

## 5 Materiais e Métodos

O modo de formular um Problema de Roteamento de Veículos tem impacto direto no desempenho de algoritmos de solução, bem como as características do problema influenciam a possibilidade de solução. Desta forma, nesta seção serão abordadas as particularidades relevantes do problema, já previamente explicitadas ao longo da dissertação, seguindo os critérios seguintes, baseados na taxonomia apresentada por Bodin e Golden (1981):

- Tempos para servir determinado nó restritos por janelas de tempo;
- Frota multiveículos, com tempos de serviço iguais para todos os veículos;
- Frota homogênea, com veículos sujeitos às mesmas restrições de capacidade;
- Natureza da demanda, tempo e custos determinísticos;
- Localização da demanda nos vértices;
- Grafo direcionado;
- Operação de recolhimento;
- Objetiva minimização dos custos de operação na rota;
- Sem restrições impostas aos arcos.

Trata-se de um problema de programação linear mista. Tendo em vista os critérios citados, uma formulação clássica do problema considera um grafo orientado completo  $G = (N, A)$ , em que  $N = C \cup \{0, n+1\}$ ,  $C = \{1, \dots, n\}$  é o conjunto de nós que representam os pontos de atendimento e 0 e  $n+1$  representam o depósito. O conjunto  $A = \{(i, j): i, j \in N, i \neq j, i \neq n+1, j \neq 0\}$  correspondem aos arcos associados às conexões entre nós e todas as rotas começam em 0 e terminam em  $n+1$ . Os veículos  $k \in K$ ,  $k = \{1, 2, \dots, m\}$  partem do depósito. Também são definidos as variáveis e os parâmetros, que seguem a seguinte notação:

- $x_{ijk}$ : variável binária que assume valor 1 quando o veículo  $k$  opta pela utilização do arco  $(i, j)$  e 0, caso contrário;
- $y_k$ : variável binária que assume valor 1 quando se opta pela utilização do veículo  $k$  e 0, caso contrário;

- $c_{ij}$  ( $c_{ij} \geq 0$ ): custo para utilizar o arco que vai do nó  $i$  ao nó  $j$ , sendo função da distância e do preço do combustível;
- $d_i$  ( $d_i \geq 0$ , sendo  $d_0 = d_{n+1} = 0$ ): demanda no nó  $i$ ;
- $t_{ij}$  ( $t_{ij} \geq 0$ ): tempo de viagem entre os nós  $i$  e  $j$ , sendo função da distância;
- $v_i$  ( $v_i \geq 0$ ): tempo de atendimento ao nó  $i$ ;
- $s_{ik}$  ( $s_{ik} \geq 0$ , sendo  $s_{0k} = s_{n+1,k} = 0$ ): instante de tempo no qual se iniciam o serviço no nó  $i$  pelo veículo  $k$ ;
- $[a_i, b_i]$  ( $b_i \geq a_i$ ): janelas de tempo, onde  $a_i$  representa o instante de tempo mais cedo possível para começar o serviço no nó  $i$  (sendo  $a_0 = a_{n+1} = 0$ ) e  $b_i$  representa o mais tarde possível (sendo  $b_0 = b_{n+1} = \infty$ );
- $q_k$  ( $q_k \geq 0$ ): capacidade do veículo  $k$ ;
- $c_k$  ( $c_k \geq 0$ ): custo do veículo  $k$ ;
- $T_k$  ( $T_k \geq 0$ ): tempo de ciclo do veículo  $k$ ;
- $k_k$  ( $k_k \geq 0$ ): custo do tempo parado para o veículo  $k$ .

As equações (8) a (14) que seguem são tradicionais do roteamento de veículos, podendo ser encontradas na literatura como, por exemplo, em Arenales *et al.* (2007). Também as equações (15) e (16) são corriqueiras em formulações que incluem janelas de tempo. No entanto, diferente do modelo tradicional, o equacionamento aqui apresentado propõe uma extensão, englobando rotas múltiplas, frota heterogênea, dimensionamento da frota e penalidade acrescida ao tempo de espera. Desta forma, torna-se mais consistente e aderente à realidade do que os modelos clássicos.

Já a equação (17) foi desenvolvida por Kallehauge (2006), e sua utilização é, ainda, incipiente. A formulação completa para o problema se segue:

Minimizar

$$z = \sum_{k \in K} \sum_{(i,j) \in A} c_{ij} x_{ijk} + \sum_{k \in K} c_k y_k + \sum_{i \in C, k \in K} s_{ik} k_k \tag{8}$$

Sujeito a

$$\sum_{k \in K} \sum_{j \in N} x_{ijk} = 1, \forall i \in C \tag{9}$$

$$\sum_{i \in C} d_i \sum_{j \in N} x_{ijk} \leq (q_k \times y_k), \forall k \in K \tag{10}$$

$$\sum_{i \in N} \sum_{j \in N} (t_{ij} + v_i) x_{ijk} \leq T_k, \forall k \in K \tag{11}$$

$$\sum_{j \in N} x_{0jk} = y_k, \forall k \in K \tag{12}$$

$$\sum_{i \in N} x_{ihk} - \sum_{j \in N} x_{hjk} = 0, \forall h \in C, \forall k \in K \quad (13)$$

$$\sum_{i \in N} x_{i,n+1,k} = y_k, \forall k \in K \quad (14)$$

$$(a_i \times y_k) \leq s_{ik}, \forall i \in N - \{0\}, \forall k \in K \quad (15)$$

$$s_{ik} \leq (b_i \times y_k), \forall i \in N - \{0\}, \forall k \in K \quad (16)$$

$$s_{ik} - s_{jk} + (b_i + (t_{ij} + v_i) - a_j)x_{ijk} \leq b_i - a_j, \forall (i, j) \in A, \forall k \in K \quad (17)$$

$$x_{ijk} \in \{0,1\}, \forall i, j \in N, \forall k \in K \quad (18)$$

$$y_k \in \{0,1\}, \forall k \in K \quad (19)$$

A função objetivo (8) representa a minimização dos custos ou distâncias, envolvendo duas variáveis binárias,  $x_{ijk}$  e  $y_k$ , para opção de utilização do arco e mais um veículo, respectivamente. Incluí, ainda, uma parcela que penaliza o tempo de veículo ocioso. As restrições (9) asseguram que somente um veículo chega ao ponto  $i$ , (10) impedem que a demanda de cada rota do veículo  $k$  ultrapasse a capacidade deste, caso utilizado, enquanto (11) limita o tempo de viagem ao tempo de ciclo. As restrições (12), (13) e (14) representam restrições de fluxos em redes, ou seja, cada veículo  $k$ , se utilizado, parte somente uma vez do depósito (nó 0), deixa o nó  $h$  se e somente se entrar neste nó e retorna ao depósito (nó  $n+1$ ) somente uma vez, respectivamente. Esta última restrição é redundante, mas foi mantida para enfatizar a estrutura de redes. As restrições (15) e (16) fazem com que as janelas de tempo sejam respeitadas. As restrições (17) são equivalentes às tradicionais restrições no que se refere à eliminação de subrotas:

$$\sum_{i, j \in S} x_{ijk} \leq |S| - 1, \forall S \subseteq \{2, \dots, n\}, \forall k \in K \quad (20)$$

$$u_{ik} - u_{jk} + nx_{ijk} \leq n - 1 \quad (21)$$

Por simplicidade, tomaremos as equações (21), em que  $u_{ik}$  e  $u_{jk}$  identificam a posição na rota em que os clientes  $i$  e  $j$  são visitados pelo veículo  $k$ , respectivamente, e  $n$  é o número de clientes atendidos. Como estas restrições não são intuitivas, é cabível analisar seu funcionamento. Assim, se  $x_{ijk} = 1$ , temos que  $u_{ik} - (u_{ik} + 1) + n \leq n - 1$ , o que implica que  $n - 1 \leq n - 1$  e a equação será satisfeita; se  $x_{ijk} = 0$ , temos que  $u_{ik} - u_{jk} \leq n - 1$ . Assim, neste segundo caso, as restrições não são atendidas quando  $u_{ik} > n$  e algum  $u_{jk} < 2$ , que é o que acontece quando as subrotas existem. Em todos os outros casos, a restrição é satisfeita.

Avaliando a equação (17) quanto à funcionalidade de sua janela de tempo, pode-se perceber que se  $x_{ijk} = 1$ ,  $s_{ik} - s_{jk} + b_i + t_{ij} - a_j \leq b_i - a_j$  e, portanto,  $s_{jk} - s_{ik} \geq t_{ij}$ . Ou seja, a restrição obriga que o tempo de chegada no cliente imediatamente posterior, partindo de um cliente atendido, seja maior que o tempo de deslocamento entre eles, o que é obviamente necessário. Se  $x_{ijk} = 0$ ,  $s_{ik} - s_{jk} \leq b_i - a_j$ , o que força os tempos de chegada serem cada vez mais tardios no cliente imediatamente posterior se seu limite inferior na janela de tempo for mais tardia. Desta forma, a resolução implicará na postergação deste cliente e no seqüenciamento, sempre que possível, de clientes com janelas de tempo mais próximas.

Portanto, pode-se concluir que as restrições (17) são vantajosas com relação às tradicionais na medida em que incluem em sua formulação o problema de eliminação de subrotas e das janelas de tempo simultaneamente, o que a torna abrangente. Desta forma, é reduzido o número de restrições associadas ao algoritmo, tornando-o mais eficiente. Ainda, é evitada a complexidade da composição de subconjuntos exigida por equações tradicionais de eliminação de subrotas. Por fim, é permitida a obtenção de uma solução linear, o que exige menos esforços matemáticos e facilita a implementação.

Tal linearidade não é encontrada no trabalho de Arenales *et al.* (2007), por exemplo. Para o autor, as equações 23 que se seguem seriam a linearização de  $x_{ijk}(s_{ik} + t_{ij} - s_{jk}) \leq 0, \forall (i, j) \in A, \forall k \in K$ , já que, se o veículo  $k$  deixa o nó  $i$  e viaja para o nó  $j$ , então ele não pode chegar em  $j$  antes de  $s_{ik} + t_{ij}$ . Porém, tais equações não se comportam de maneira linear.

$$s_{ik} + t_{ij} \leq s_{jk} + (1 - x_{ijk})M_{ij}, \forall (i, j) \in A, \forall k \in K \quad (22)$$

$$M_{ij} = \max\{b_i + s_{ik} + t_{ij}, 0\}$$

Ainda como esteio para utilização da restrição (17) nesta dissertação, podemos citar Desrochers e Laporte (1991), que realiza um roteamento capacitado análogo:

$$u_{ik} - u_{jk} + Qx_{ijk} \leq Q - q_j \forall i, j \in C, \forall k \in K \quad (23)$$

Nesta equação,  $u_{ik}$  e  $u_{jk}$  representam a carga do veículo  $k$  após visitar os consumidores  $i$  e  $j$ , respectivamente,  $q_j$  é a demanda do vértice  $j$  e  $Q$  é a capacidade do veículo da frota.

Finalmente, as restrições (18) e (19) exigem que as variáveis  $x_{ijk}$  e  $y_k$  sejam binárias.

Durante este estudo, foram avaliadas, ainda, outras formulações e variações de restrições encontradas na literatura. Goel e Gruhn (2006) considera múltiplos depósitos e frotas heterogêneas. Kallehaug (2006) apresenta uma abordagem do PRVJT utilizando notação vetorial e incluindo minimização do número de rotas dado um número fixo de veículos. Azi *et al.* (2006) aborda o problema de bens perecíveis e maximiza o atendimento para um único veículo.

## 5.1. Testes

Antes da execução do problema a que se propõe este estudo, que envolve na ordem de  $2 \times 10^4$  variáveis, multiplicadas pelo número de veículos a princípio desconhecido, foram realizados testes utilizando problemas menores, solucionáveis manualmente. A proposta destes testes é dar credibilidade ao algoritmo, visto que seus resultados podem ser conferidos com uma otimização conhecida. Ainda, a apresentação de um exemplo em menor escala mostra quais dados foram inseridos no problema real, que, devido à sua grande dimensão, não são apresentados fisicamente na dissertação.

Desta forma, será apresentada na Tabela 7 a matriz origem-destino (matriz O/D) de distâncias, utilizada para efetuar os testes. É importante ressaltar que o algoritmo exige que  $i$  seja diferente de  $j$  e o nó 0 representa o depósito enquanto os outros são clientes.

Tabela 7: Matriz O/D utilizada para testes iniciais

De(i)/Para(j)	0	1	2	3	4	5
0	0	20	12	4	32	28
1	28	0	24	24	8	20
2	16	16	0	4	4	12
3	24	32	36	0	36	32
4	20	20	12	12	0	36
5	8	28	28	16	24	0

A matriz de tempos foi obtida proporcionalmente à matriz de distâncias, tomando-se uma velocidade de 40 km/h, o tempo de atendimento e o custo de combustível foram considerados iguais a 1, por simplicidade. O custo do veículo foi estipulado num valor arbitrário de 100.

Foram testadas diversas variações de casos, que serão apresentadas partindo do caso mais simples até o último caso, que é o mais abrangente:

- Sem restrições;
- Sem restrições, forçando subrotas;
- Restrições de demanda;
- Restrições de tempo de ciclo;
- Janelas de tempo;

Para o caso inicial sem restrições, foram utilizados no modelo valores suficientemente altos de demanda e intervalos de tempo abrangendo todo o período de coleta. Como exemplo, foram utilizados os valores de demanda da Tabela 8 e uma capacidade do veículo igual a 100, tempo de ciclo também igual a 100 com janelas de tempo de 0 a 24 horas, arbitrariamente estipulados.

Tabela 8: Valores de demanda utilizados para o caso inicial

Ponto (i)	1	2	3	4	5
Demanda	5	3	6	4	3

Como este caso não apresenta restrições, basta verificar a coerência da rota  $\{0,3,1,4,2,5,0\}$  obtida pelo AIMMS, iniciando e terminando no depósito com custo total igual a  $4 + 32 + 8 + 12 + 12 + 8 + 100 = 176$ . Porém, vale a pena verificar com mais atenção a restrição de subrotas, forçando sua formação através de valores altos nos arcos partindo de qualquer cliente que tem como destino o depósito ou do partindo do depósito para qualquer cliente, como, por exemplo, 100. Neste segundo teste, a rota obtida continuou respeitando a condição do depósito como nó inicial e final, mesmo aumentando os custos para  $100 + 8 + 12 + 12 + 16 + 100 + 100 = 348$ , seguindo a rota  $\{0,1,4,2,5,3,0\}$ .

Quando são adicionadas restrições de capacidade do veículo, o número destes deve aumentar, pois um torna-se insuficiente para atendimento total dos clientes, o que faz com que a solução não exista. Cada veículo atenderá uma rota distinta. Como exemplo, restringiu-se a capacidade para 12, mantendo-se a matriz de tempos e as demandas individuais dos clientes. As rotas obtidas pelo AIMMS para este caso são  $\{0,2,1,4,0\}$  e  $\{0,3,5,0\}$  com custos  $12 + 16 + 8 + 20 + 100 = 156$  e  $4 + 32 + 8 + 100 = 144$ , demandas 12 e 9 e tempos de ciclo 4,4 e 3,1, respectivamente. Assim, se mudarmos o tempo de ciclo total por veículo para 4, o AIMMS deve encontrar 3 rotas, o que de fato acontece:  $\{0,3,0\}$ ,  $\{0,1,4,0\}$  e

{0,2,5,0}, com custos  $4 + 24 + 100 = 128$ ,  $20 + 8 + 20 + 100 = 148$  e  $12 + 12 + 8 + 100 = 132$ .

Para a inclusão das janelas de tempo, as mudanças feitas com relação ao caso inicial foram nos clientes 3 e 1, que eram os primeiros atendidos. Desta forma, forçou-se que estes fossem atendidos após 20 horas de expediente. Assim, os pontos que eram atendidos primeiro mudaram quando forçado pela janela de tempo mais tardia. As horas de chegada do veículo em cada cliente são apresentadas na Tabela 9.

Tabela 9: Horas de chegada do veículo em cada cliente

Cliente	1	2	3	4	5
Hora de Chegada	21,8	0	20	1,1	23,3

A Figura 13 apresenta os grafos das rotas obtidas pelas variações apresentadas até então.

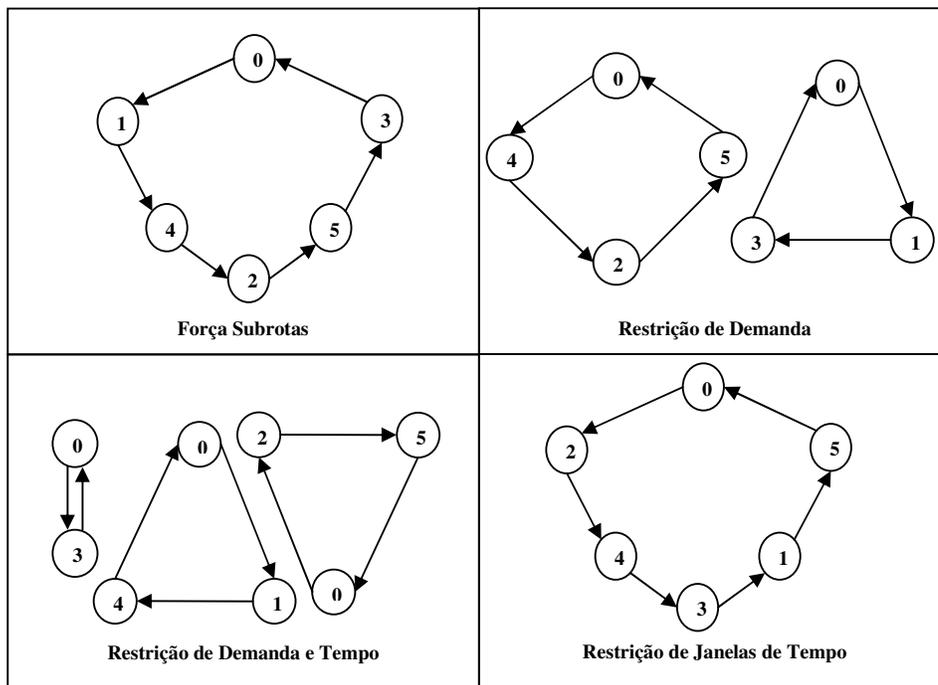


Figura 13: Grafos das variações no roteamento de veículos

O emprego de várias das restrições simultaneamente também foi testado e o algoritmo também respondeu positivamente à conjugação destes casos.

Por fim, foram feitos testes com excesso de veículos, escassez destes e forçando a utilização de veículos mais caros. Neste último caso, atribuiu-se um valor alto de custo para o veículo e limitou-se a capacidade ou tempo de ciclo de atendimento dos demais. Em aumentando os limites dos veículos mais baratos,

eles entraram no roteamento ótimo, até a substituição definitiva do veículo mais caro. Na Tabela 10 são apresentados os custos dos veículos, arbitrariamente estabelecidos.

Tabela 10: Custos dos veículos

Veículos	1	2	3	4	5
Custo	1	1	10	10	100

A Tabela 11 mostra a variação das rotas em função das capacidades dos veículos, considerando um valor suficientemente alto para os tempos de ciclo.

Tabela 11: Variação de rotas de acordo com as capacidades dos veículos

Veículos	Caso 1		Caso 2		Caso 3	
	Capacidade	Rota	Capacidade	Rota	Capacidade	Rota
1	12	{0,2,1,4,0}	1		1	
2	12	{0,3,5,0}	1		1	
3	12		12	{0,2,1,4,0}	10	
4	12		12	{0,3,5,0}	10	
5	12		100		100	{0,2,4,3,1,5,0}

No primeiro caso, os dois veículos mais baratos possuem capacidade para atender as demandas, sendo estes utilizados. No segundo, as suas capacidades são anuladas, donde espera-se que sejam utilizados os veículos 3 e 4, o que acontece. Por fim, estes mesmos veículos não podem atender a demanda total de 21 unidades, o que forçaria a utilização de mais veículos. Como os veículos 1 e 2 não têm capacidade para atender nenhum nó, a única maneira possível é utilizar o veículo mais caro, o que ocorre.