5 Processos Estocásticos

Ao avaliar um projeto utilizando a teoria de opções reais, um dos aspectos mais importantes é a análise das incertezas do projeto. Em opções reais, na maioria dos estudos desenvolvidos, assume-se que estes fatores de incerteza seguem um processo estocástico, ou seja, sua evolução no tempo tem parcela de aleatoriedade.

Um processo estocástico $\mathrm{X} = \{ \mathrm{X}(t), t \in T \}$ é uma coleção de variáveis aleatórias. Ou seja, para cada t no conjunto de índices T, X(t) é uma variável aleatória. Geralmente t é interpretado como tempo e X(t) é chamado de estado do processo no tempo t. Uma realização de X(t) num intervalo de tempo é chamada de amostra de caminho.

Ainda com relação a variável tempo, pode-se classificar um processo estocástico como contínuo ou discreto. Um processo estocástico em tempo discreto é aquele em que o valor da variável só varia em um determinado instante de tempo. Esta variável é classificada como variável discreta. Já um processo em tempo contínuo, a variável assume valores a qualquer instante de tempo, por isso é chamada de variável contínua.

Com relação às suas propriedades estatísticas (média e variância, principalmente), um processo estocástico pode ser classificado como estacionário, onde as propriedades estatísticas da variável, média e variância são constantes, e pode ser classificado como processo não estacionário, pois o valor esperado da variável aleatória pode crescer sem limite e sua variância, T anos à frente, aumenta com T.

Em suma, um processo estocástico é uma variável que se comporta, durante o tempo, de maneira onde pelo menos parte é considerada randômica. De maneira mais formal, é definido pela probabilidade da evolução x_t da variável x durante o tempo t. Para instantes t_1, t_2 e t_3 nos é fornecida, ou calculada a probabilidade dos valores correspondentes x_1, x_2 e x_3, estarem numa faixa específica de valores, por exemplo:

$$\text{prob}\,(a_1 < x_1 < b_1; a_2 < x_2 < b_2; a_3 < x_3 < b_3; ...)$$

Ou seja, quando o tempo t_1 chegar e observarmos o valor correspondente de x_1, poderemos condicionar a probabilidade dos eventos futuros baseado nesta informação.

Nos tópicos a seguir serão apresentados os principais processos estocásticos considerados em estudos de opções reais e suas características.

5.1.Principais Processos Estocásticos

5.1.1.Processo de Wiener

Robert Wiener (1923) desenvolveu a teoria matemática proposta por Albert Einstein chamada de *Brownian Motion*. Esta teoria fundamentou o movimento Browniano, que é um processo estocástico em tempo contínuo e possui três propriedades importantes.

- É um processo de Markov, que é um caso particular de processo estocástico, onde somente o valor atual de uma variável é relevante para se prever o valor futuro, ou seja, dados históricos desta variável não influenciarão suas projeções (não tem memória);
- Possui incrementos independentes, ou seja, a variação num determinado intervalo de tempo é independente das variações em outros intervalos de tempo;
- Mudanças sobre qualquer intervalo de tempo são normalmente distribuídas, com uma variância que cresce linearmente com o intervalo de tempo, ou seja, é um processo estocástico não estacionário.

Se Z(t) é um processo de Wiener, então qualquer incremento ΔZ num intervalo de tempo Δt satisfaz as seguintes condições:

- $\Delta z = \varepsilon_t \sqrt{\Delta t}$, onde ε_t ~ Normalmente (0,1)
- E [$\varepsilon_t \varepsilon_s$] = 0 para $t \neq s$

5.1.2.Processo de Markov

Este é um tipo de processo estocástico onde somente o valor corrente de uma variável é relevante para prever o futuro, a propriedade de Markov nos diz que a distribuição de probabilidades dos preços em qualquer tempo no futuro depende única e exclusivamente do preço atual. Sua vantagem é que ele simplifica a análise de processos estocásticos.

Uma definição mais formal: considere um processo em tempo discreto $\{x_1, x_2,...x_t\}$ com distribuição de probabilidade conjunta $F(x_1, x_2,..., x_t)$. Este processo é considerado de Markov se as suas probabilidades condicionais satisfazem as seguintes propriedades:

$$P(X_{t+S} \leq x_{t+S} / x_t,..., x_1) = P(X_{t+S} \leq x_{t+S}/x_t)$$

Onde, **P (. /I$_t$)**, representa a probabilidade condicional ao conjunto de informações I_t.

Esse processo é considerado importante para o mercado financeiro, pois neste ambiente considera-se que todas as informações passadas sobre o preço de um determinado ativo estão contidas no valor atual do mesmo. Sendo assim qualquer previsão do futuro será baseada somente no valor corrente do ativo, desconsiderando os valores anteriores.

5.1.3.Movimento Browniano com Drift ou Movimento de Wiener generalizado (Movimento Aritmético Browniano)

O processo de Wiener Generalizado, também conhecido como Movimento Browniano é caracterizado pela composição de dois termos principais, o primeiro termo é chamado de tendência α (*drift*) e o outro é chamado de termo aleatório σ do movimento.

$$dx = \alpha \, dt + \sigma \, dz \tag{8}$$

Onde: dz é o incremento de Wiener, definido acima; α é a tendência do processo, que representa a certeza, pois surge do produto de dois valores conhecidos (que nesse caso é constante); e σ é a volatilidade do parâmetro, a qual representa a incerteza do processo, pois resulta da multiplicação de um valor conhecido por um valor aleatório (que também é constante).

A mudança em X, denotada por dx, no intervalo de tempo Δt, é normalmente distribuída e tem $E(\Delta x) = \alpha \cdot \Delta t$, e a variância é $V(\Delta x) = \sigma^2 \, \Delta t$. Logo, $\Delta x \sim N(\alpha \Delta t, \sigma \sqrt{\Delta t})$.

5.1.4.Movimento Browniano Generalizado - o Processo de Itô

O movimento Browniano generalizado ou processo de Itô é uma generalização do movimento Browniano com *drift* na qual os parâmetros drift e variância podem variar no tempo, este movimento é representado pela seguinte equação:

$$dx = \alpha(x,t).dt + \sigma(x,t).dz \qquad (9)$$

Onde: dz é um incremento de Wiener e $\alpha(x,t)$ e $\sigma(x,t)$, agora funções conhecidas e determinísticas do estado atual x e do tempo t, são determinados taxa de crescimento esperado instantâneo e variância instantânea do processo de Itô.

O processo de Itô possui média dada por $\alpha(x,t)\ .\ dt$ e variância igual a $\sigma^2(x,t)\ .\ dt$, isto é, dx $\sim \mathrm{N}(\alpha(x,t)dt, \sigma(x,t)dt)$.

5.1.5.Movimento Geométrico Browniano (MGB)

É um caso particular de Processo de Ito, geralmente é o processo utilizado para modelar preço de ações, taxas de juros, preços de produtos e outras variáveis financeiras e econômicas.

Uma importante generalização da Equação (9) é vista a seguir:

$$dx = \alpha\ x\ dt + \sigma\ x\ dz \qquad (10)$$

Onde α e σ são constantes.

As mudanças do valor de x, em termos percentuais $\dfrac{\Delta x}{x}$ seguem um MAB e sendo assim tem uma distribuição Normal. No entanto, mudanças no logaritmo natural de x, em termos absolutos de x, possuem distribuição lognormal. Esta informação é fundamental, pois permite que os preços de um ativo sejam sempre positivos (o MGB é o movimento mais utilizado na modelagem de preços de ativos, uma vez que preços não podem assumir valores negativos).

Apesar de em muitos casos o MGB não se apresentar como melhor opção, este é o mais utilizado dos processos estocásticos, tanto na teoria de finanças quanto em aplicações econômicas práticas, devido a sua simplicidade de utilização e principalmente pela sua fácil compreensão.

O valor esperado e a variância seguem as seguintes expressões, respectivamente:

$$E(x_t) = x_0 \ . \ e^{\alpha.t}$$

$$v(x_t) = x_0^2 \ . \ e^{2.\alpha.t}(e^{\sigma^2.t} - 1)$$

Uma observação importante é que a variância cresce (sem limites) com o horizonte temporal, ou seja, se $T \to \infty \Rightarrow Var(x_T) \to \infty$. E a tendência é exponencial de crescimento ou de queda. Isso pode ser observado na Figura 6.1.

- α : é a tendência do processo (que nesse caso é constante); e
- σ : é a volatilidade do parâmetro (que também é constante).

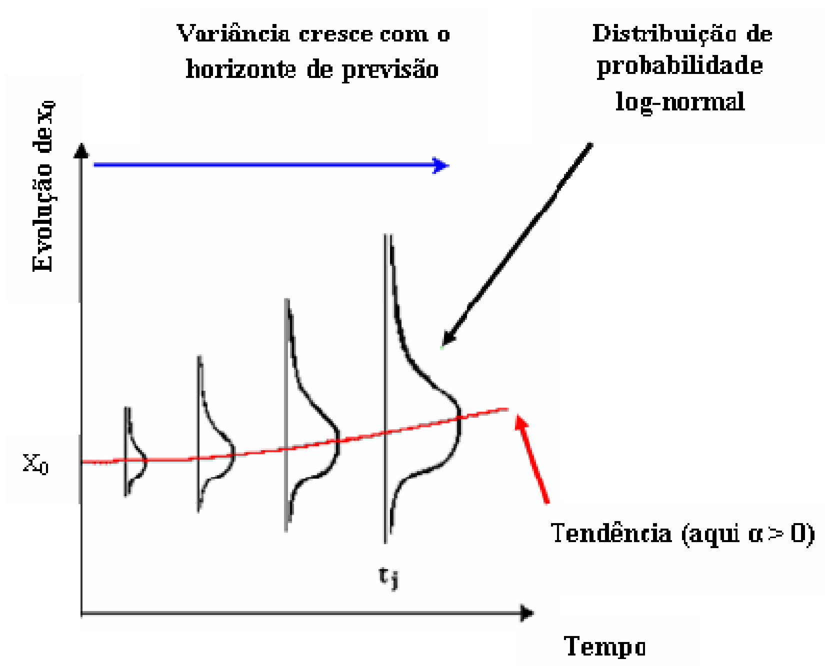

Figura 1 - Gráfico da variância no Movimento Geométrico Browniano.

Nesse processo a variável estocástica não pode assumir valores menores que zero, por exemplo, na hipótese de que o valor de x caia até zero, o valor de dx fica igual a zero e acaba o processo estocástico. Por isso, o MGB é o mais utilizado para modelar preços.

5.1.6.Processo de Reversão à Média ou Ornstein-Uhlenbeck

Movimentos brownianos tendem a divergir de seus pontos iniciais. Essa característica pode ser verdadeira para algumas realidades econômicas, como preços de ativos de especulação, mas não é uma realidades para os preços de *commodities* como o petróleo e alguns de seus derivados, por exemplo, cujo preço estaria relacionado a seu custo marginal de produção de longo prazo. Assim, enquanto no curto prazo poder-se-ia modelar o preço do petróleo como MGB, tal modelagem não seria apropriada em análise de longo prazo. Nesse caso, um modelo mais apropriado para o preço do petróleo seria um processo de reversão à média, cuja forma mais simples é dada pela equação:

$$dx = \eta \left(\bar{x} - x\right) dt + \sigma\, dz \qquad (11)$$

Onde η é a velocidade de reversão, esse parâmetro indica a velocidade com que o processo tende a voltar para o valor médio, $\bar{x}$ é o nível para o qual x tende a reverter, σ é o parâmetro de volatilidade e dz é um incremento de Wiener.

Um processo de reversão à média é um processo de Markov, muito embora seus incrementos não sejam independentes. Isso pode ser visto através da Equação 11, onde vê-se que a variação esperada de x depende da diferença entre x e $\bar{x}$. Além disso, quanto mais distante estiver x de seu valor normal $\bar{x}$, maior será a probabilidade de a variável retornar para x.

Uma boa ilustração para este movimento é o caso da força restauradora de uma mola. Quanto mais distante do ponto de equilíbrio a mola se encontra, maior é a força para restaurar o equilíbrio da mola.

Como foi dito anteriormente, este processo é um processo de Markov, porém não possui incrementos de Wiener (dado que a variância de x depende da diferença ente $\bar{x}$ e x). O valor esperado de x é:

$$E\left(x_t\right) = \bar{x} - \left(x_0 - \bar{x}\right) e^{-\eta(t-t_0)} \qquad (12)$$

A variância é dada pela seguinte equação:

$$\mathrm{Var}\,(x_t) = \frac{\sigma^2}{2\eta}\left(1 - e^{-2\eta\left(t_0 - t\right)}\right) \tag{13}$$

O próximo passo é verificar o que ocorre com a variância e o valor esperado de x quando $t \to \infty$:

$$\lim \mathrm{E}\left(x_t\right) = \lim\left[\bar{x} - \left(x_0 - \bar{x}\right)\ \frac{1}{e^{\eta t}}\right] \tag{14}$$

$$\lim \mathrm{E}\left(x_t\right) = \bar{x} - \left(x_0 - \bar{x}\right) \cdot \lim\left[\ \frac{1}{e^{\eta t}}\right] \tag{15}$$

Quando $t \to \infty$, $e^{\eta \cdot t} \to \infty$, então $\left(x_0 - \bar{x}\right) \cdot\ \frac{1}{e^{\eta t}} \to 0$, logo a expressão final fica conforme a Equação (16):

$$\lim \mathrm{E}\left(x_t\right) = \bar{x} \tag{16}$$