{4-91}$$

também

$$\eta_r = \nu + \frac{\mu}{\omega_r^2} \tag{4-92}$$

Aqui, η_r é definida como o fator de perda do amortecimento para o r^{esimo} modo de vibrar. A equação 4-92 mostra que o fator de perda de amortecimento é diferente para cada modo. Se a matriz de amortecimento é apenas proporcional à matriz de rigidez ($\mu = 0$), então o fator de perda de amortecimento para todos os modos será igual à constante ν.

4.3.2 Modelo de Amortecimento Viscoso Não-proporcional

Quando o amortecimento viscoso de um modelo com 'n' graus de liberdade é não-proporcional a solução da equação 4-87 é da forma:

$$x(t) = Xe^{st} \tag{4-93}$$

onde s é o operador de Laplace e $[X]$ o vetor complexo para amplitudes de deslocamento. Então a equação 4-87 se torna:

$$(s^2[M] + s[C] + [K])[X] = 0 \tag{4-94}$$

Este é um problema de autovalor de ordem superior. A solução deste problema recai numa abordagem de espaços de estados. Esta abordagem intriduz um novo vetor de deslocamento definido como:

$$y = \left\{ \begin{array}{c} x \\ \dot{x} \end{array} \right\}_{2n\times 1} \tag{4-95}$$

Com este novo vetor, a equação 4-87 pode ser transformada numa nova equação matricial a qual é o dobro em tamanho:

$$[[C] : [M]]\dot{y} + [[K] : [0]]y = 0 \tag{4-96}$$

Juntamente com a seguinte identidade

$$[[M] : [0]]\dot{y} + [[0] : [-M]]y = 0 \tag{4-97}$$

a equação 4-87 se transfoma em:

$$\left[\begin{array}{cc} C & M \\ M & 0 \end{array} \right]_{2n\times 2n} \dot{y} + \left[\begin{array}{cc} K & 0 \\ 0 & -M \end{array} \right]_{2n\times 2n} y = 0 \tag{4-98}$$

ou

$$[A]\dot{y} + [B]y = 0 \tag{4-99}$$

A equação 4-99 é um problema de autovalor normal e sua soluição consiste de autovalores complexos de dimensão $2n$ correspondendo a autovetores complexos θ_r (também em pares conjugados). Eles satisfazem a:

$$[\theta]^T[A][\theta] = [a_i] \tag{4-100}$$

$$[\theta]^T[B][\theta] = [b_i][b_i][a_i]^{-1} = [\lambda_i] \tag{4-101}$$

Estas soluções indicam que há modos amortecidos. No entanto estes modos não são os mesmos que os dos modos não-amortecidos de vibração, cujos elementos estão em fase ou estão a 180^0 fora de fase um do outro. Para um sistema não-amortecido proporcionalmente, há diferenças de fase para várias partes do sistema, resultando em modos complexos de vibração. Esta diferença se manifesta pelo fato de que, para modos não-amortecidos, todos os pontos da estrutura passam pelas suas posições de equilíbrio de forma simultânea, o que não é verdade para os modos complexos. Então, modos não-amortecidos tem pontos nodais bem definidos ou linhas, enquanto modos complexos não possuem linhas nodais estacionárias.
A configuração da equação 4-98 garante que combinada com a equação 4-99 há duas equações simétricas $[A]$ e $[B]$. Qualquer outra escolha tal que:

$$[[K] : [0]]\dot{y} + [[0] : [-K]]y = 0 \tag{4-102}$$

resultará num problema de autovalor como:

$$\begin{bmatrix} C & M \\ K & 0 \end{bmatrix} \dot{y} + \begin{bmatrix} C & 0 \\ K & -K \end{bmatrix} y = 0 \tag{4-103}$$

Aqui a assimetria da primeira matriz pode causar dificuldades numéricas.

4.3.3
Modelo de Amortecimento Estrutural Não-proporcional

A equação de movimento de um sistema de múltiplos graus de liberdade com amortecimento estrutural não-proporcional é ainda dado pela equação 4-104:

$$[M]\ddot{x} + [K]x + j[H]x = 0 \tag{4-104}$$

A matriz de amortecimento estrutural pode ser vista como uma parte imaginária de uma matriz complexa de rigidez, definida como:

$$[K]_c = [K] + \jmath[H] \tag{4-105}$$

A solução para a equação 4-104 pode ser considerada matematicamente como:

$$x(t) = Xe^{\jmath\lambda t} \tag{4-106}$$

onde λ é a freqüência complexa que engloba oscilações e decaimento livre da vibração; $[X]$ é o vetor complexo das amplitudes dos deslocamentos. Esta forma de solução, uma vez substituida na equação 4-104, leva a um problema de autovalor:

$$([K]_c - \lambda^2[M])X = 0 \tag{4-107}$$

A solução da equação 4-107 dará matrizes diagonais de autovalores $[\lambda_r^2]$ e uma matriz de autovetores $[\Psi]$. O autovalor λ_r^2 é relacionado com a freqüência natural ω_r e com o fator de perda η_r do sistema, de maneira que:

$$\lambda_r^2 = \omega_r^2(1 + \jmath\eta_r), \ (r = 1, 2, ..., N) \tag{4-108}$$

Na equação 4-108 λ_r é conhecida como a freqüência natural complexa do sistema. A matriz $[\lambda_r^2]$ é a matriz das freqüências naturais do sistema. O correspondente autovetor Ψ_r é o vetor complexo.

Quando todos os autovetores são agrupados em ordem ascendente de ω_r , a matrix complexa resultante é a matriz de modos de vibrar Ψ do sistema. O modo de vibrar complexo Ψ_r não é único, uma vez que qualquer múltiplo seu satisfaz à equação 4-107.

As propriedades de ortogonalidade do sistema revela:

$$[\Psi]^T[M][\Psi] = [m_r] \tag{4-109}$$

$$[\Psi]^T[M]_c[\Psi] = [k_r] \tag{4-110}$$

$$[k_r][m_r]^{-1} = [\lambda_r^2] \tag{4-111}$$

Tanto a massa modal m_r como a rigidez modal k_r são qrandezas complexas. É evidente para a análise modal que um sistema de múltiplos graus de liberdade com um modelo de amortecimento estrutural requer um tratamento analítico muito mais simples que um tratamento com um modelo de amortecimento viscoso. Quando se suspeitar que a diferença de se utilizar um ou outro modelo não causar significativas mudanças no resultado, é muito mais conveniente se considerar um modelo de amortecimento estrutural na análise modal.

4.3.4 Modos Normalizados pela Massa de um Sistema Amortecido com Múltiplos Graus de Liberdade

A mesma razão por se utilizar modos normais normalizados pela massa para sistemas não-amortecidos se tem para sistemas amortecidos com múltiplos graus de liberdade. Para um sistema com amortecimento estrutural, o procedimento para se obterem os modos de vibrar é idêntico ao que se utiliza para um sistema não-amortecido exceto que agora lida-se com quantidades complexas. A equação 4-102 determina a matriz de massa modal complexa. Matriz dos modos de vibrar normalizados $[\Phi]$ pode ser encontrada de:

$$[\Phi] = [m_r]^{\frac{-1}{2}}[\Psi] \qquad (4\text{-}112)$$

Pode se mostrar que a matriz complexa $[\Phi]$ será única para o sistema, independentemente dos diferentes múltiplos da matriz de modos de vibrar $[\Psi]$ usada. Utilizando-se a matriz de massa-normalizada dos modos de vibrar, a ortogonalidade de um sistema com múltiplos graus de liberdade pode ser escrito como:

$$[\Phi]^T[M][\Phi] = [I] \qquad (4\text{-}113)$$

$$[\Phi]^T[K_c][\Phi] = [\lambda_r^2] \qquad (4\text{-}114)$$

Na equação 4-113 a matriz de massa é vista como uma matriz complexa com a prte imaginária nula.
Com os modos de vibrar normalizados pela massa pode-se diagonalizar a matriz FRF de um sistema com amortecimento estrutural de múltiplos graus de liberdade:

$$[\Phi]^T([K] + \jmath[H] - \lambda^2[M])[\Phi] = [(\lambda_r^2 - \omega^2)] \qquad (4\text{-}115)$$

Este resultado será útil na obtenção da composição modal de uma FRF complexa.

4.3.5 Funções de Resposta em Freqüência para um Sistema Amortecido com Múltiplos Graus de Liberdade

Matriz de Rigidez Dinâmica e Matriz de Receptância

A matriz de rigidez dinâmica $[Z(\omega)]$ e a matriz de receptância $[\alpha(\omega)]$ de um sistema com múltiplos graus de liberdade amortecido pode ser definida exatamente da mesma forma que para um sistema não-amortecido:

$$[Z(\omega)] = [K]_c - \omega^2[M] = [K] - \omega^2[M] + \jmath[H] \tag{4-116}$$

$$[\alpha(\omega)] = ([K]_c - \omega^2[M])^{-1} \tag{4-117}$$

O significado físico de uma receptância individual FRF $\alpha(\omega)_{ij}$ é que esta representa a razão da resposta do deslocamento e um grau de liberdade $'i'$ e a única entrada da força no sistema agindo no grau de liberdade $'j'$. Devido a existência de amortecimento, a FRF é agora uma função complexa da freqüência ω com a parte imaginária não-nula.

Composição de um Receptância FRF Utilizando-se Modos de Vibração

A obtenção da matriz de receptância FRF de inversa da matriz de rigidez dinâmica não é um tratamento matemático prático. Mais que isso a abordagem não leva a nenhum aprofundamento sobre a natureza da composição modal de uuma FRF. A matriz de receptância de um sistema de múltiplos graus de liberdade com amortecimento estrutural pode ser determinada pelos dados modais do sistema como:

$$[\alpha(\omega)] = [\Phi][(\lambda_r^2 - \omega^2)]^{-1}[\Phi]^T \tag{4-118}$$

Pode-se ver que a matriz $[\alpha(\omega)]$ é complexa, simétrica e sempre de "full rank". A mesma discussão pode também revelar que uma simples FRF de receptância, por acaso $\alpha_{jk}(\omega)$, equação 4-118 pode ser escrita como:

$$\alpha_{jk}(\omega) = \frac{\phi_{j1}\phi_{k1}}{\lambda_1^2 - \omega^2} + \frac{\phi_{j2}\phi_{k2}}{\lambda_2^2 - \omega^2} + \ldots + \frac{\phi_{jn}\phi_{kn}}{\lambda_n^2 - \omega^2} \tag{4-119}$$

Esta equação aparece ser a mesma obtida de um sistema não-amortecido de múltiplos graus de liberdade. No entanto, os numeradores do lado direito, os quais são elementos da matriz de modos de vibração, são quntidades complexas. Assim são as freqüências naturais no denominador.

Comparando-se com a equação 4-79, parece óbvio que se utilizarmos o modelo de amortecimento estrutural, a teoria de análise modal pode quase ser a mesma entre os casos amortecido e não-amortecido. Usando-se a constante modal, pode-se reescrever a equação 4-119 como:

$$\alpha_{jk}(\omega) = \sum_{r=1}^{n} \frac{{}_rA_{jk}}{\lambda_r^2 - \omega^2} \tag{4-120}$$

$$= {}_1A_{jk}\ {}_2A_{jk}\ {}_nA_{jk} \left\{ \begin{array}{c} \dfrac{1}{\lambda_1^2 - \omega^2} \\ \dfrac{1}{\lambda_2^2 - \omega^2} \\ \cdots \\ \dfrac{1}{\lambda_n^2 - \omega^2} \end{array} \right\} \tag{4-121}$$

$$A_{jk}{}^T \left\{ \frac{1}{\lambda_r^2 - \omega^2} \right\} \tag{4-122}$$

Então a p^{esima} coluna da matriz $[\alpha(\omega)]$ pode ser escrita como:

$$\alpha(\omega)_p = \left\{ \begin{array}{c} \alpha(\omega)_{p1} \\ \alpha(\omega)_{p2} \\ \cdots \\ \alpha(\omega)_{pn} \end{array} \right\} = [A_p] \left\{ \frac{1}{\lambda_r^2 - \omega^2} \right\} \tag{4-123}$$

Sendo:

$$[A_p] = \begin{bmatrix} \phi_{p1}\phi_{11} & \phi_{p2}\phi_{12} & \cdots & \phi_{pn}\phi_{1n} \\ \phi_{p1}\phi_{21} & \phi_{p2}\phi_{22} & \cdots & \phi_{pn}\phi_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \phi_{p1}\phi_{n1} & \phi_{p2}\phi_{n2} & \cdots & \phi_{pn}\phi_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}_1A_{p1} & {}_2A_{p1} & \cdots & {}_nA_{p1} \\ {}_1A_{p2} & {}_2A_{p2} & \cdots & {}_nA_{p2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ {}_1A_{pn} & {}_2A_{pn} & \cdots & {}_nA_{pn} \end{bmatrix} \tag{4-124}$$

A matriz $[A_p]$ é chamada de matriz modal constante para a p^{esima} coluna da matriz de receptância $[\alpha(\omega)]$ Cada coluna de $[\alpha(\omega)]$ tem sua matriz modal constante. A matriz de masa normalizada dos modos de vibração pode ser derivada de uma das matrizes modal constante.

Gráficos FRF de um Sistema Amortecido de Múltplos graus de Liberdade

A FRF de um sistema de múltiplos graus de liberdade encerra diferentes formas de mostrar graficamente suas características completas. A FRF de um sistema de múltiplos graus de liberdade não-amortecido é desprovido de um número gráficos úteis tais como o gráfico de Nyquist por causa de sua parte imaginária nula. A FRF para um sistema de múltiplos

graus de liberdade amortecido não apresenta esta deficiência e pode dispor de uma grande variedade destes métodos gráficos.
Vejamos um sistema com quatro graus de liberdade com amortecimento estrutural não-proporcional. O sistema de matrizes são dados abaixo:

$$[M] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} kg$$

$$[K] = \begin{bmatrix} 2000 & -1000 & 0 & 0 \\ -1000 & 2000 & -1000 & 0 \\ 0 & -1000 & 2000 & -1000 \\ 0 & 0 & -1000 & 2000 \end{bmatrix} N/m$$

$$[V] = \begin{bmatrix} 20 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} N/m$$

1. Gráficos Amplitude-fase e log-log

   O gráfico de amplitude de uma FRF para um sistema de múltiplos graus de liberdade amortecido consiste de um gráfico de sua magnitude e freqüência e de sua fase versus freqüência. A figura 1 mostra a amplitude e fase da mobilidade $Y_{11}(\omega)$ de um sistema de quatro graus de liberdade em escala linear. Como esperado, o gráfico de amplitude é dominado pela ressonância. O gráfico de fase reflete a existência de um modo de vibrar pela sua mudança visível de fase.

   Como no caso não-amortecido, um melhor uso da informação da amplitude de uma FRF é se traçar o gráfico em decibéis. A receptância $\alpha_{11}(\omega)$ de um sistema com quatro graus de liberdade pode ser traçada em escala dB na figura 1. Deste gráfico dB não apenas as quatro ressonâncias são claras como as antiressonâncias também são. A figura 1 traça as quatro FRF de receptâncias em escala dB relacionadas ao grau de liberdade 1. As ressonâncias, anti-ressonâncias e mínimas destas FRF são evidentes. Esta é uma facilidade que não se tem em escala linear.

   Para se estudar as propriedades assintóticas das FRF de sistemas com múltiplos graus de liberdade é necessário as FRF se apresentarem em

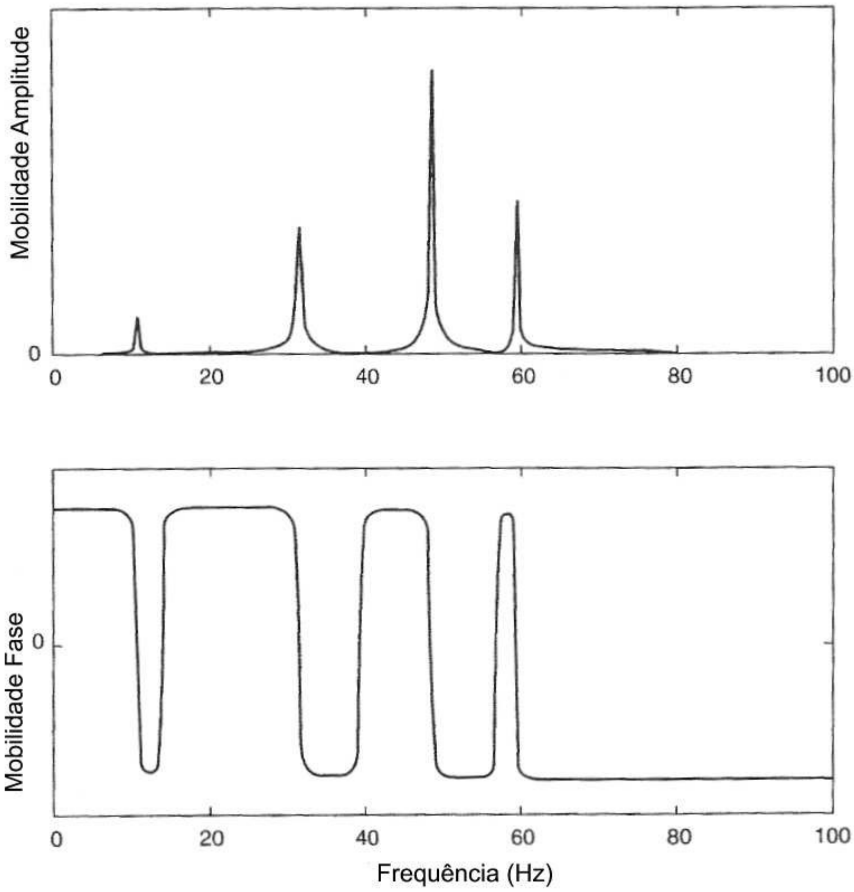


Figura 4.4: FRF da mobilidade $Y_{11}(\omega)$ para sistema com 4 graus de liberdade

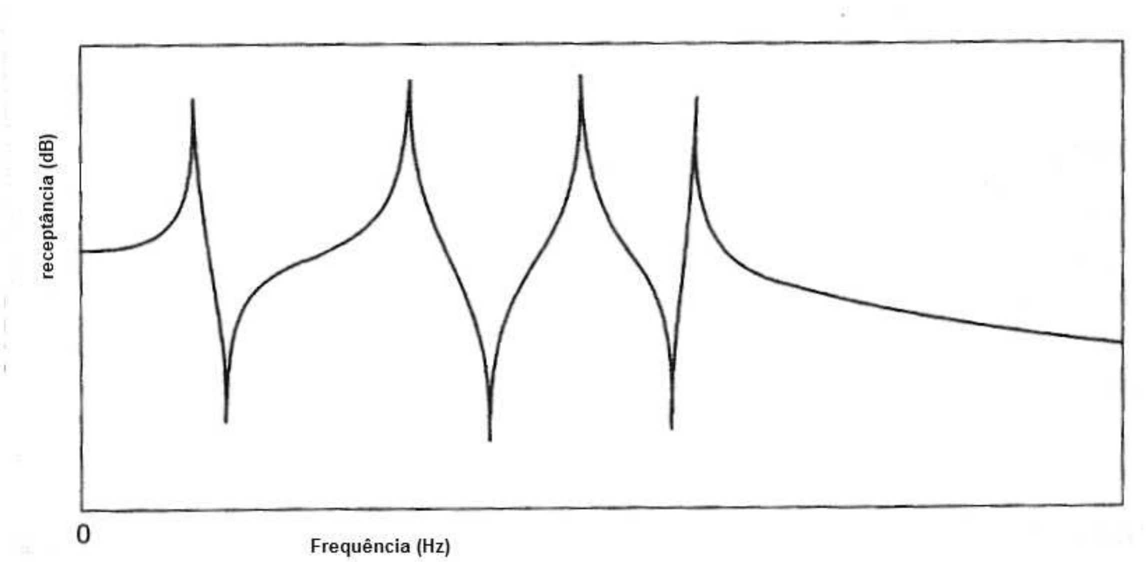


Figura 4.5: FRF da receptância $\alpha_{11}(\omega)$ para sistema com 4 graus de liberdade

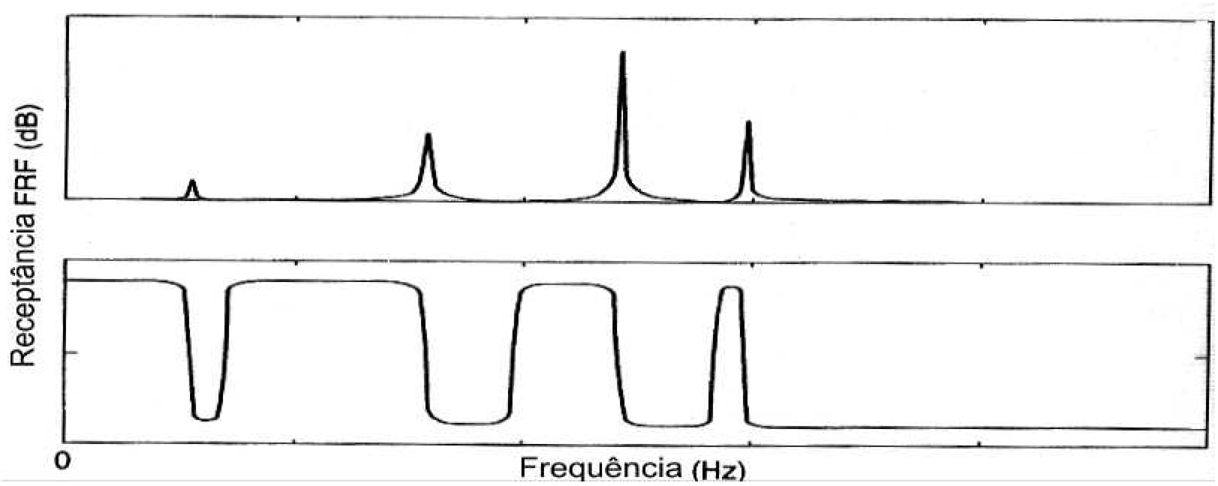


Figura 4.6: FRF para sistema com 4 graus de liberdade em dB

escala log-log.

As propriedades assintóticas das FRF são aplicáveis tanto na caso não-amortecido como no caso amortecido. Isto é, porque o amortecimento modifica principalmente as amplitudes dos dados de FRF próximos às ressonâncias, anti-ressonâncias e mínima. As freqüências de ressonância e anti-ressonância não se alteram significativamente. Teoricamente isto não afeta as propriedades assíntóticas.
Quando o amortecimento causa complexidade significativa para a FRF, torna-se não-confiável obterem-se as propriedades assintóticas. A figura 1 mostra o gráfico log-log do primeiro ponto FRF do sistema de 4 graus de liberdade nas formas de receptância, mobilidade e acelerância.

2. Gráficos das Parte Real e Imaginária

   Os gráficos real e imaginário consistem de duas partes: a parte real da FRF versus freqüência e sua parte imaginária versus freqüência. Gráficos real e imaginário são apresentados na sua primeira parte sem amortecimento. Para um sistema com múltiplos graus de liberdadecom amortecimento estrutural, as partes real e imaginária podem ser obtidas analiticamente:

$$Re(\alpha + jk(\omega)) = Re(\sum_{r=1}^{n} \frac{\phi_{jr}\phi_{kr}}{\lambda_r^2 - \omega^2}) \qquad (4\text{-}125)$$

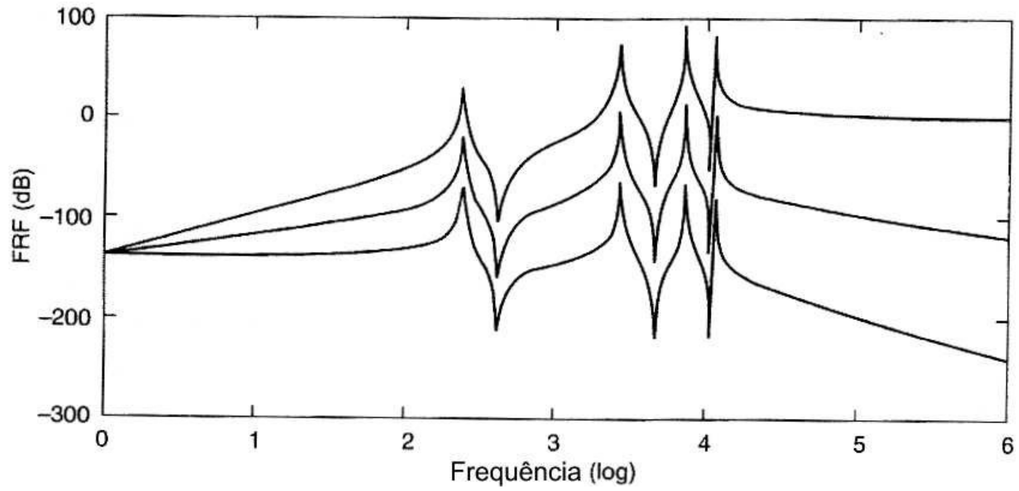


Figura 4.7: Gráfico log-log para o primeiro ponto de FRF para sistema com 4 graus de liberdade em formas de receptância, mobilidade e acelerância

$$Im(\alpha + jk(\omega)) = Im(\sum_{r=1}^{n} \frac{\phi_{jr}\phi_{kr}}{\lambda_r^2 - \omega^2}) \tag{4-126}$$

3. Gráfico de Nyquist

A principal vantagem de se utilizar um gráfico de Nyquist num sistema de um grau de liberdade advém de sua propriedade de circularidade no plano complexo. O que permanece válido para um sistema amortecido de múltiplos graus de liberdade. A propriedade de circularidade não se aplica totalmente aqui desde que qualquer modo de vibração será influenciado por outros modos do sistema, a simplicidade de uma FRF de um sistema de um grau de liberdade. No entanto no entorno do modo de vibração mais proeminente pode-se supor que a FRF é dominante para aquele modo. Então o gráfico de Nyquist continua sendo um dos mais úteis gráficos para uma FRF de um sistema amortecido com múltiplos graus de liberdade.
A figura 3 de uma FRF de um sistema de quatro graus de liberdade. Os dados não conectam um círculo completo por causa da resolução da freqüência.

A dominância local de um modo individual e a quase circularidade do gráfico de Nyquist de uma FRF de um sistema de múltiplos graus de liberdade significa que a teoria de um sistema de um grau de liberdade pode ser usado na análise, o que abre uma avenida para expandir a análise modal de um sistema de um grau para um sistema de múltiplos graus de liberdade.

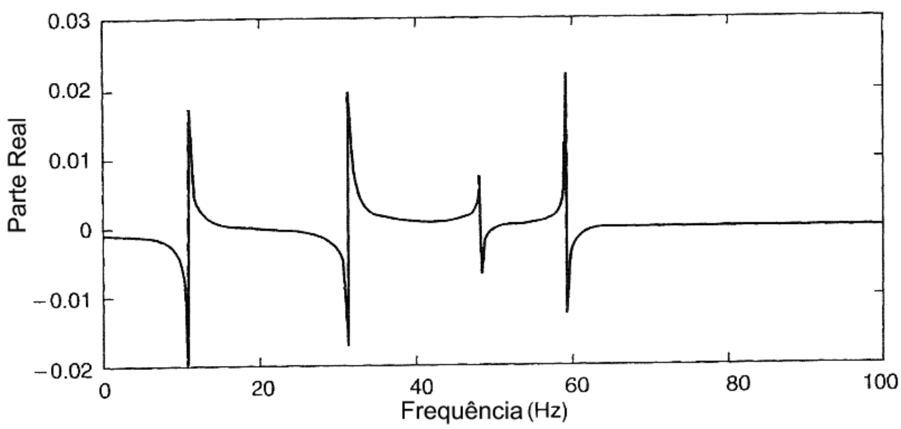


Figura 4.8: Parte real da FRF da receptância de um sistema com 4 graus de liberdade

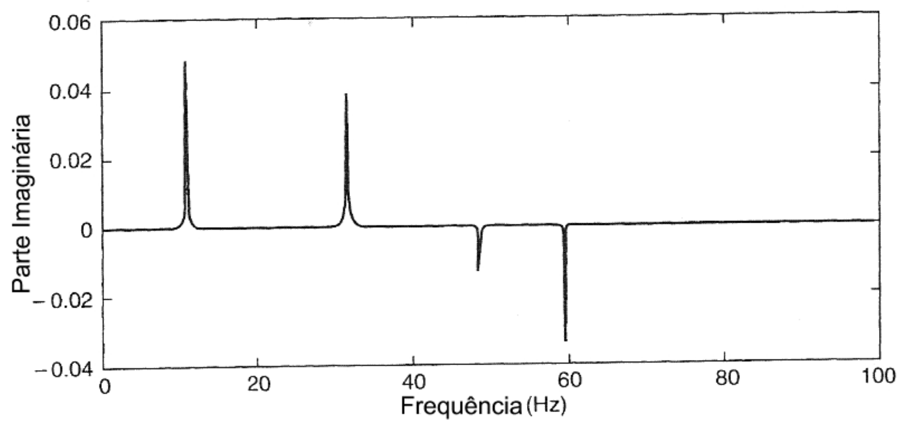


Figura 4.9: Parte imaginária da FRF da receptância para sistema com 4 graus de liberdade

4. Gráfico da Rigidez Dinâmica

Para uma FRF de um sistema de um grau de liberdade o gráfico de rigidez dinâmica mostra uma grande simplicidade e facilidade para apresentar os parâmetros modais com os parâmetros espaciais do sistema. Para uma FRF de um sistema de múltiplos graus de liberdade esta vantagem é muito. Como se pode observar, a seguinte desigualdade indica que o gráfico da rigidez dinâmica de um sistema com múltiplos graus de liberdade não se assemelha a um de um sistema com um grau de liberdade:

$$\frac{1}{\alpha_{jk}}(\omega) \neq \sum_{r=1}^{n} \frac{\lambda_r^2}{\omega^2}\phi_{jr}\phi_{kr} \qquad (4\text{-}127)$$

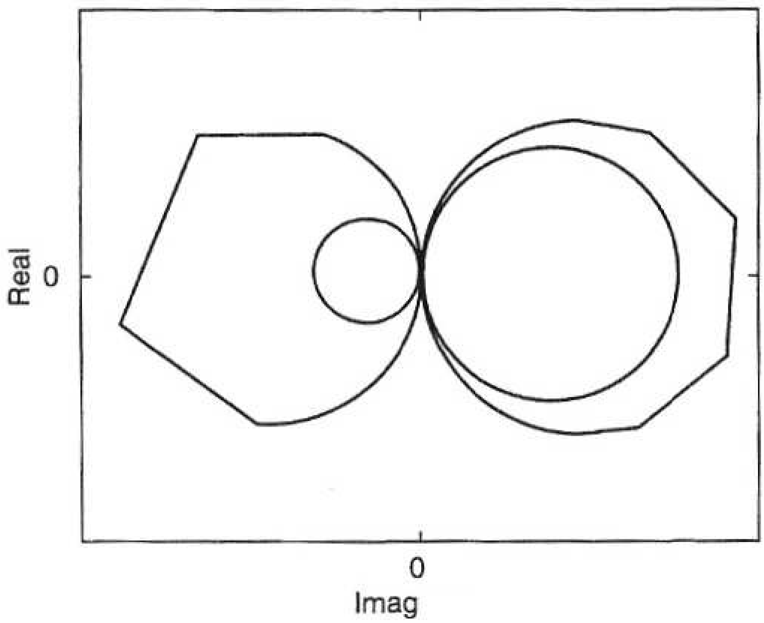


Figura 4.10: Gráfico de Nyquist para uma FRF de um sistema amortecido com quatro graus de liberdade

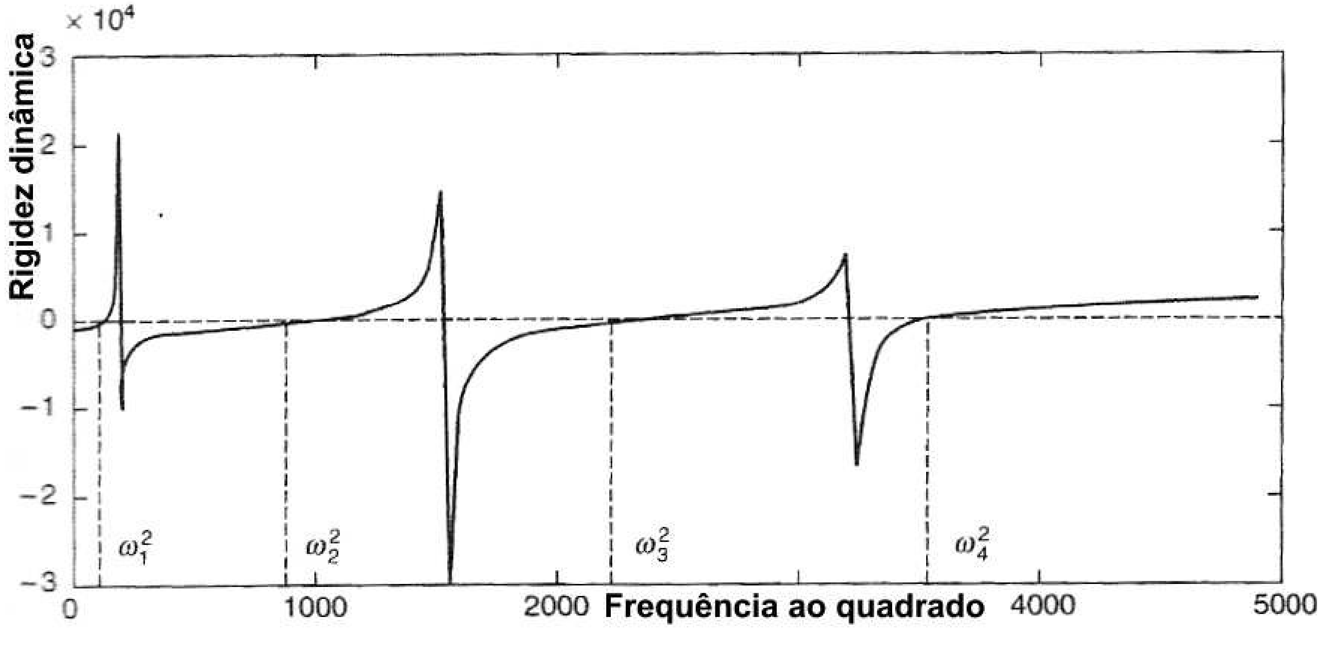


Figura 4.11: Parte real da rigidez dinâmica $1/\alpha_{11}(\omega)$ para um sistema de quatro graus de liberdade

Diferentes métodos de mostrar a mesma FRF de um sistema com múltiplos graus de liberdade visa destacar aspectos particulares da função. Embora para a mesma FRF a quantidade de informação deva ser idêntica, é uma maneira de proporcionar de forma mais clara algumas informações, desta forma, úteis à análise modal.

Resposta no tempo de um sistema de múltiplos graus de liberdade

Uma FRF de um sistema amortecido com múltiplos graus de liberdade pode ser escrito na forma de resíduos de raízes complexas:

$$\alpha_{ik}(\omega) = \sum_r \left(\frac{rA_{ik}}{\jmath\omega - \lambda_r} + \frac{rA^*_{ik}}{\jmath\omega - \lambda^*_r} \right) \tag{4-128}$$

As raízes complexas λ_r e λ^*_r são pares conjugados. Assim como são os resíduos complexos rA_{ik} e rA^*_{ik}. Uma expressão mais geral é usar o operador Laplaciano:

$$\alpha_{ik}(s) = \sum_r \left(\frac{rA_{ik}}{s - s_r} + \frac{rA^*_{ik}}{s - s^*_r} \right) \tag{4-129}$$

onde

$$s_r, s^*_r = -\zeta_r\omega_r \pm \sqrt{1-\zeta^2_r}\omega_r\jmath \tag{4-130}$$

A transformada inversa de Laplace para essa função de transferência é a resposta do impulso de um sistema com múltiplos graus de liberdade entre as coordenadas 'i'e 'k':

$$h_{ik} = \sum_{r=1}^{n} rA_{ik}e^{s_r t} + \sum_{r=1}^{n} rA^*_{ik}e^{s^*_r t} \tag{4-131}$$

sendo

$$rA_{ik}|_{r>n} \; = \; (r-n)A^*_{ik} \; e \; \lambda_r|_{r>n} = \lambda^*_{r-n}. \tag{4-132}$$

Em geral a resposta a vibração forçada de um sistema de múltiplos graus de liberdade na coordenada i é a contribuição para resposta no tempo de cada modo de vibrar. A resposta pode ser escrita como:

$$x_i(t) = \sum_{r=1}^{2n} \varphi_{ir}e^{\lambda_r t} \tag{4-133}$$

Aqui, os elementos $\varphi_i r$, $(r = 1, 2, ..., 2n)$ são o i^{iesimo} numa r^{esima} coluna de uma matriz de modos de vibrar $2n \times 2n$.

A resposta forçada de um sistema com múltiplos graus de liberdade amortecido pode ser obtido utilizando-se a transformada de Laplace e sua inversa. A equação de movimento do sistema sob cargas externas arbitrárias é dada como:

$$[M][\ddot{x}] + [C][\dot{x}] + [K][x(t)] = f(t) \tag{4-134}$$

A transformada de Laplace com condições iniciais nulas produz:

$$(s^2[M] + s[C] + [K])X(s) = F(s) \tag{4-135}$$

A transformada inversa de Laplace gera uma resposta no domínio do tempo como:

$$x(t) = L^{-1}X(s) = L^{-1}((s^2[M] + s[C] + [K])^{-1}F(s) \tag{4-136}$$

Esta transformada requer a informação das condições iniciais do sistema.

Modos Normais Forçados de um Sistema Amortecido com Múltiplos Graus de Liberdade

Um modo de vibração de um sistema de amortecido é em geral complexo, e desta forma, é diferente de um modo de vibrar não-amortecido do mesmo sistema se o amortecimento for retirado. A única exceção é quando o amortecimento é proporcional.

Para um sistema não-amortecido, as equações de movimento podem ser desacopladas sob as coordenadas principais. Como resultado, um modo é independente dos outros modos. Estes modos são conhecidos como modos normais. Para modos normais de vibração, casa ponto do sistema é submetido a um movimento harmônico e passa cada um pala posição de equilíbrio simultaneamente.

A existência do amortecimento não-proporcional invalida esta condição desde que o desacoplamento das equações se torna impossível. No entanto, utilizando-se de um número de forças harmônicas que contrabalançam as forças de amortecimento, é possível excitar os modos normais de vibração de um sistema amortecido de múltiplos graus de liberdade. Considere-se um sistema com amortecimento viscoso de 'n' graus de liberdade excitado por forças harmônicas de freqüência ω. A equação matricial de movimento do sistema é:

$$[M][\ddot{x}] + [C][\dot{x}] + [K][x(t)] = F \sin \omega t \tag{4-137}$$

Considere-se as soluções da equação 4-137 como sendo na forma:

$$x = X \sin(\omega t - \theta) \tag{4-138}$$

Para dada freqüência de excitação ω, há 'n' soluções do tipo dada pela equação 4-138, onde cada um dos modos associados Ψ_i está associado com uma fase definida θ_i e uma correspondenete distribuição de força F a qual é requerida para sua excitação. A resposta sob estas condições é chamada de *modos normais forçados*. Modos normais forçados são também referenciados como os modos característicos de atraso de fase.
Agora a equação 4-137 pode ser dividida em partes imaginária e real:

$$[([K] - [M]\omega^2) \sin\theta - [C]\omega \cos\theta]X = 0 \tag{4-139}$$

$$[([K] - [M]\omega^2) \cos\theta + [C]\omega \sin\theta]X = F \tag{4-140}$$

A equação 4-139 é a mesma que:

$$[[I] \tan\theta - ([K] - [M]\omega^2)^{-1}[C]\omega]X = 0 \tag{4-141}$$

Este é um problema de autovalor . Para cada freqüência associada ω há 'n' autovalores associados $\tan\theta_i$ e autovetores Ψ_i, de forma que:

$$[([K] - [M]\omega^2) \tan\theta_i - [C]\omega]\Psi_i = 0 \tag{4-142}$$

Comparando-se com a solução do problema de autovalor e a ortogonalidade dos modos de um sistema não-amortecido de múltiplos graus de liberdade, encontra-se que:

$$\tan\theta_i = \frac{\omega \Psi_i^T [C] \Psi_i}{\Psi_i^T [[K] - \omega^2 [M]] \Psi_i} \tag{4-143}$$

As equações 4-141 e 4-142 mostram que a qualquer freqüência ω os modos de vibrar dependem unicamente da distribuição da matriz $[C]$ e não de sua intensidade. Se cada elemento em $[C]$ é multiplicado por um fator constante , então a equação 4-142 mostra que os autovalores $\tan\theta_i$ serão todos acrescidos da mesma proporção.
A equação 4-141 pode ser escrita como:

$$[([K] - [M]\omega^2) - \frac{[C]\omega}{\tan\theta_i}]\Phi_i = 0 \tag{4-144}$$

Substituindo-se $\theta_i = \frac{\pi}{2}$ na equação 4-144 obtém-se:

$$([K] - [M]\omega_i^2)\Phi_i = 0 \tag{4-145}$$

Esta equação 4-145 subsidia a teoria de procedimentos de teste modal usando-se múltiplas excitações a fim de excitar os modos não-amortecidos de uma estrutura amortecida. É interessante observar que os tipos de amortecimento são irrelevantes quando os modos não-amortecidos são excitados.

Pode-se observar que quando a freqüência ω é igual a uma das freqüências naturais ω_i o modo relativo a um dos autovalores $\tan\theta_i$ (igual a ∞ ou o ângulo $\theta_i = \frac{\pi}{2}$ é idêntico ao modo para um sistema não-amortecido. Neste caso, as forças requerias podem ser obtidas da equação 4-140:

$$\omega_i[C]\Phi_i = F_i. \tag{4-146}$$