2
Resultados Principais

Considere uma economia com horizonte infinito, tempo discreto, incerteza e informação simétrica. Seja S o conjunto de estados da natureza e $\mathbb{F}_t$ o conjunto de informação disponível no período $t \in T := \mathbb{N} \cup \{0\}$. $\mathbb{F}_t$ é a partição de S, e se $t' > t$, defina $\mathbb{F}_{t'}$ como mais fino que $\mathbb{F}_t$. Resumindo a estrutura de incerteza, defina a árvore de eventos como $D = \{(t, \sigma) \in T \times 2^S : t \in T, \sigma \in \mathbb{F}_t\}$, onde o par $\xi := (t, \sigma) \in D$ é chamado de nó e $t(\xi) := t$ é o período de tempo associado. Por simplicidade, em $t = 0$ não há incerteza, $\mathbb{F}_0 := \{S\}$, e há somente um nó, ξ_0.

Um nó $\xi' = (t', \psi')$ é o sucessor de $\xi = (t, \psi)$, chamado de $\xi' \geq \xi$, se $t' \geq t$ and $\psi' \subseteq \psi$. Dado $\xi \in D$, o conjunto dos seus sucessores é dado pela sub-árvore $D(\xi) := \{\mu \in D : \mu \geq \xi\}$. Além disso, para cada $\xi \neq \xi_0$, como $\mathbb{F}_{t(\xi)}$ é mais fino que $\mathbb{F}_{t(\xi)-1}$, existe apenas um predecessor ξ^-. Defino ξ' como um sucessor imediato de ξ quando ele está no conjunto $\xi^+ := \{\xi' \in D : \xi' \geq \xi, t(\xi') = t(\xi) + 1\}$.

Dado $k \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$, chamo de trajetória de incerteza qualquer conjunto de nós $(\mu_n; n \in \mathbb{N}, n \leq k) \subset D$ no qual todo μ_{n+1} é um sucessor imediato de μ_n, para cada $n < k$. Um conjunto $B \subset D$ não tem trajetórias finitas quando para qualquer $k \in \mathbb{N}$ e para cada trajetória de incerteza $(\mu_n; n \in \mathbb{N}, n \leq k) \subset B$, existe $\eta \in B$ tal que $\eta \in \mu_k^+$.

Em cada nó ξ na árvore de eventos D, existe um conjunto não vazio e finito de bens, L. Estes bens podem ser transacionadas em mercados competitivos por preços unitários $p_\xi = (p_{(\xi,l)})_{l \in L} \in \mathbb{R}^L_+$ por um conjunto não vazio de consumidores e, ao mesmo tempo, podem depreciar de um nó para os seus sucessores. Ao longo da árvore de eventos, esta depreciação segue uma tecnologia representada pode uma família de matrizes com entradas não negativas, $(Y_\xi)_{\xi \in D}$, onde $Y_\xi := ((Y_\xi)_{l,l'})_{(l,l') \in L \times L}$. Para cada $(l, l') \in L \times L$, $(Y_\xi)_{l,l'}$ é a quantidade do bem l obtido em ξ se uma unidade do bem l' é consumido em ξ^-. Além disso, seja $W_\xi \in \mathbb{R}^L_+$ os recursos físicos agregados até o nó ξ, enquanto $W = (W_\xi)_{\xi \in D}$ é o plano de tais recursos.

Existe um conjunto finito de ativos reais $J(\xi)$ em cada nó $\xi \in D$. Cada ativo $j \in J(\xi)$ tem duração curta, promete pagar a cesta de bens

$A_{(\mu,j)} \in \mathbb{R}^L_{++} \cup \{0\}$ at $\mu \in \xi^+$, e é transacionado em mercados competitivos por um preço unitário $q_{(\xi,j)} \in \mathbb{R}_+$. Note que, a não trivialidade das promessas financeiras implica que o seu valor de mercado leva em consideração todos os bens. Essa hipótese pode ser intuitivamente entendida como uma indexação dos ativos por um índice de preços de uma cesta referencial que pode variar com a incerteza da economia. Assim, independentemente dos preços, quando pelo menos uma porcentagem das promessas originais é honrada pelos devedores, os credores mantém um poder de compra mínimo para cada bem.

Como os ativos estão sujeitos à risco de crédito, os devedores tem que constituir garantias físicas para limitar as possíveis perdas dos credores. Mais precisamente, para cada unidade de um ativo $j \in J(\xi)$ vendido, devedores tem que comprar—e possivelmente podem consumir—uma cesta $C_{(\xi,j)} \in \mathbb{R}^L_+ \setminus \{0\}$ que é confiscada pelo mercado em caso de inadimplência. Por conveniência de notação, seja $J(D) := \{(\xi, j) \in D \times \cup_{\mu\in D} J(\mu) : j \in J(\xi)\}$ e $J^+(D) := \{(\xi, j) \in D \times \cup_{\mu\in D} J(\mu) : (\xi^-, j) \in J(D)\}$.

Mais ainda, mecanismos adicionais que dêem incentivos contra inadimplência podem existir. Os mercados financeiros podem recuperar, em cada nó $(\mu, j) \in J^+(D)$, pagamentos $F_{(\mu,j)}(p_\mu)$ que podem ser maiores, em caso de inadimplência, que o valor depreciado das garantias dadas em colateral. Nestes pagamentos, permito um pouco de generalidade supondo que os mecanismos adicionais podem induzir os devedores a pagar: uma porcentagem fixa da dívida remanescente, $\lambda_{(\mu,j)} \in [0, 1]$, e/ou o valor de mercado de uma dada cesta de bens, $y_{(\mu,j)} \in \mathbb{R}^L_+$. Estas variáveis exógenas podem ser intuitivamente interpretadas como a probabilidade do sistema judicial impor o pagamento integral da dívida remanescente, e uma multa real pecuniária, respectivamente. Mais formalmente, para cada unidade do ativo $j \in J(\xi)$, cada devedor paga em cada $\mu \in \xi^+$ o valor

$$F_{(\mu,j)}(p_\mu) := \min\{p_\mu A_{(\mu,j)}, p_\mu Y_\mu C_{(\xi,j)}\} + \lambda_{(\mu,j)} [p_\mu A_{(\mu,j)} - p_\mu Y_\mu C_{(\xi,j)}]^+$$
$$+ \min\{p_\mu y_{(\mu,j)}, (1 - \lambda_{(\mu,j)}) [p_\mu A_{(\mu,j)} - p_\mu Y_\mu C_{(\xi,j)}]^+\},$$

onde $(\lambda_{(\mu,j)}, y_{(\mu,j)}) \in [0, 1] \times (\mathbb{R}^L_{++} \cup \{0\})$ é a *efetividade* dos mecanismos adicionais no ativo j e no nó μ, e, para qualquer $z \in \mathbb{R}$, $[z]^+ := \max\{z, 0\}$.

Em relação aos mecanismos adicionais acima, não pretendo modelar explicitamente como os mercados financeiros impõem aos devedores pagamentos adicionais além do valor das garantias constituídas na operação de crédito. Represento tais mecanismos pela sua efetividade. Com esta abordagem, permito a inclusão nesta análise de mecanismos contra a inadimplência de cunho econômico (isto é, induzidos por contratos legais) e não-econômicos (exemplos:

sanções morais, perda de reputação), desde que estes mecanismos sejam resumidos por um vetor de efetividade. Mais importante, com esta abordagem, é possível focar nas conseqüências da efetividade de tais mecanismos da decisão individual.

DEFINIÇÃO. *Dado* $(\mu, j) \in J^+(D)$, *os mecanismos adicionais contra inadimplência são efetivos no ativo* j *e no nó* μ *quando tanto* $(\lambda_{(\mu,j)}, y_{(\mu,j)})$ *quanto* $A_{(\mu,j)}$ *são vetores não nulos. Os mecanismos adicionais são persistentemente efetivos em uma trajetória de incerteza* Θ*, se para qualquer* $\mu \in \Theta$*, existe* $j \in J(\mu^-)$ *no qual os mecanismos adicionais são efetivos em* μ*.*

Para qualquer trajetória de incerteza $\Theta := (\mu_n; n \in \mathbb{N})$ na qual os mecanismos contra inadimplência sejam persistentemente efetivos, defina $\mathrm{Eff}(\Theta) \subset D(\mu_1)$ como sendo o conjunto maximal conexo contendo Θ e tendo, em cada $\mu \in \mathrm{Eff}(\Theta)$, pelo menos um $j \in J(\mu^-)$ no qual os mecanismos de enforcement adicionais são efetivos em μ.[1] Note que, dado $(\mu, j) \in J^+(D)$, as definições acima não dependem somente dos parametros $(\lambda_{(\mu,j)}, y_{(\mu,j)})$, mas também da não-trivialidade das promessas originais. Assim, mecanismos adicionais efetivos significam que, em caso de inadimplência, um valor estritamente positivo de recursos é confiscado além dos valor das garantias depreciadas.

Ao contrário de qualquer modelo de equilíbrio, concentro-me na não existência de uma solução factível na economia para o problema individual. Por esta razão, é suficiente estudar um modelo de decisão onde haja um indivíduo de vida infinita, chamado de i, que prevê perfeitamente os preços de mercado e a efetividade dos mecanismos adicionais que dão incentivos contra a inadimplência.

O agente i tem dotações físicas $(w^i_\xi)_{\xi \in D} \in \mathbb{R}^{D \times L}_+$ e preferências representadas pela função de utilidade $U^i : \mathbb{R}^{D\times L}_+ \to \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$. Como os bens podem ser duráveis, chamo de W^i_ξ a dotação acumulada do agente i até o nó ξ, recursivamente definida por: $W^i_\xi = w^i_\xi + Y_\xi W^i_{\xi^-}$, quando $\xi > \xi_0$, e $W^i_{\xi_0} = w^i_{\xi_0}$, caso contrário. Seja $x_\xi \in \mathbb{R}^L_+$ a cesta de consumo autônomo no nó ξ (isto é, bens que não são garantias). Além disso, seja $\theta_{(\xi,j)}$ e $\varphi_{(\xi,j)}$ as quantidades do ativo $j \in J(\xi)$ compradas e vendidas no mesmo nó. Dado $(p, q) \in \Pi := \mathbb{R}^{D\times L}_+ \times \mathbb{R}^{J(D)}_+$,

[1] Um conjunto $B \subset D$ é conexo quando, para cada par $(\xi, \mu) \in B \times B$, tal que $\mu \geq \xi$, é a única trajetória de incerteza contida em B conectando ξ e μ. Dado $\xi \in D$, o conjunto $B \subset D(\xi)$ é o maximal relativo à propriedade A quando não existe outro subconjunto de $D(\xi)$ contendo ele mesmo e satisfazendo A.

o plano

$$(x,\theta,\varphi) := \big((x_\xi, \theta_{(\xi,j)}, \varphi_{(\xi,j)}); \xi \in D,\ j \in J(\xi)\big) \in \mathbb{E} := \mathbb{R}_+^{D\times L} \times \mathbb{R}_+^{J(D)} \times \mathbb{R}_+^{J(D)}$$

é *factível no orçamento* do agente i aos preços (p,q) quando

$$p_{\xi_0}(x_{\xi_0} - w^i_{\xi_0}) + p_{\xi_0} \sum_{j\in J(\xi_0)} C_{(\xi_0,j)}\varphi_{(\xi_0,j)} + \sum_{j\in J(\xi_0)} q_{(\xi_0,j)}(\theta_{(\xi_0,j)} - \varphi_{(\xi_0,j)}) \leq 0, \quad (2\text{-}1)$$

$$p_\xi(x_\xi - w^i_\xi) + p_\xi \sum_{j\in J(\xi)} C_{(\xi,j)}\varphi_{(\xi,j)} + \sum_{j\in J(\xi)} q_{(\xi,j)}(\theta_{(\xi,j)} - \varphi_{(\xi,j)}) \quad (2\text{-}2)$$

$$\leq p_\xi Y_\xi x_{\xi^-} + \sum_{j\in J(\xi^-)} \left(p_\xi Y_\xi C_{(\xi^-,j)}\varphi_{(\xi^-,j)} + F_{(\xi,j)}(p_\xi)(\theta_{(\xi^-,j)} - \varphi_{(\xi^-,j)})\right), \ \forall \xi > \xi_0.$$

Além disso, $(x,\theta,\varphi) \in \mathbb{E}$ é *factível na economia* se $x_\xi + \sum_{j\in J(\xi)} C_{(\xi,j)}\varphi_{(\xi,j)} \leq W_\xi$, para qualquer $\xi \in D$. Finalmente, dado $(p,q) \in \Pi$, o objetivo do agente i é maximizar a utilidade do seu consumo, $U^i((x^i_\xi + \sum_{j\in J(\xi)} C_{(\xi,j)}\varphi^i_{(\xi,j)})_{\xi\in D})$, escolhendo um plano factível no seu orçamento $(x^i,\theta^i,\varphi^i) \in \mathbb{E}$.

2.1 Mecanismos de enforcement e a escolha das garantias

Nesta seção, provo meu resultado principal: ao contrário do caso polar estudado por Araujo, Páscoa and Torres-Martínez (2002), a escolha de mercado das garantias se torna relevante quando existem mecanismos adicionais contra a inadimplência *persistentemente efetivos* além da tomada de garantias. Para atingir este objetivo, suponho as seguintes hipóteses.

Hipótese A1. *Para qualquer $\xi \in D$, $W^i_\xi \gg 0$.*

Hipótese A2. *Dado $z = (z_\xi) \in \mathbb{R}_+^{L\times D}$, defina $U^i(z) = \sum_{\xi\in D} u^i_\xi(z_\xi)$, onde para qualquer $\xi \in D$, a função $u^i_\xi : \mathbb{R}_+^L \to \mathbb{R}_+$ é côncava, contínua e estritamente crescente. Além disso, $U^i(W)$ é finito.*[2]

Dado $\eta \in D$, seja $\Omega(\eta)$ o conjunto de ativos $j \in J(\eta)$ nos quais os os mecanismos adicionais contra inadimplência são efetivos em algum nó

[2] Note que, como a utilidade é finita quando avaliada no recursos físicos agregados, a não negatividade das funções $u^i_\xi(\cdot)$ implica que, em qualquer alocação factível na economia, a utilidade do agente i é finita. Mais ainda, a concavidade das funções $(u^i_\xi)_{\xi\in D}$ implica que U^i é côncava. Assim, para qualquer $\sigma > 1$, $U^i(\sigma W)$ é também finito. De fato, $U^i(0.5W) < +\infty$, e, portanto, por concavidade, $U^i(W) \geq \tau U^i(0.5W) + (1-\tau)U^i(\sigma W)$, onde $\tau = \frac{2\sigma-2}{2\sigma-1} \in (0,1)$, que implica que $U^i(\sigma W) < +\infty$.

$\mu \in \eta^+$. Note que, dada uma trajetória de incerteza Θ na qual os mecanismos adicionais são persistentemente efetivos, se $\text{Eff}(\Theta)$ não tem trajetória finitas, então $\Omega(\eta) \neq \emptyset, \;\; \forall\, \eta \in \text{Eff}(\Theta)$.

TEOREMA. *Sob as hipóteses A1-A2, suponha que os mecanismos adicionais contra a inadimplência são persistentemente efetivos em uma trajetória de incerteza Θ e que $\text{Eff}(\Theta)$ não tem trajetórias finitas. Independentemente dos preços $(p,q) \in \Pi$, existem cotas superiores estritamente positivas, $(\Psi_\eta)_{\eta \in \text{Eff}(\Theta)}$, tais que se as garantias dadas em colateral satisfazem*

$$\min_{j \in \Omega(\eta)} \|C_{(\eta,j)}\|_\Sigma < \Psi_\eta, \qquad \forall\, \eta \in \text{Eff}(\Theta),$$

então o problema do agente i não tem uma solução factível na economia.

DEMONSTRAÇÃO. Para tornar a notação mais sucinta, dado $z = (z_1, \ldots, z_m) \in \mathbb{R}^m_+$, seja $\|z\|_\Sigma := \sum_{s=1}^m z_s$ and $\|z\|_{\max} := \max_{1 \le s \le m}\; z_s$. Fixe $\sigma > 1$. Dado $\eta \in \text{Eff}(\Theta)$, defina

$$\overline{\pi}_\eta := \frac{U^i(W)}{\min_{l \in L} W^i_{(\eta,l)}}, \qquad \text{e} \qquad \underline{\pi}_\eta := \frac{u^i_\eta(\sigma W_\eta) - u^i_\eta(W_\eta)}{\sigma \|W_\eta\|_{\max}}.$$

Assim, para cada $\eta \in \text{Eff}(\Theta)$,

$$\Upsilon_\eta := \min_{j \in \Omega(\eta)} \sum_{\mu \in \eta^+} \min \left\{ \lambda_{(\mu,j)} \underline{\pi}_\mu \min_{l \in L} A_{(\mu,j,l)} + \underline{\pi}_\mu \min_{l \in L} y_{(\mu,j,l)} \;,\; \underline{\pi}_\mu \min_{l \in L} A_{(\mu,j,l)} \right\}$$

é estritamente positivo, onde $A_{(\mu,j,l)}$ (resp. $y_{(\mu,j,l)}$) significa a l-ésima coordenada de $A_{(\mu,j)}$ (resp. $y_{(\mu,j)}$). Assim, suponha que, em cada $\eta \in \text{Eff}(\Theta)$,

$$\min_{j \in \Omega(\eta)} \|C_{(\eta,j)}\|_\Sigma < \Psi_\eta := \frac{\Upsilon_\eta}{\overline{\pi}_\eta}.$$

Suponha que, para algum $(p,q) \in \Pi$, existe uma solução ótima $(x^i, \theta^i, \varphi^i) \in \mathbb{E}$ factível no orçamento do agente i e factível na economia para o problema do indivíduo i. Segue do Lemma 2 (ver Apêndice) que existem, para cada $\eta \in D$, multiplicadores $\gamma^i_\eta \in \mathbb{R}_{++}$ e retornos não pecuniários (super-gradientes) $v^i_\eta \in \partial u^i_\eta \left(x^i_\eta + \sum_{j\in J(\eta)} C_{(\eta,j)}\varphi^i_{(\eta,j)}\right)$ tais que,[3] para cada $j \in J(\eta)$,

$$\gamma^i_\eta p_\eta \geq v^i_\eta + \sum_{\mu\in\eta^+} \gamma^i_\mu p_\mu Y_\mu, \tag{2-3}$$

$$\gamma^i_\eta q_{(\eta,j)} \geq \sum_{\mu\in\eta^+} \gamma^i_\mu F_{(\mu,j)}(p_\mu). \tag{2-4}$$

Além disso, a família de multiplicadores $(\gamma^i_\eta)_{\eta\in D}$ sempre pode ser construída para satisfazer(ver Lema 2)

$$\gamma^i_\eta p_\eta W^i_\eta \leq \sum_{\eta\in D} u^i_\eta \left(x^i_\eta + \sum_{j\in J(\eta)} C_{(\eta,j)}\varphi^i_{(\eta,j)} \right) \leq \sum_{\eta\in D} u^i_\eta(W_\eta), \tag{2-5}$$

onde a última desigualdade segue da Hipótese 2 juntamente com o fato do consumo de i ser factível na economia. Mais ainda, é possível achar cotas superiores e inferiores para $\gamma^i_\eta p_\eta$ em cada $\eta \in D$. Hipótese A1 e equação (2-5) asseguram que $\gamma^i_\eta \|p_\eta\|_\Sigma \leq \overline{\pi}_\eta$. Dado $\eta \in D$, seja $c^i_\eta = x^i_\eta + \sum_{j\in J(\eta)} C_{(\eta,j)}\varphi^i_\eta$ a cesta de consumo escolhida pelo agente i em η. Usando equação (2-3), tenho que

$$\gamma^i_\eta p_\eta(\sigma W_\eta - c^i_\eta) \geq v^i_\eta(\sigma W_\eta - c^i_\eta) \geq u^i_\eta(\sigma W_\eta) - u^i_\eta(c^i_\eta) \geq u^i_\eta(\sigma W_\eta) - u^i_\eta(W_\eta) > 0.$$

Então, $\gamma^i_\eta \|p_\eta\|_\Sigma \geq \underline{\pi}_\eta$. Em cada nó $\eta \in \text{Eff}(\Theta)$, como $\Omega(\eta) \neq \emptyset$ e $\min_{j\in\Omega(\eta)} \|C_{(\eta,j)}\|_\Sigma < \Psi_\eta$, existem $j \in \Omega(\eta)$ tais que

$$\gamma^i_\eta (p_\eta C_{(\eta,j)} - q_{(\eta,j)}) \leq \gamma^i_\eta p_\eta C_{(\eta,j)} - \sum_{\mu\in\eta^+} \gamma^i_\mu F_{(\mu,j)}(p_\mu) < 0, \tag{2-6}$$

onde a última desigualdade segue da definição da cota superior para as garantias. Finalmente, usando o Lema 1 no Apêndice, concluo que o problema do agente i não tem solução, contradizendo a otimalidade de $(x^i, \theta^i, \varphi^i) \in \mathbb{E}$ sob os preços $(p, q) \in \Pi$. $\square$

Note que, construção, as cotas superior para as garantias, $(\Psi_\eta)_{\eta\in\text{Eff}(\Theta)}$, dependem somente dos primitivos da economia e podem ser achadas facilmente para objetivos computacionais.

[3]Dado uma função côncava $f : X \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ e $x \in X$, o super-diferencial de f, $\partial f(x)$, é definido como o conjunto de pontos $p \in X$, chamados de super-gradientes, tais que $f(y) - f(x) \leq p(y - x)$, $\forall y \in X$.