3
Sistemas de Roteamento

Esta seção da dissertação consiste numa revisão sobre roteamento de veículos, apresentando sua taxonomia, o que inclui a conceituação, os tipos de problemas e suas características e o estado da arte dos algoritmos de roteamento e sistemas de roteamento. Com isso, visa-se ao conhecimento básico do ferramental utilizado para solucionar problemas tal qual o proposto por esta dissertação, possibilitando um posterior aprofundamento em um algoritmo específico. Este aprofundamento tem como esteio as necessidades envolvidas na dissertação, tendo sido supostas as características da situação em estudo, ou seja, a logística envolvida na coleta de óleos de fritura usados em estabelecimentos comerciais selecionados.

Segundo Goldbarg e Luna (2000), o sistema de roteamento pode ser considerado como um conjunto organizado de meios que tem como objetivo responder às demandas localizadas em arcos ou em nós de qualquer rede de transportes. Tal sistema, globalmente, é complexo, podendo ser decomposto em três partes: estratégica, tática e logística.

A subdivisão se inicia pelos macroaspectos do sistema, que sofrem influências externas e determinam sua organização: são as decisões estratégicas, tais como mercado de atuação, dimensões da qualidade, localização de fábricas e depósitos, tipo de veículos e restrições legais. Tais decisões possuem efeito duradouro e afetam totalmente a otimização da operação.

Iniciando o processo de construção do sistema, devem ser tomadas decisões de forma mais localizada e específica, as decisões táticas, a saber: número de rotas, número de veículos, contratação de mão-de-obra, regime de trabalho, localização de garagens, nível de estoque. É óbvio que tais distinções nos níveis de decisão não são muito claras, especialmente pela grande inter-relação existente entre essas partes ou etapas do funcionamento do sistema.

Por fim, serão avaliados os itens mais flexíveis do processo, como a alocação da frota de veículos e da mão-de-obra, de maneira a garantir um plano logístico efetivo atendendo o grupo de clientes determinado. Trata-se das decisões operacionais, predominantes no funcionamento do sistema e que possuem característica combinatória e grande dificuldade de solução, denominadas problema de roteamento de veículos (PRV).

Formalmente, o PRV é o processo de determinação de um ou mais roteiros ou seqüências de paradas (*scheduling*) a serem cumpridos por veículos de uma frota, objetivando atender um conjunto de pontos geograficamente dispersos, em locais pré-determinados (Cunha, 1997), onde cada roteiro se inicia e termina em um mesmo depósito ou base dos veículos, cada local é visitado somente uma vez e o custo total de atendimento é mínimo (Laporte *et al.,* 2000). Os custos podem ser minimizados através da redução de prazos, de caminhos, do emprego de mão-de-obra ou de veículos, de acidentes ou avarias. Ainda, podem ser repensados os intervalos de trabalho, carregamento e alocações dos meios de transporte, a política de atendimento e controle de estoques (Goldbarg e Luna, 2000).

Novaes (2004) considera dois outros fatores fundamentais no problema de roteamento de veículos: objetivos e restrições. Como objetivos, o PRV visa proporcionar um serviço de alto nível aos clientes mantendo um baixo custo operacional e de capital. Ainda, devem ser obedecidas restrições, tais como completar rotas com os recursos disponíveis cumprindo os compromissos assumidos com os clientes (horário de atendimento, quantidade etc.); respeitar os limites de tempo impostos pela jornada de trabalho das pessoas envolvidas (motoristas, ajudantes etc.); respeitar as restrições de trânsito (velocidade máxima, horários de carga/descarga, tamanho máximo dos veículos nas vias públicas, mão de vias etc.). Quando o roteamento envolve não somente aspectos espaciais ou geográficos, mas também tais restrições, os problemas são então denominados roteirização e programação de veículos.

Quanto à complexidade matemática, o PRV é um problema combinatório do tipo NP (*non-deterministic polynomial time*) difícil, ou seja, pertence ao conjunto de problemas que são resolvíveis em tempo polinomial alto.

O primeiro problema de roteirização a ser estudado foi o problema do caixeiro viajante ou PCV (*travelling salesman problem* ou *TSP*), que consiste em encontrar o roteiro ou seqüência de cidades a serem visitadas por um caixeiro viajante que minimize a distância total percorrida e assegure que cada cidade seja visitada exatamente uma vez. Outro problema de importância para a área de roteamento de veículos é o problema do carteiro chinês (PCC), que consiste em cobrir todos os arcos de uma rede partindo e chegando ao mesmo nó percorrendo uma distância total mínima. Os dois problemas serão mais detalhados a seguir.

3.1.
O Problema do Caixeiro Viajante (PCV)

O PCV teve origem no jogo *Around the World*, proposto por Hamilton em 1857, feito sobre um dodecaedro em que cada vértice estava associado a uma cidade. O grafo deste problema é mostrado na Figura 9 (a), bem como uma possível solução é proposta na Figura 9 (b). Esta solução passou a ser denominada ciclo hamiltoniano. Um grafo conexo é dito hamiltoniano se existe um ciclo (caminho fechado) neste contendo todos os seus vértices. Se um caminho não é fechado e inclui todos os vértices do grafo, o chamamos de caminho hamiltoniano.

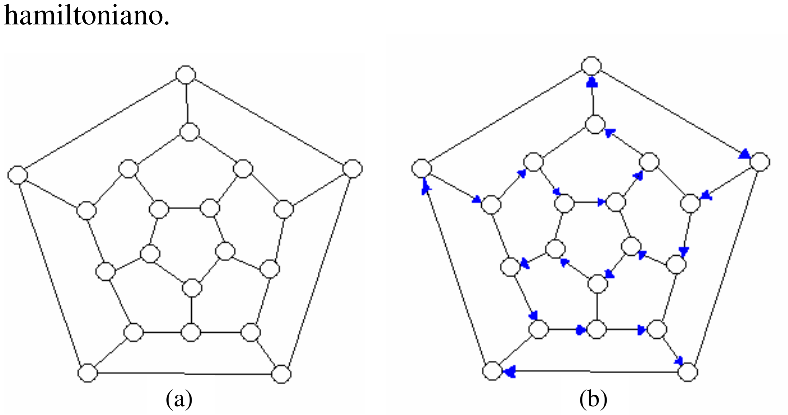

Figura 9: Jogo de Hamilton. Fonte: Goldbarg e Luna (2000)

Dantzig *et al.* (1954) formularam o PCV como um problema de programação 0-1 sobre um grafo $G = (N, A)$ onde N é o conjunto de nós (cidades) e A é o conjunto de arcos, como se segue:

Minimizar

$$z = \sum_i \sum_j c_{ij} x_{ij} \tag{1}$$

Sujeito a:

$$\sum_{i=1}^{N} x_{ij} = 1 \qquad j = 1,2,\ldots,N \tag{2}$$

$$\sum_{j=1}^{N} x_{ij} = 1 \qquad i = 1,2,\ldots,N \tag{3}$$

$$\sum_{i,j \in S} x_{ij} \leq |S| - 1 \qquad (4)$$

onde $x_{ij} = 1$ se a solução considerar ir de i à j, caso contrário, $x_{ij} = 0$; c_{ij} = distância da cidade i à cidade j; $c_{ii} = M$, onde M é um valor bastante grande em relação às distâncias do problema, de modo a para garantir que o caixeiro não vá à cidade i logo após ter deixado a cidade i; $c_{ij} \geq 0$ e $|S|$ representa o número de vértices do subgrafo S.

A função objetivo (1) permite obter o comprimento total de todos os arcos incluídos no percurso; as restrições (2) asseguram que se passe uma vez apenas por cada cidade; as restrições (3) obrigam que se deixe cada cidade uma única vez e as restrições (4) eliminam circuitos pré-hamiltonianos (sub-rotas). Para cada um destes circuitos é necessária uma restrição do tipo (4), justificando o número de $O(2^n)$ restrições[4].

Nem sempre é possível encontrar um grafo cujas propriedades possibilitem o cumprimento de um ciclo hamiltoniano. Desta forma, muitas vezes considera-se um grafo completamente conectado (pode-se ir de um ponto ao outro sem passar por qualquer ponto intermediário), que satisfaz à desigualdade triangular (a distância mínima entre todos os pares de pontos é igual aos arcos que os ligam diretamente) e que sua matriz de distâncias é simétrica. O PCV que atende a essas considerações é denominado PCV1. Essas considerações são feitas sem perda de generalidade, visto que, segundo Papadimitriou (1977), encontrando a solução do PCV1, existe igualmente uma solução para o PCV.

A seguir, serão apresentados problemas relativos ao caixeiro viajante com algumas considerações especiais, que possibilitam aplicações específicas.

- **PCVS-C:** o Problema do Caixeiro Viajante Simétrico com *Cluster* (PCVS-C) ou *Symmetric clustered traveling salesman problem (SCTSP)* é um caso especial de PCV simétrico, em que existem *clusters* (grupamentos ou conjuntos de nós) que possuem restrições que os obrigam a estar em uma determinada seqüência de atendimento (Goldbarg e Luna, 2000).
- **PCVG:** proposto por Ong em 1982, o Problema do Caixeiro Viajante Generalizado (PCVG) é semelhante ao PCVS-C, mas cada grupamento formado

[4] $O(2^n)$ é uma notação que representa a ordem de complexidade do procedimento, ou seja, neste caso o procedimento possui complexidade 2^n.

deve contribuir com um certo número de nós para o ciclo hamiltoniano. A versão *equality* exige que apenas um vértice em cada *cluster* seja visitado (Goldbarg e Luna, 2000).

- **PCVB:** o Problema do Caixeiro Viajante *Backhauls* (PCVB) pode ser considerado um caso especial de PCVG onde os nós de G são particionados em dois grupamentos denominados normalmente de L (nós *linehauls*) e B (nós *backhauls*). A matriz de custo do problema atende as condições da norma euclidiana. Uma versão do problema determina que os nós de L sejam visitados inicialmente e, posteriormente, os nós de B. A estratégia dessa versão é dar preferência ao descarregamento dos veículos para, posteriormente, realizar o carregamento em direção ao depósito (Goldbarg e Luna, 2000).
- **PCV-B:** proposto por Fischetti e Toth em 1988, o Problema do Caixeiro Viajante com Bônus (PCV-B) associa um bônus b_i a cada nó do grafo e procura uma rota hamiltoniana de menor comprimento dada a condição restritiva, que consiste na obtenção de um bônus total maior ou igual a um certo valor mínimo (Goldbarg e Luna, 2000).
- **PCV-S:** proposto por Laporte e Martello em 1987, o Problema do Caixeiro Viajante com Subconjuntos (PCV-S) aborda uma situação análoga ao PCV-B, mas o problema consiste na construção de uma rota através de um subconjunto de nós maximizando o total de prêmios coletados pela rota, onde o comprimento não deve exceder a um certo valor (Goldbarg e Luna, 2000).
- **PCVJT:** o Problema do Caixeiro Viajante com Janela de Tempo (PCVJT) estipula um intervalo de tempo $[a_i, b_i]$ para cada vértice i, onde o vértice i não pode ser visitado antes de a_i e depois de b_i. Se o vértice i for visitado antes de a_i, será necessário esperar um tempo w_i até a_i; mas se o vértice i for visitado depois de b_i, a rota fica inviável. O objetivo é minimizar o custo da rota, onde o custo da rota pode ser a distância total percorrida (neste caso o tempo de espera é ignorado) ou o tempo total gasto para completar a rota (neste caso o tempo de espera w_i é adicionado ao tempo de viagem) (Simonetti, 1998).
- **PCV-G ou MinMax:** o Problema do Caixeiro Viajante com Gargalo ou *bottleneck* (PCV-G), também conhecido como MinMax, foi formalizado por Burkard em 1991, e consiste em obter um ciclo hamiltoniano tal que seu arco de maior comprimento seja mínimo. Tais problemas são tradicionais no contexto

de otimização, por estarem associados a situações de deslocamento de facilidades (Goldbarg e Luna, 2000).

O PCV-M^{3}S (min max-min sum) é uma composição do problema clássico com o de gargalo, onde a função objetivo a ser minimizada é a soma algébrica das funções objetivo destes. São dados *p* elementos de um conjunto $E = \{e_1, e_2, ..., e_p\}$ e $F \subset P(E)$, onde $P(E)$ é o conjunto potência de *E*, uma família finita de subconjuntos de *E* perfeitamente definidos. A cada elemento e_i, $i = 1,2, ..., p$ são associados dois números reais, um representado por c_i ou custo e outro por p_i ou peso. Sendo $S \in F$, onde *F* é o conjunto das soluções viáveis de um certo problema, define-se a formulação para o PCV-M^{3}S:

Minimizar $\underset{S \in F}{Z(S)} = \underset{e_i \in F}{Max}\{p_i\} + \sum_{e_i \in S} c_i$

- **PCVM ou PMCV:** o Problema do Caixeiro Viajante Múltiplo (PCVM) é uma generalização do PCV onde é necessário usar mais de um caixeiro viajante, ou seja, devem ser encontradas *r* rotas, todas iniciando e terminando em um certo nó, associados a *r* caixeiros, cuja soma total é mínima. Cada caixeiro deve viajar por uma sub-rota de nós, a qual inclui um depósito comum e cada nó, exceto o depósito, deve ser visitado por exatamente um caixeiro. A formulação em programação matemática para o PCVM é uma extensão natural da formulação de designação do PCV, tendo a definição de variáveis análoga.

  Segundo Larson e Odoni (1981), existem, ainda, estratégias para o PCV com rotas múltiplas: encontrar rotas simples, tendo particionado os nós de uma região em grupamentos menores (*cluster first, route second*) ou designar uma grande rota ótima e, então, subdividir em sub-rotas cobertas pelo número de veículos disponível (*route first, cluster second*).

- **PCVE:** no Problema do Caixeiro Viajante Estocástico (PCVE) as janelas de tempo, os nós, os tempos e os custos das arestas são elementos aos quais poderemos associar distribuições de probabilidades que lhes definirão existência ou valor. Na literatura, foram relatados casos com clientes estocásticos (PCV-CE), nos quais determinados nós podem não demandar uma visita, havendo uma rota ótima incluindo todos os nós e outra excluindo os nós não demandantes.

  Outro caso do PCV estocástico considera que o tempo de viagem não é determinístico (PCV-TE), onde os custos que representam os tempos nos arcos são variáveis aleatórias. A literatura não reporta um modelo matemático para este problema, e os autores que o trataram o fizeram tentando determinar uma solução *a priori* tal que a probabilidade de completar a rota dentro de um dado prazo fosse maximizada.

Por fim, o PCV-MTE trata da versão múltipla do PCV-TE, em que todas rotas iniciam e terminam no mesmo nó e o número de caixeiros é uma variável de decisão que possui custos fixos associados. Os trabalhos que abordaram o tema impuseram um limite de tempo para a duração dos ciclos de cada caixeiro. (Goldbarg e Luna, 2000).

3.2. O Problema do Carteiro Chinês

O Problema do Carteiro Chinês ou PCC (*Chinese Postman Problem* ou *CPP*) teve origem na cidade de Königsberg na Alemanha, banhada pelo rio Pregel, o qual se ramifica formando uma ilha que está ligada à parte restante da cidade por sete pontes, como mostra a Figura 10. O problema consistia em efetuar um percurso que obrigatoriamente passasse por todas as pontes, mas uma única vez sobre cada uma (Araújo, 2006).

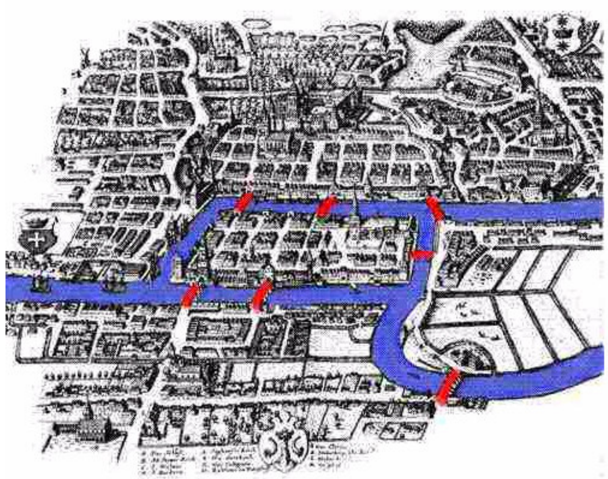

Figura 10: Desenho da cidade de Königsberg (Alemanha). Fonte: Araújo (2006)

Em 1736, o matemático suíço Leonard Euler provou que tal rota não existia. Euler representou cada uma das quatro regiões por um nó em um grafo, e cada ponte conectando estas regiões por um arco. Ele mostrou que um grafo conectado não direcionado tem um roteiro que passa exatamente uma vez por todos os seus arcos se e somente se todo o grafo tiver exatamente zero nó de grau ímpar. Já para um grafo não conectado ter um roteiro que passa exatamente uma vez por todos os seus arcos, o número de nós de grau ímpar deve ser exatamente dois nós. Esta importante relação (tanto para grafos conectados como não conectados) é conhecida na literatura por Teorema de Euler. Os grafos nos quais existem roteiros que passam exatamente uma única vez por todos os arcos são denominados grafos eulerianos. Os roteiros formados dentro destes grafos são denominados circuito ou ciclo euleriano para grafos conectados e caminho ou cadeia euleriana para grafos não conectados (Godinho e Junqueira, 2005).

Em 1962, o matemático chinês Kwan Mei-Ko levantou uma importante questão acerca do problema da travessia das pontes. Ele queria descobrir o número mínimo necessário de travessias redundantes no caso em que não é possível atravessar cada ponte exatamente uma vez e retornar ao ponto de partida. Este é o tipo de problema que um carteiro enfrenta quando entrega cartas. Supondo que cada um dos arcos do grafo represente uma rua onde as cartas precisam ser entregues e que cada um dos nós represente um cruzamento, o carteiro deve então percorrer cada rua para entregar tais cartas desejando minimizar a quantidade de travessias repetidas necessárias. Em homenagem à Kwan, este problema ficou conhecido como "*The Chinese Postman Problem*" (Larson e Odoni, 1981)

A solução de Kwan foi tratar cada travessia duplicada de um arco como se estivesse adicionando arcos duplicados no grafo. Esses arcos "duplicados" poderiam prover cada nó com um número par de arcos. Este processo é chamado de eulerização do grafo. Uma vez eulerizado o grafo, é possível encontrar um caminho euleriano no grafo modificado resultante (Larson e Odoni, 1981).

Larson e Odoni (1981) propõem o seguinte algoritmo para encontrar um circuito euleriano: primeiramente, identificam-se os m nós de grau ímpar de $G(N,A)$. O valor de m é sempre par. Encontra-se o "casamento de pares com a mínima distância"[5] desses m nós e identifique os $m/2$ caminhos mínimos deste "casamento" ótimo. Adiciona-se estes $m/2$ caminhos mínimos como arcos ligando os nós do "casamento" ótimo. O novo grafo $G'(N, A')$ não contém nós de grau ímpar. Por fim, encontra-se um circuito euleriano em $G'(N, A')$. Este circuito é a solução ótima do PCC no grafo original $G(N,A)$ e o seu comprimento é igual ao

[5] Na literatura, utiliza-se o termo em inglês *minimun-lenght pairwise matching*

comprimento total dos arcos em *A*, mais o comprimento total dos *m*/2 caminhos mínimos.

Porém, em geral, os arcos têm um custo associado. O problema passa a ser então encontrar não só um caminho euleriano, mas também um caminho euleriano que seja mínimo, ou seja, que tenha o menor custo possível. Ainda, o PCC possui variações, podendo ser orientado, não orientado ou misto (Goldbarg e Luna, 2000).

No caso do grafo não-orientado, podemos formular o problema da seguinte maneira:

Minimizar

$$z = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \tag{5}$$

Sujeito a :

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} - \sum_{j=1}^{n} x_{ji} = 0 \qquad i = 1,2,...,n \tag{6}$$

$$x_{ij} + x_{ji} \geq 1 \qquad \forall\,(i,j) \in A \tag{7}$$

onde x_{ij} é o número de vezes que a aresta (*i,j*) é percorrida de *i* para *j*, para $x_{ij} \geq 0$ e inteiro e c_{ij} = comprimento ou custo da aresta (*i,j*).

Para o caso de grafos direcionados, diferentemente dos grafos não direcionados, existe uma condição de extrema importância para que o PCC tenha solução. Esta condição é que o grafo deve ser fortemente conectado, ou seja, deve haver um caminho direcionado ligando todos os nós do grafo. Neste caso, existirá um circuito de Euler se e somente se o grafo contiver todos os nós com grau de entrada igual ao grau de saída (Godinho e Junqueira, 2005).

Nas redes mistas, o grafo também deve ser totalmente conectado para que o PCC tenha solução. A condição para que uma rede mista tenha um roteiro *Euleriano* é que esta rede seja par e balanceada. Uma rede par é aquela na qual o número total de arcos (direcionados ou não) em cada um de seus nós é par; em outras palavras a rede não deve ter nós de grau ímpar. Já uma rede balanceada é aquela na qual, para todo nó genérico, a diferença entre o número de arcos direcionados que saem deste nó e que entram neste nó deve ser menor ou igual ao número de arcos não direcionados que ligam este nó genérico a qualquer nó (Godinho e Junqueira, 2005).

A seguir, serão apresentados problemas relativos ao carteiro chinês com algumas considerações especiais, que possibilitam aplicações específicas (Goldbarg e Luna, 2000).

- **PCCC:** o Problema do Carteiro Chinês Capacitado (PCCC) diz respeito a definir um conjunto de rotas para um conjunto de carteiros que devem atender uma demanda despertada no grafo G.
- ***k*-PCC:** trata-se do PCC com pelo menos *k* carteiros, *k*>1, trabalhando em conjunto. A solução é um conjunto de *k* ciclos contendo o vértice inicial, de modo que, coletivamente, cada aresta seja percorrida pelo menos uma vez. O objetivo é minimizar o comprimento dos *k* ciclos formados.
- **MM-*k*-PCC:** trata-se do caso do *k*-PCC onde a maior aresta é minimizada.
- **PCW:** o Problema do Carteiro ao Vento ou *Windy Postman* (PCW) aborda o caso em que a matriz de custos do grafo G é assimétrica e não obrigatoriamente atende à desigualdade triangular. O sentido do percurso mais caro é denominado “contra o vento” e o mais barato “a favor do vento”.
- **PCCH:** o Problema do Carteiro Chinês Hierárquico (PCCH) tem como variante o fato do carteiro fazer sua rota dentro de grupamentos de arcos obedecendo a relações de precedência entre os grupamentos.
- **PCR:** o Problema do Carteiro Rural (PCR) distingue-se do PCC pois o conjunto de arestas percorrido é obrigatoriamente um subconjunto das arestas do grafo *G*. O problema pretende descobrir o caminho de menor custo em *G* que percorra o referido subconjunto. Este problema também possui variações, podendo ser direcionado, não direcionado, misto ou periódico (ou seja, que repete de tempos em tempos a combinação de nós visitados).

3.3. Problema de Roteamento de Veículos

O Problema de Roteamento de Veículos (PRV) foi introduzido na literatura por Dantzig e Ramser (1959), para solucionar um problema da distribuição de gasolina entre postos de abastecimento. O PRV é um nome genérico, dado a uma classe de problemas na qual um conjunto de rotas para uma frota de veículos deve ser determinado para atender um número de cidades ou consumidores dispersos. A solução para o PRV consiste em encontrar as rotas que satisfazem aos consumidores ou cidades envolvidos, respeitando-se as imposições existentes. A Figura 11 apresenta um conjunto de rotas possível para um PRV.

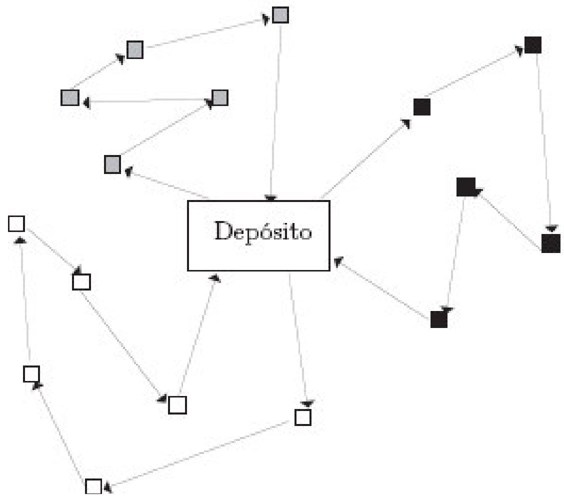

Figura 11: Conjunto de rotas para o PRV. Fonte: Fraga (2006)

Assim, o PRV propriamente dito envolve restrições adicionais, múltiplas rotas e veículos. Atuando no atendimento de todos os nós de uma rede, trata-se da generalização do PCV. Deste modo, as restrições deste modelo (equações (1), (2), (3) e (4)), acrescidas de um índice para os múltiplos veículos, são válidas. Um ponto importante a ressaltar sobre a equação (4), de eliminação de subrotas, é que esta diferencia aqueles nós que são depósito, ou seja, pontos dos quais os veículos devem sair e aos quais devem chegar, e outros que são clientes, representando pontos de atendimento e não podendo conectar-se entre si.

Restrições adicionais exigidas são relativas a fluxos em redes, de modo que se mantenha a integridade e lógica das rotas, respeitando-se os fluxos de entrada e saída dos nós. Ainda, o PRV é mais complexo e com maiores aplicações que o PCV enquanto considera limitações físicas e temporais, como a capacidade do veículo e os tempos para atendimento de cada nó na cobertura de um grafo.

Devido às muitas variações que podem existir no PRV, sai do escopo desta dissertação apresentar generalizações para todas elas. Logo, será apresentada no capítulo 5 a descrição do algoritmo específico que se adequa ao caso estudado, tendo em vista as aplicações específicas apresentadas nas seções anteriores. Por ora, pode-se afirmar que serão utilizados generalizações do PCVM e o PCVJT.