Referências Bibliográficas

[1] Aliprantis, C.D.; Border, K.C. *Infinite dimensional analysis: a hitchhiker's guide.* 2nd edn. Berlin Heidelberg New York: Springer, (1999).

[2] Araujo, A.; Páscoa, M.; Torres-Martínez, J.P. Long-lived collateralized assets and bubbles. Textos para Discussão No 542. PUC-Rio, Brazil, (2007).

[3] Araujo, A.; Páscoa, M.; Torres-Martínez, J.P. Collateral avoids Ponzi schemes in incomplete markets. *Econometrica*. v. 70, p. 1613-1638. (2002).

[4] Daher, W.; Martins-da-Rocha, V.F.; Páscoa, M.; Vailakis, Y. Sequential trading without perfect foresight: the role of default and collateral. Working paper FEUNL, Portugal,(2006).

[5] Dubey, P.; Geanakoplos, J.; Shubik, M. Default and Punishment in General Equilibrium. *Econometrica*. v. 73, p. 1-37. (2005).

[6] Geanakoplos, J. Promises Promises. Cowles Foundation Discussion Paper 1143. (1996).

[7] Geanakoplos, J.; Zame, W.R. Collateral and the enforcement of intertemporal contracts. Yale University Working paper. (2002).

[8] Hernandez, A.; Santos, M. Competitive Equilibria for Infinite-Horizon Economies with Incomplete Markets. *Journal of Economic Theory*. v. 71, p. 102-130. (1996).

[9] Kubler, F. ; Schmedders K. Stationary equilibria in asset pricing models with incomplete markets. *Econometrica*. v. 71, p. 1767-1793. (2003).

[10] Levine, D. K.; Zame, W.R. Debt Constraints and Equilibrium in Infinite Horizon Economies with Incomplete Markets. *Journal of Mathematical Economics*. v. 26, p. 103-131. (1996).

[11] Magill, M.; Quinzii, M. Debt Constraints and Equilibrium in Infinite Horizon Economies with Incomplete Markets. *Econometrica*. v. 62, p. 853-880. (1994).

[12] Magill, M.; Quinzii, M. Incomplete Markets over and Infinite Horizon: Long-Lived Securities and Speculative Bubbles. *Journal of Mathematical Economics*. v. 26, p. 133-170. (1996).

[13] Páscoa, M.; Seghir, A. Harsh default penalties lead to Ponzi schemes. *Games and Economic Behaviour*, doi:10.1016/j.geb.2007.10.002. (2007).

[14] Rockafellar, R.T. *Convex analysis*. Princeton, New Jersey: Princeton University Press. (1997).

[15] Steinert, M.; Torres-Martínez, J.P. General equilibrium in CLO markets. *Journal of Mathematical Economics*. v. 43, p. 709-734. (2007).

A
Apêndice

Em um contexto de ativos colateralizados e penalidades lineares na utilidade por inadimplência, Páscoa e Seghir (2006) mostram que esquemas de Ponzi poderiam ser implementados se existe uma sub-árvore $D(\xi)$ tal que, para todo nó $\mu \geq \xi$, existe sempre algum ativo $j \in J(\mu)$ que seu preço excede o das respectivas garantias, $p_\mu C_{(\mu,j)} - q_{(\mu,j)} < 0$ (ver Remark 3.1 em Páscoa e Seghir (2006)). Em tal caso, o problema individual não tem uma solução finita. No contexto desta dissertação, condições mais fracas asseguram a inexistência de uma solução para o problema individual.

Lema 1. *Suponha que, dado $x \in \mathbb{R}_+^{L\times D}$, se $U^i(x)$ é finito, então $U^i(y) > U^i(x)$ para qualquer $y > x$. Suponha também que os mecanismos contra a inadimplência sejam persistemente efetivos em uma trajetória $\Theta = (\mu_n; n \in \mathbb{N})$ tal que, para qualquer $\eta \in \mathrm{Eff}(\Theta)$, existe $j \in J(\eta)$ para o qual $p_\eta C_{(\eta,j)} - q_{(\eta,j)} < 0$. Então, o problema individual do agente i não tem uma solução finita, caso contrário, esquemas de Ponzi poderiam ser implementados.*

Demonstração. Suponha que exista um plano factível no orçamento do agente i, $(x^i, \theta^i, \varphi^i)$, que seja um ótimo finito. Sob a condição de monotonicidade escrita acima no Lema, $p_\eta \gg 0$ para todo nó $\eta \in D$. Para cada $\eta \in \mathrm{Eff}(\Theta)$, seja $J^1(\eta) = \{j \in J(\eta) : p_\eta C_{(\eta,j)} - q_{(\eta,j)} < 0\}$. Agora, considere a alocação $(x_\xi, \theta_\xi, \varphi_\xi)_{\xi \in D}$, com

$$\big((x_\mu, \theta_\mu, \varphi_\mu);\ (\theta_\eta, \varphi_{(\eta,j)})\big)_{\mu \notin \mathrm{Eff}(\Theta),\, \eta \in \mathrm{Eff}(\Theta)} = \Big((x^i_\mu, \theta^i_\mu, \varphi^i_\mu);\ (\theta^i_\eta, \varphi^i_{(\eta,j)})\Big)_{\mu \notin \mathrm{Eff}(\Theta),\, \eta \in \mathrm{Eff}(\Theta)} \ \forall j \in J(\eta) \setminus J^1(\eta)$$

e

$$\begin{aligned}
\varphi_{(\eta,j)} &= \varphi^i_{(\eta,j)} + \delta_\eta, \quad \forall \eta \in \mathrm{Eff}(\Theta),\ \forall j \in J^1(\eta),\\
x_{(\eta,l)} &= x^i_{(\eta,l)} + \frac{1}{(\#L)\, p_{(\eta,l)}} \sum_{j \in J^1(\eta)} \big(q_{(\eta,j)} - p_\eta C_{(\eta,j)}\big)\, \delta_\eta, \quad \forall l \in L,\ \text{se o nó}\, \eta = \mu_1,\\
x_{(\eta,l)} &= x^i_{(\eta,l)} + \frac{1}{(\#L)\, p_{(\eta,l)}} \sum_{j \in J^1(\eta)} \big(q_{(\eta,j)} - p_\eta C_{(\eta,j)}\big)\, \delta_\eta
\end{aligned}$$

$$-\frac{1}{(\#L)\,p_{(\eta,l)}}\sum_{j\in J^1(\eta^-)} p_\eta A_{(\eta,j)}\,\delta_{\eta^-},\quad \forall\,\eta\in \mathrm{Eff}(\Theta)\setminus\{\mu_1\},\ \forall l\in L,$$

onde o plano $(\delta_\eta)_{\eta\in \mathrm{Eff}(\Theta)}$ é escolhido de forma que as condições abaixo valham,

$$\sum_{j\in J^1(\mu_1)} \left(q_{(\mu_1,j)} - p_{\mu_1}C_{(\mu_1,j)}\right)\delta_{\mu_1} > 0, \tag{A-1}$$

$$\sum_{j\in J^1(\eta)} \left(q_{(\eta,j)} - p_{\eta}C_{(\eta,j)}\right)\delta_{\eta} > \sum_{j\in J^1(\eta^-)} p_\eta A_{(\eta,j)}\,\delta_{\eta^-},\quad \forall\eta\in \mathrm{Eff}(\Theta)\setminus\{\mu_1\}. \tag{A-2}$$

Por definição de $\mathrm{Eff}(\Theta)$, segue que $(x_\xi,\theta_\xi,\varphi_\xi)_{\xi\in D}$ pertence ao conjunto orçamentário de i aos preços (p,q). Mais ainda, as equações acima mostram que esquemas de Ponzi são possíveis ao preços (p,q). De fato, o agente i aumenta suas dívidas em μ_1 e paga suas obrigações futuras ou usando novos créditos nos nós em que existe efetividade ou entregando as garantias depreciadas nos nós $\mu\notin \mathrm{Eff}(\Theta)$ tais que $\mu^-\in \mathrm{Eff}(\Theta)$. Segue que $(x_\xi,\theta_\xi,\varphi_\xi)_{\xi\in D}$ melhora o nível de utilidade do agente i, contradizendo a otimalidade de (x^i,θ^i,φ^i). □

O resultado abaixo e a sua demonstração são análogas à Proposição 1 de Araujo, Páscoa e Torres-Martínez (2007). Porém, como algumas pequenas modificações são necessárias, apresento a prova completa.

Lema 2. *Seja $(p,q)\in\Pi$ e fixe um plano factível na economia e na restrição orçamentária de i, $z^i:=(x^i,\theta^i,\varphi^i)\in\mathbb{E}$. Sob Hipóteses A1 E A2, se z^i é a alocação ótima para o problema do agente i aos preços (p,q), então para todo $\eta\in D$, a função u^i_η é super-diferenciável no ponto $c^i_\eta := x^i_\eta+\sum_{j\in J(\eta)} C_{(\eta,j)}\varphi^i_{(\eta,j)}$, existem multiplicadores $\gamma^i_\eta\in\mathbb{R}_{++}$ e super-gradientes $v^i_\eta\in\partial u^i_\eta\left(c^i_\eta\right)$ tais que, para cada $j\in J(\eta)$,*

$$\gamma^i_\eta p_\eta \ \geq\ v^i_\eta + \sum_{\mu\in\eta^+}\gamma^i_\mu p_\mu Y_\mu, \tag{A-3}$$

$$\gamma^i_\eta q_{(\eta,j)} \ \geq\ \sum_{\mu\in\eta^+}\gamma^i_\mu F_{(\mu,j)}(p_\mu). \tag{A-4}$$

Além disso, o plano de multiplicadores $(\gamma^i_\eta)_{\eta\in D}$ satisfaz

$$\gamma^i_\eta p_\eta W^i_\eta \leq \sum_{\eta\in D} u^i_\eta(c^i_\eta). \tag{A-5}$$

Demonstração. Dado $T\in\mathbb{N}$, defina $D_T=\{\eta\in D: t(\eta)=T\}$ E $D^T=\{\eta\in D:\eta\in\bigcup_{k=0}^T D_k\}$. Para qualquer $\eta\in D$, seja $Z(\eta)=\mathbb{R}^L_+\times\mathbb{R}^{J(\eta)}_+\times\mathbb{R}^{J(\eta)}_+$. Por conveniência de notação, seja $z_{\xi_0^-}:=0\in Z(\xi_0^-)$, onde $Z(\xi_0^-):=\mathbb{R}^L_+$. Considere o problema de otimização:

$$
(P^{i,T}) \quad \begin{array}{ll} \max & \sum_{\eta\in D^T} u_\eta^i\left(x_\eta+\sum_{j\in J(\eta)} C_{(\eta,j)}\varphi_{(\eta,j)}\right) \\ \text{s.a.} & \begin{cases} z_\eta := (x_\eta,\theta_\eta,\varphi_\eta)\in Z(\eta) & \forall\,\eta\in D^T, \\ g_\eta^i(z_\eta,z_{\eta^-};p,q) \quad \leq \quad 0, & \forall\,\eta\in D^T, \\ x_\eta+\sum_{j\in J(\eta)} C_{(\eta,j)}\varphi_{(\eta,j)} \quad \leq \quad 2W_\eta, & \forall\,\eta\in D^T, \\ z_\eta \quad \in \quad [0,z_\eta^i], & \forall\,\eta\in D_T. \end{cases} \end{array} \tag{A-6}
$$

onde a desigualdade $g_\eta^i(z_\eta,z_{\eta^-};p,q)\leq 0$ representa a restrição orçamentária no nó η, isto é, desigualdades (1) or (2), e dado $(x,y)\in\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^m$, o intervalo $[x,y]:=\{z\in\mathbb{R}^m:\ \exists a\in[0,1],\ z=ax+(1-a)y\}$. Segue da existência de um plano ótimo individual aos preços (p,q) que existe uma solução para $(P^{i,T})$ chamada de $(z_\eta^{i,T})_{\eta\in D^T}$.[1]

Dado $\eta\in D$, defina a função côncava $\nu_\eta^i:\mathbb{R}^L\times\mathbb{R}^{J(\eta)}\times\mathbb{R}^{J(\eta)}\to\mathbb{R}\cup\{-\infty\}$ como

$$
\nu_\eta^i(z_\eta)=\begin{cases} u_\eta^i\left(x_\eta+\sum_{j\in J(\eta)} C_{(\eta,j)}\varphi_{(\eta,j)}\right) & \text{se } x_\eta+\sum_{j\in J(\eta)} C_{(\eta,j)}\varphi_{(\eta,j)}\geq 0; \\ -\infty & \text{caso contrário.} \end{cases}
$$

onde $z_\eta=(x_\eta,\theta_\eta,\varphi_\eta)$.

Segue que, para qualquer $T\geq 1$, $\sum_{\eta\in D^T}\nu_\eta^i(z_\eta^{i,T})\leq\sum_{\eta\in D}\nu_\eta^i(z_\eta^i)$.[2]

Para cada $\eta\in D$ and $\gamma_\eta\in\mathbb{R}_+$, defina $\mathcal{L}_\eta^i(\cdot,\gamma;p,q):\mathbb{Z}(\eta)\times\mathbb{Z}(\eta^-)\to\mathbb{R}$ como

$$
\mathcal{L}_\eta^i(z_\eta,z_{\eta^-},\gamma_\eta;\,p,q)=\nu_\eta^i(z_\eta)-\gamma_\eta\,g_\eta^i(z_\eta,z_{\eta^-};p,q).
$$

Dado $T\in\mathbb{N}$, para cada $\eta\in D^{T-1}$, defina o conjunto $\Xi^T(\eta)$ como a família de alocações $(x_\eta,\theta_\eta,\varphi_\eta)\in Z(\eta)$ que satisfazem $x_\eta+\sum_{j\in J(\eta)} C_{(\eta,j)}\varphi_{(\eta,j)}\leq 2W_\eta$. Além disso, para qualquer $\eta\in D_T$, seja $\Xi^T(\eta)$ o conjunto de alocações $(x_\eta,\theta_\eta,\varphi_\eta)\in Z(\eta)$

[1] De fato, defina o novo problema $(\tilde{P}^{i,T})$,

$$
(\tilde{P}^{i,T}) \quad \begin{array}{ll} \max & \sum_{\eta\in D^T} u_\eta^i\left(x_\eta+\sum_{j\in J(\eta)} C_{(\eta,j)}\varphi_{(\eta,j)}\right) \\ \text{s.a.} & \begin{cases} z_\eta := (x_\eta,\theta_\eta,\varphi_\eta)\in Z(\eta) & \forall\,\eta\in D^T, \\ g_\eta^i(z_\eta,z_{\eta^-};p,q) \quad \leq \quad 0, & \forall\,\eta\in D^T, \\ x_\eta+\sum_{j\in J(\eta)} C_{(\eta,j)}\varphi_{(\eta,j)} \quad \leq \quad 2W_\eta, & \forall\,\eta\in D^T, \\ z_\eta \quad \in \quad [0,z_\eta^i], & \forall\,\eta\in D_T, \\ \text{Se} \quad q_{(\eta,j)}=0 \quad \text{então} & \theta_{(\eta,j)}=0. \end{cases} \end{array}
$$

Sob a Hipótese A2 a função objetivo em $(\tilde{P}^{i,T})$ é contínua e o conjunto de alocações admissíveis é compacto em $\prod_{\eta\in D^T} Z(\eta)$. Note que para assegurar este resultado é necessário ter exigências de garantia que não sejam zero, caso contrário, as posições vendidas e compradas não seriam limitadas.

Assim, existe uma solução $(z_\eta^{i,T})_{\eta\in D^T}$. Mais ainda, esta solução para $(\tilde{P}^{i,T})$ também é uma solução ótima para $(P^{i,T})$. Essencialmente, a existência de um ótimo *finito* ao preços (p,q) para o problema do agente i assegura que, quando $q_{(\eta,j)}=0$, os pagamentos $F_{(\mu,j)}(p_\mu)$ tem que ser iguais a zero para todo $\mu\in\eta^+$. Assim, quando $q_{(\eta,j)}=0$, escolher valores positivos de $\theta_{(\eta,j)}$ não induz nenhum ganho.

[2] Note que, caso contrário, o agente i melhoraria sua utilidade em D escolhendo a alocação $(z_\eta^{i,T})_{\eta\in D^T}$ na sub-árvore D^T, sem fazer nenhuma transação (física ou financeira) depois dos nós com data T.

que satisfaz tanto $x_\eta + \sum_{j\in J(\eta)} C_{(\eta,j)}\varphi_{(\eta,j)} \leq 2W_\eta$ quanto $(x_\eta, \theta_\eta, \varphi_\eta) \in [0, z^i_\eta]$. Seja $\Xi^T := \prod_{\eta\in D^T} \Xi^T(\eta)$.

Segue de Rockafellar (1997, Theorem 28.3), que existem multiplicadores não negativos $(\gamma^{i,T}_\eta)_{\eta\in D^T}$ tais que a seguinte propriedade valha,

$$\sum_{\eta\in D^T} \mathcal{L}^i_\eta(z_\eta, z_{\eta_-}, \gamma^{i,T}_\eta;\, p, q) \leq \sum_{\eta\in D^T} \mathcal{L}^i_\eta(z^{i,T}_\eta, z^{i,T}_{\eta_-}, \gamma^{i,T}_\eta;\, p, q), \quad \forall (z_\eta)_{\eta\in D^T} \in \Xi^T,$$

e $\gamma^{i,T}_\eta g^i_\eta(z^{i,T}_\eta, z^{i,T}_{\eta_-}; p, q) = 0$.

Proposição A. *Para cada $\mu \in D$, a sequência $(\gamma^{i,T}_\mu)_{T\geq t(\mu)}$ é limitada. Mais ainda, dado $T > t(\mu)$,*

$$\nu^i_\mu(a_\mu) - \nu^i_\mu(z^i_\mu) \leq \left(\gamma^{i,T}_\mu \nabla_1 g^i_\mu(p,q) + \sum_{\eta\in\mu^+} \gamma^{i,T}_\eta \nabla_2 g^i_\eta(p,q)\right)\cdot(a_\eta - z^i_\eta)$$
$$+ \sum_{\xi\in D\setminus D^{T-1}} \nu^i_\xi(z^i_\xi), \quad \forall\, a_\mu \in \Xi^T(\mu),$$

onde, para cada $\eta \in D$, o vetor $(\nabla_1 g^i_\eta(p,q), \nabla_2 g^i_\eta(p,q))$ é definido como

$$\begin{aligned} \nabla_1 g^i_\eta(p,q) &= \left(p_\eta, q_\eta, (p_\eta C_{(\eta,j)} - q_{(\eta,j)})_{j\in J(\eta)}\right), \\ \nabla_2 g^i_\eta(p,q) &= \left(-p_\eta Y_\eta, (F_{(\eta,j)})_{j\in J(\eta)}, (p_\eta Y_\eta C_{(\eta,j)} - F_{(\eta,j)})_{j\in J(\eta)}\right). \end{aligned}$$

Demonstração. Dado $t \leq T$, substitua a seguinte alocação na desigualdade $(A-7)$

$$z_\eta = \begin{cases} (W^i_\eta, 0, 0), & \forall\, \eta \in D^{t-1}, \\ (0,0,0), & \forall\, \eta \in D^T \setminus D^{t-1}. \end{cases}$$

Tenho:

$$\sum_{\eta\in D_t} \gamma^{i,T}_\eta p_\eta W^i_\eta \leq \sum_{\eta\in D^T} \nu^i_\eta(z^{i,T}_\eta) \leq \sum_{\eta\in D} \nu^i_\eta(z^i_\eta). \tag{A-7}$$

Hipótese A1 assegura que, para cada $\eta \in D$, $\min_{l\in L} W^i_{(\eta,l)} > 0$. Hipótese A2 implica que $\|p_\eta\|_\Sigma > 0$, garantindo que, para cada $\mu \in D$, a seqüencia $(\gamma^{i,T}_\mu)_{T>t(\mu)}$ é limitada.

Pelo outro lado, dado $(z_\eta)_{\eta\in D^T} \in \Xi^T$, usando $(A-7)$, tenho que

$$\sum_{\eta\in D^T} \mathcal{L}^i_\eta(z_\eta, z_{\eta^-}, \gamma^{i,T}_\eta; p, q) \leq \sum_{\eta\in D} \nu^i_\eta(z^i_\eta).$$

Assim, fixo $\mu \in D^{T-1}$ e $a_\mu \in \Xi^T(\mu)$. Se avalio a desigualdade acima em

$$z_\eta = \begin{cases} z^i_\eta, & \forall\, \eta \neq \mu, \\ a_\mu, & \text{para } \eta = \mu, \end{cases}$$

obtenho

$$\nu_\mu^i(a_\mu) - \gamma_\mu^{i,T} g_\mu^i(a_\mu, z_{\mu^-}^i; p, q) - \sum_{\eta\in\mu^+} \gamma_\eta^{i,T} g_\eta^i(z_\eta^i, a_\mu; p, q) \leq \nu_\mu^i(z_\mu^i) + \sum_{\eta\in D\setminus D^T} \nu_\eta^i(z_\eta^i) \quad \text{(A-8)}$$

Como as funções $(g_\xi^i(\cdot\,; p, q); \xi \in D)$ são afins, tenho

$$\begin{aligned} g_\mu^i(a_\mu, z_{\mu^-}^i; p, q) &= \nabla_1 g_\mu^i(p, q) \cdot a_\mu - p_\mu \omega_\mu^i + \nabla_2 g_\mu^i(p, q) \cdot z_{\mu^-}^i \\ g_\eta^i(z_\eta^i, a_\mu; p, q) &= \nabla_1 g_\eta^i(p, q) \cdot z_\eta^i - p_\eta \omega_\eta^i + \nabla_2 g_\eta^i(p, q) \cdot a_\mu, \quad \forall \eta \in \mu^+. \end{aligned}$$

Como a alocação $(z_\eta^i)_{\eta\in D}$ factível no orçamento de i aos preços (p, q), juntamente com a monotonicidade das preferências, então

$$\begin{aligned} -p_\mu \omega_\mu^i + \nabla_2 g_\mu^i(p, q) \cdot z_{\mu^-}^i &= -\nabla_1 g_\mu^i(p, q) \cdot z_\mu^i, \\ \nabla_1 g_\eta^i(p, q) \cdot z_\eta^i - p_\eta \omega_\eta^i &= -\nabla_2 g_\eta^i(p, q) \cdot z_\mu^i, \quad \forall\, \eta \in \mu^+. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\gamma_\mu^{i,T} g_\mu^i(a_\mu, z_{\mu^-}^i; p, q) + \sum_{\eta\in\mu^+} \gamma_\eta^{i,T} g_\eta^i(z_\eta^i, a_\mu; p, q) =$$
$$\left(\gamma_\mu^{i,T} \nabla_1 g_\mu^i(p, q) + \sum_{\eta\in\mu^+} \gamma_\eta^{i,T} \nabla_2 g_\eta^i(p, q) \right) \cdot (a_\mu - z_\mu^i).$$

Usando $(A-8)$, concluo a demonstração. ⊠

Como D é contável e, para qualquer nó η, a seqüencia $(\gamma_\eta^{i,T})_{T\geq t(\eta)}$ é limitada, usando o Teorema de Tychonoff (ver Aliprantis e Border (1999, Theorem 2.57)), então existe uma subseqüência comum $(T_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{N}$ e multiplicadores não negativos, $(\gamma_\eta^i)_{\eta\in D}$, tais que, para cada $\eta \in D$, $\lim_{k\to\infty} \gamma_\eta^{i,T_k} = \gamma_\eta^i$ e

$$\gamma_\eta^i\, g_\eta^i(z_\eta^i, z_{\eta_-}^i; p, q) = 0,$$

onde, como escrevo acima, a última equação segue da monotonicidade estrita de u_η^i. Mais ainda, tomando o limite quando T vai para o infinito na desigualdade (13) obtenho que

$$\sum_{\eta\in D_t} \gamma_\eta^i p_\eta W_\eta^i \;\leq\; \sum_{\eta\in D} \nu_\eta^i(z_\eta^i), \quad \forall t \geq 0. \quad \text{(A-9)}$$

Portanto, a equação $(A-5)$ segue.

Como para qualquer $\eta \in D$, $\Xi^{s_1}(\eta) = \Xi^{s_2}(\eta)$ quando $\min\{s_1, s_2\} > t(\eta)$, segue da desigualdade do enunciado da Proposição acima, tomando o limite quando T vai para o infinito, que

$$\nu_\eta^i(a_\eta) - \nu_\eta^i(z_\eta^i) \leq \left(\gamma_\eta^i \nabla_1 g_\eta^i(p,q) + \sum_{\mu \in \eta^+} \gamma_\mu^i \nabla_2 g_\mu^i(p,q)\right) \cdot (a_\eta - z_\eta^i), \quad \forall\ a_\eta \in \Xi^{t(\eta)+1}(\eta). \quad \text{(A-10)}$$

Assim,

$$\left(\gamma_\eta^i \nabla_1 g_\eta^i(p,q) + \sum_{\mu \in \eta^+} \gamma_\mu^i \nabla_2 g_\mu^i(p,q)\right) \in \partial\left(\nu_\eta^i + \delta_{Z_1(\eta)} + \delta_{Z_2(\eta)}\right)(z_\eta^i),$$

onde as funções $\delta_{Z_h(\eta)} : \mathbb{R}^L \times \mathbb{R}^{J(\eta)} \times \mathbb{R}^{J(\eta)} \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$, $h \in \{1,2\}$, satisfazem

$$\delta_{Z_1(\eta)}(x_\eta, \theta_\eta, \varphi_\eta) = \begin{cases} 0, & \text{se } (x_\eta, \theta_\eta, \varphi_\eta) \in Z(\eta), \\ -\infty, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

$$\delta_{Z_2(\eta)}(x_\eta, \theta_\eta, \varphi_\eta) = \begin{cases} 0, & \text{se } x_\eta + \sum_{j \in J(\eta)} C_{(\eta,j)} \varphi_{(\eta,j)} \leq 2W_\eta, \\ -\infty, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

onde $z_\eta = (x_\eta, \theta_\eta, \varphi_\eta) \in \mathbb{R}^L \times \mathbb{R}^{J(\eta)} \times \mathbb{R}^{J(\eta)}$. Como o plano $(z_\eta^i)_{\eta \in D}$ é factível na economia, existe uma vizinhança V de z_η^i tal que $\delta_{Z_2(\eta)}(b) = 0$ para todo $b \in V$. Então, tenho que $\partial \delta_{Z_2(\eta)}(z_\eta^i) = \{0\}$. Além disso, segue do Teorema 23.8 e 23.9 em Rockafellar (1997), que existe $v_\eta^i \in \partial u_\eta^i(c_\eta^i)$ e $\kappa_\eta^i \in \partial \delta_{Z(\eta)}(x_\eta^i, \theta_\eta^i, \varphi_\eta^i)$ tal que

$$\gamma_\eta^i \nabla_1 g_\eta^i(p,q) + \sum_{\mu \in \eta^+} \gamma_\mu^i \nabla_2 g_\mu^i(p,q) = (v_\eta^i, 0, (C_{(\eta,j)} v_\eta^i)_{j \in J(\eta)}) + \kappa_\eta^i. \quad \text{(A-11)}$$

Note que, por definição, para cada $z_\eta \geq 0, \kappa \in \partial \delta_{Z(\eta)}(z_\eta) \Leftrightarrow 0 \leq \kappa(y - z_\eta)$, $\forall\ y \geq 0$, portanto, $\kappa_\eta^i \geq 0$. Assim, as desigualdades escritas no Lema saem da a equação (A-11). Pelo outro lado, monotonicidade estrita das funções u_η^i, asseguram que $v_\eta^i \gg 0$ e, portanto, segue do (A-3), que γ_η^i é *estritamente positivo.* □