

5

Sistema OFDM

O sistema OFDM permite uma implementação digital de maneira análoga ao que foi apresentado para os sistemas de uma única portadora (SC). Após uma introdução ao sistema OFDM na Seção 5.1, a Seção 5.2 apresenta o modelo de sinais para OFDM, tanto para transmissão quanto para a recepção, assim como a inserção da faixa de guarda.

A Seção 5.3 descreve os equalizadores ZF e MMSE para o caso de transmissão OFDM. Estes resultados, que necessitam do conhecimento das componentes do canal equivalente, servem de figura de mérito para a obtenção dos filtros adaptativos, descritos na Seção 5.4.

A Seção 5.5 descreve com maiores detalhes a estrutura da matriz de erro que pré-multiplica os blocos de dados na entrada do decisor de mínima distância. Devido ao grau de semelhança nos modelos SC e OFDM, a Seção 5.6 apresenta um modelo unificado entre os sistemas, que depende apenas da escolha de poucos parâmetros para resultar no modelo desejado, seja o ZP-OFDM, CP-OFDM, CP-SC-FDE ou ZP-SC-FDE, com ou sem DFE.

Na Seção 5.7 são levantadas curvas de desempenho, via simulação computacional, para ilustrar a diferença de desempenho entre os sistemas descritos anteriormente. E por fim, na Seção 5.8, são tecidos comentários acerca dos resultados obtidos.

5.1

Introdução ao OFDM

A técnica de transmissão OFDM baseia-se na multiplexação por divisão de frequências ortogonais e surgiu como uma evolução da técnica convencional de multiplexação por divisão de frequência FDM (*Frequency Division Multiplexing*). Em FDM, usa-se uma pequena faixa de segurança entre cada portadora como banda de guarda. Já no OFDM, trabalha-se com toda a faixa do espectro disponível, pois faz-se uso de uma superposição espectral particular, onde cada subportadora é ortogonal com relação à todas outras (no domínio da frequência). Mais sobre o OFDM pode ser encontrada na literatura como em [14], [2], [10].

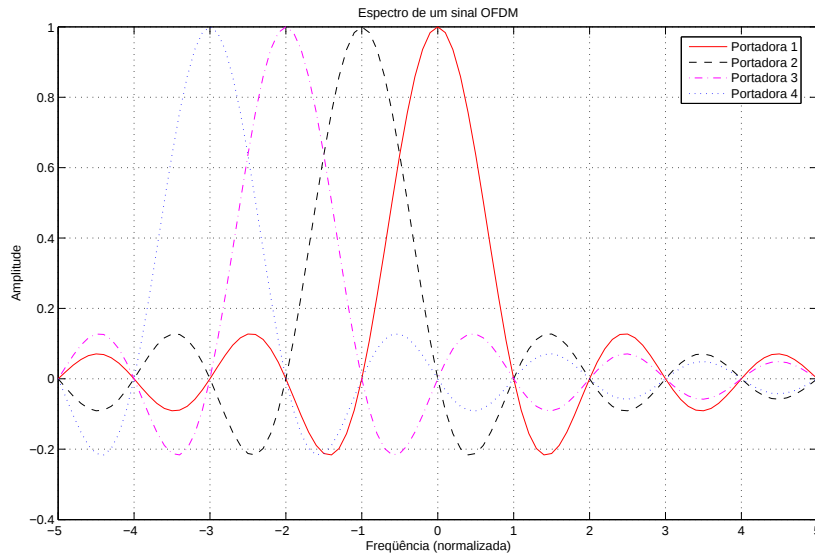


Figura 5.1: Espectro ilustrativo de 4 portadoras na técnica OFDM.

Num sistema convencional de transmissão, os símbolos são enviados de forma seqüencial, através de uma única portadora, modulada à taxa de símbolos da fonte de informação. O espectro desta portadora ocupa toda a banda disponível.

A técnica OFDM consiste na transmissão paralela de dados em diversas subportadoras e com taxas de transmissão mais baixas, conforme aumenta-se o número de subportadoras utilizadas. Esta redução na taxa de símbolos, ou seja, um aumento na duração do símbolo em cada subportadora, representa um estreitamento do pulso no domínio frequência, o que o torna menos sensível à seletividade em frequência.

Em outras palavras, o desvanescimento seletivo em frequência se torna plano (ou quase plano), pois só afeta um símbolo de informação, já que permite-se enxergar os símbolos sendo multiplicados unicamente por frações do canal de comunicações. Este fato reduz significativamente a complexidade dos equalizadores.

Do ponto de vista do domínio do tempo, tem-se equivalentemente que a dispersão temporal do pulso o torna menos susceptível à IES, uma vez que diminui-se a superposição de símbolos.

Como é possível perceber a partir da Figura 5.1, há superposição espectral. Porém, as subportadoras podem ser isoladas das demais com uso de correlatores ou filtros casados [17]. Existe então, uma ortogonalidade entre estas subportadoras. Entretanto, um dos problemas do sistema OFDM é a sensibilidade à *offsets* no circuito de recuperação de portadora, resultando em descasamento dos osciladores de transmissão-recepção, e assim, perdendo a ortogonalidade

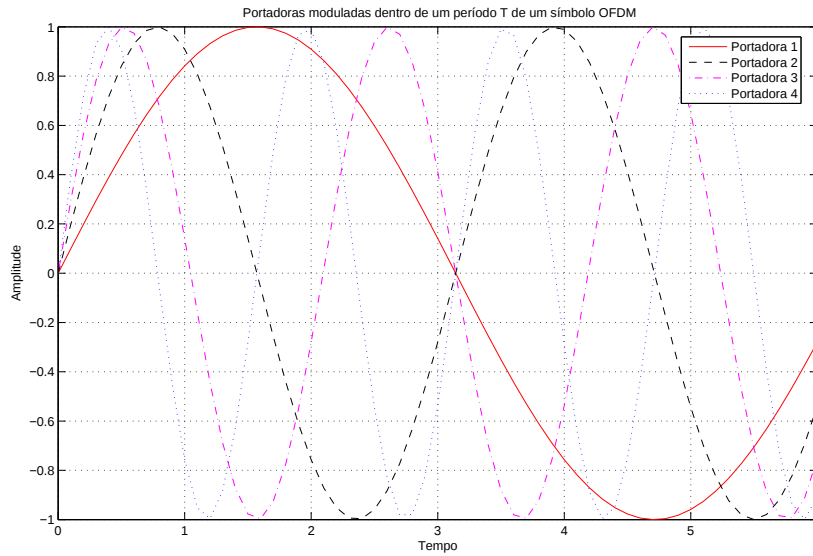


Figura 5.2: 4 subportadoras dentro de um símbolo OFDM.

entre as subportadoras.

A Figura 5.2 ilustra o comportamento temporal de 4 subportadoras numa transmissão OFDM. Estas, estão um número inteiro de ciclos espaçadas entre si, ou seja, $k\frac{1}{T}$, onde k é um inteiro qualquer.

5.1.1

Fontes de degradação

A interferência entre portadoras (IEP ou do inglês, como é comumente referenciada ICI - *Interchannel interference*), desfaz a ortogonalidade das subportadoras OFDM. Uma das causas é o ruído de fase. Um oscilador prático não gera uma portadora numa frequência perfeitamente exata. Ao invés disso, é gerada uma portadora modulada em fase por um sinal aleatório. Lembrando que a frequência é a derivada da fase, obtém-se assim um sinal (portadora) com frequência próxima da desejada. Como estes pequenos desvios (*offsets*) existem, isto gera ICI. Por isso, o OFDM é considerado sensível aos desvios de fase/frequência.

Nos sistemas de portadora única, os desvios de fase/frequência conferem degradações apenas na RSR, não acarretando em interferências.

Outro problema inerente ao fato da IDFT na transmissão é a dificuldade de se dimensionar o amplificador. As excursões do sinal podem atingir valores altos, necessitando de amplificadores muito potentes (e fatalmente grandes e pesados), o que pode se tornar impeditivo num transmissor móvel. Esta relação entre o valor de pico do sinal e o seu valor médio é conhecida pela sigla PAPR (do inglês *Peak-to-Average Power Ratio*).

5.2

Transmissão e recepção OFDM

De maneira análoga ao que foi apresentado nas Seções 2.1 e 2.2, pode-se representar o modelo de transmissão/recepção OFDM via sua implementação discreta. A diferença é que, no OFDM, faz-se uma IDFT (Transformada discreta inversa de Fourier) no estágio de transmissão do sinal, como apresentado na Figura 1.1 de maneira simplificada. Toda análise feita no Capítulo 2 para os canais, ruído e Interferência Entre Blocos (IEB) é válida e mantida para o OFDM. Da mesma forma, com faixa de guarda apropriada ($L \geq P$), elimina-se a interferência entre blocos sucessivos.

O bloco de dados $\mathbf{b}(i)$ é definido na Seção 2.1. Este vetor é então projetado em N sub-espacos ortogonais fazendo

$$\tilde{\mathbf{s}}(i) = \mathbf{W}_N^H \mathbf{b}(i). \quad (5-1)$$

A matriz de DFT $\mathbf{W}_N$ está definida em (2-59), e sua hermitiana representa a matriz de IDFT. Cada componente do i -ésimo bloco transformado pode ser encontrada calculando-se

$$\tilde{s}^{(i)}(\beta) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=0}^{N-1} b^{(i)}[n] e^{j \frac{2\pi}{N} n \beta} \quad ; 0 \leq \beta \leq N-1 \quad (5-2)$$

e representa a informação associada a β -ésima sub-portadora, chamada também de sub-símbolo de um bloco OFDM (ou símbolo OFDM). Ocorre então, a transmissão da transformada do bloco, e não o bloco em si, como é o caso dos sistemas com portadora única .

5.2.1

Bloco CP-OFDM

De maneira análoga ao CP-SC, o bloco CP-OFDM ($L_1 = L$) é obtido por meio da matriz $\mathbf{V}^T(L)$,

$$\mathbf{d}_{CP}(i) = \mathbf{V}^T(L) \mathbf{W}_N^H \mathbf{b}(i). \quad (5-3)$$

Cada uma das componentes do bloco CP-OFDM é expressa por

$$d_{CP}^{(i)}[k] = \begin{cases} \tilde{s}^{(i)}[k] & ; L \leq k \leq M-1 \\ \tilde{s}^{(i)}[k+N] & ; 0 \leq k \leq L-1 \end{cases}, \quad (5-4)$$

onde $\tilde{s}^{(i)}[k]$ é definido em (5-2), observando que $\beta = k - L$. O bloco recebido

é então igual à

$$\begin{aligned}\mathbf{r}_{CP}(i) &= \underbrace{\mathbf{T}(L)\mathbf{Q}_T(i)\mathbf{V}^T(L)}_{\mathbf{Q}_c(i)} \mathbf{W}_N^H \mathbf{b}(i) + \mathbf{n}_N(i) \\ &= \mathbf{Q}_c(i) \mathbf{W}_N^H \mathbf{b}(i) + \mathbf{n}_N(i),\end{aligned}\quad (5-5)$$

de forma semelhante ao procedimento para a equação (2-39). Aplicando-se uma DFT de N -pontos sobre (5-5) resulta em

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{r}}_{CP}(i) &= \mathbf{W}_N \mathbf{Q}_c(i) \mathbf{W}_N^H \mathbf{b}(i) + \mathbf{W}_N \mathbf{n}_N(i) \\ &= \tilde{\mathbf{Q}}_d(i) \mathbf{b}(i) + \tilde{\mathbf{n}}_N(i).\end{aligned}\quad (5-6)$$

Percebe-se que no sistema CP-OFDM, há uma ortogonalidade dos dados na recepção, diferente do observado no CP-SC, expresso em (2-65), onde a transformada dos dados é observada na recepção. Isto leva o CP-OFDM a não ter IES no bloco a ser detectado. Porém, não há ganho de diversidade algum.

5.2.2

Bloco ZP-OFDM

Conforme visto na Sub-seção 2.1.1, o bloco com preenchimentos com zeros (*Zero-Padding*) ($L_1 = 0$) é obtido por meio da matriz $\mathbf{V}^T(0)$, assim

$$\mathbf{d}_{ZP}(i) = \mathbf{V}^T(0) \mathbf{W}_N^H \mathbf{b}(i). \quad (5-7)$$

Cada uma das componentes do bloco ZP-OFDM é expressa por

$$d_{ZP}^{(i)}[k] = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=0}^{N-1} b^{(i)}[n] e^{j\frac{2\pi}{N}nk} & ; 0 \leq k \leq N-1 \\ 0 & ; N \leq k \leq M-1 \end{cases} \quad (5-8)$$

Temos então o vetor (bloco) recebido dado por

$$\mathbf{r}_{ZP}(i) = \mathbf{Q}_T(i) \mathbf{V}^T(0) \mathbf{W}_N^H \mathbf{b}(i) + \mathbf{n}_M(i). \quad (5-9)$$

Procedendo de maneira análoga ao SC, uma transformada M -pontos é aplicada ao bloco recebido. Obtém-se assim

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{r}}_{ZP}(i) &= \mathbf{W}_M \mathbf{Q}_T(i) \mathbf{V}^T(0) \mathbf{W}_N^H \mathbf{b}(i) + \mathbf{W}_M \mathbf{n}_M(i) \\ &= \mathbf{W}_M \mathbf{Q}_c(i) \mathbf{W}_M^H \mathbf{W}_M \mathbf{V}^T(0) \mathbf{W}_N^H \mathbf{b}(i) + \tilde{\mathbf{n}}_M(i) \\ &= \tilde{\mathbf{Q}}_d(i) \mathbf{W}_{MN} \mathbf{W}_N^H \mathbf{b}(i) + \tilde{\mathbf{n}}_M(i).\end{aligned}\quad (5-10)$$

Em ambos os casos (CP e ZP), a DFT aplicada ao vetor recebido, tem o

efeito de reduzir a complexidade computacional da equalização, que é feita no domínio da frequência.

5.3

Equalização OFDM-FDE

A equalização no caso da transmissão OFDM, também é realizada no domínio da frequência, com o objetivo de aproveitar a redução da complexidade no número de operações aritméticas realizadas pelo filtro equalizador.

5.3.1

CP-Zero-Forcing

O equalizador *Zero-Forcing* elimina parcela de contribuição das componentes do canal que atuam sobre os dados. Assim, o bloco $\mathbf{y}(i)$, que produzirá a estimativa ZF é

$$\begin{aligned}\mathbf{y}(i) &= \tilde{\mathbf{A}}_{ZF} \tilde{\mathbf{Q}}_d(i) \mathbf{b}(i) + \tilde{\mathbf{A}}_{ZF} \tilde{\mathbf{n}}_N(i) \\ &= \mathbf{b}(i) + \mathbf{n}_{ZF}(i),\end{aligned}\tag{5-11}$$

onde o equalizador ZF é

$$\tilde{\mathbf{A}}_{ZF} = \tilde{\mathbf{Q}}_d^{-1}(i).\tag{5-12}$$

A inversão da matriz $N \times N$ diagonal $\tilde{\mathbf{Q}}_d(i)$ compreende apenas N operações. A equalização ZF apresenta o problema de amplificação do ruído quando uma das componentes da transformada do canal atinge valor muito baixo, ou até a possível perda de detectabilidade de um sub-símbolo OFDM, caso haja um nulo no espectro do canal.

5.3.2

CP-OFDM - MMSE

O Apêndice A apresenta o desenvolvimento para a equalização da transmissão CP-OFDM-FDE-MMSE. A expressão para este equalizador é

$$\tilde{\mathbf{A}}_{MMSE}(i) = \tilde{\mathbf{Q}}_d^{\mathcal{H}} \left[\tilde{\mathbf{Q}}_d \tilde{\mathbf{Q}}_d^{\mathcal{H}} + \sigma_n^2 \mathbf{I}_N \right]^{-1},\tag{5-13}$$

em que há a necessidade apenas da inversão de uma matriz diagonal.

As expressões para o CP-OFDM-FDE-ZF e CP-OFDM-FDE-MMSE permitem enxergar o esquema de transmissão CP como apresentado no diagrama de blocos da Figura 5.3.

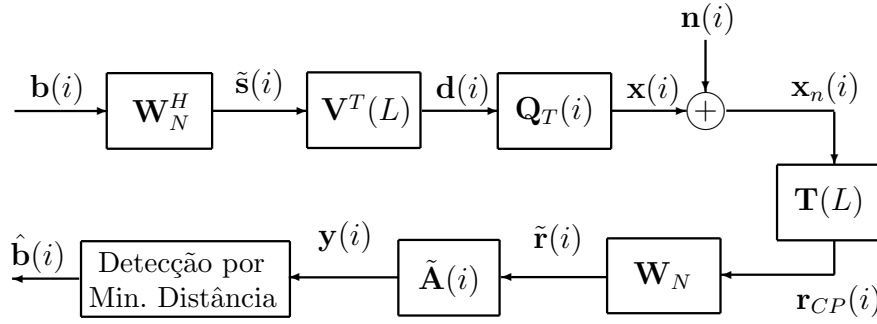


Figura 5.3: Modelo CP-OFDM com equalização no domínio da frequência.

5.3.3

Observação sobre equalizadores MMSE e ZF para sistemas CP-OFDM-FDE

Como demonstra a equação (5-6), o vetor de dados recebido pode ser visto como N equações desacopladas, e por conseguinte, o equalizador pode ser implementado com N coeficientes independentes. Isto posto, pode-se rescrever a k -ésima componente do i -ésimo vetor de equalização ZF como

$$\begin{aligned}
 \tilde{a}_{ZF}^{(i)}[k] &= \left(\tilde{Q}^{(i)}[k] \right)^{-1} \\
 &= \left(|\tilde{Q}^{(i)}[k]| \angle \phi^{(i)}[k] \right)^{-1} \\
 &= \frac{1}{|\tilde{Q}^{(i)}[k]|} \angle -\phi^{(i)}[k],
 \end{aligned} \tag{5-14}$$

onde $|\tilde{Q}^{(i)}[k]|$ representa a amplitude (módulo) da k -ésima componente da transformada do canal e $\phi^{(i)}[k]$ denota a fase do coeficiente em questão do canal. Para o caso do equalizador MMSE, tem-se que

$$\begin{aligned}
 \tilde{a}_{MMSE}^{(i)}[k] &= \frac{\left(\tilde{Q}^{(i)}[k] \right)^*}{|\tilde{Q}^{(i)}[k]|^2 + \left(\sigma_n^{(i)}[k] \right)^2} \\
 &= \frac{|\tilde{Q}^{(i)}[k]| \angle -\phi^{(i)}[k]}{|\tilde{Q}^{(i)}[k]|^2 + \left(\sigma_n^{(i)}[k] \right)^2} \\
 &= \frac{|\tilde{Q}^{(i)}[k]|^2}{|\tilde{Q}^{(i)}[k]|^2 + \left(\sigma_n^{(i)}[k] \right)^2} \underbrace{\left[\frac{1}{|\tilde{Q}^{(i)}[k]|} \angle -\phi^{(i)}[k] \right]}_{\tilde{a}_{ZF}^{(i)}[k]} \\
 &= \Gamma^{(i)}[k] \tilde{a}_{ZF}^{(i)}[k].
 \end{aligned} \tag{5-15}$$

Observa-se no entanto que $\Gamma^{(i)}[k]$ é um número real, e portanto com fase igual à 0° , representando assim apenas um ganho em amplitude. A k -ésima

componente de um bloco $\mathbf{y}(i)$ qualquer na entrada do decisor de mínima distância é então

$$y_{ZF}^{(i)}[k] = \tilde{a}_{ZF}^{(i)}[k]r^{(i)}[k], \quad (5-16)$$

no caso do *zero – forcing*, e

$$\begin{aligned} y_{MMSE}^{(i)}[k] &= \tilde{a}_{MMSE}^{(i)}[k]r^{(i)}[k] \\ &= \Gamma^{(i)}[k]\tilde{a}_{ZF}^{(i)}[k]r^{(i)}[k], \end{aligned} \quad (5-17)$$

para o caso do equalizador MMSE. Fica evidente pelas equações (5-16) e (5-17) que, para constelações PSK, não há diferença alguma entre o ZF e MMSE no caso do CP-OFDM, devido ao fato de toda a informação estar contida na fase do símbolo complexo. Este fato fica ilustrado nas curvas de desempenhos da Seção 5.7.

Assim, é direto que os equalizadores para o CP-OFDM-FDE podem ser implementados corrigindo apenas a fase dos símbolos observados na recepção. Entretanto, para manter a estrutura dos equalizadores deste trabalho, os algoritmos são implementados de maneira genérica, considerando também o módulo dos coeficientes, visto que em modulações que possuam diferentes amplitudes em sua constelação de sinais (ex: QAM), o desempenho do CP-OFDM-FDE-ZF e CP-OFDM-FDE-MMSE não mais serão equivalentes.

5.3.4

ZP-OFDM - Zero-forcing

Nas transmissões com sufixação ZP como faixa de guarda, o vetor recebido sofre, além da contribuição do canal, uma parcela advinda das DFTs de diferentes resoluções envolvidas, como é observado em (5-10). Para se retirar a parcela que atua sobre o bloco de dados em (5-10), o equalizador ZF produz um vetor, à entrada do decisor, que é

$$\begin{aligned} \mathbf{y}(i) &= \tilde{\mathbf{A}}_{ZF}(i)\tilde{\mathbf{Q}}_d(i)\mathbf{W}_{MN}\mathbf{W}_N^H\mathbf{b}(i) + \tilde{\mathbf{A}}_{ZF}(i)\tilde{\mathbf{n}}_M(i) \\ &= \mathbf{b}(i) + \mathbf{n}_{ZF}(i), \end{aligned} \quad (5-18)$$

onde a matriz equalizadora $\tilde{\mathbf{A}}_{ZF}(i)$ de dimensão $N \times M$, no caso do ZP-OFDM é encontrada computando a pseudo-inversa do produto de matrizes que pré-

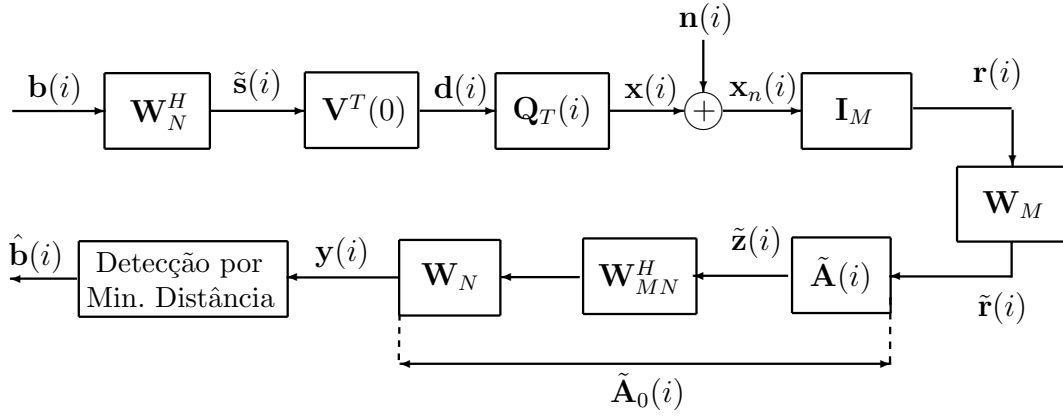


Figura 5.4: Estrutura da transmissão/recepção ZP-OFDM com equalização MMSE no domínio da frequência.

multiplica o bloco de dados $\mathbf{b}(i)$. Assim,

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{A}}_{ZF}(i) &= \left[\tilde{\mathbf{Q}}_d(i) \mathbf{W}_{MN} \mathbf{W}_N^H \right]^\dagger \\ &= \left[\mathbf{W}_N \mathbf{W}_{MN}^H \tilde{\mathbf{Q}}_d^H(i) \tilde{\mathbf{Q}}_d(i) \mathbf{W}_{MN} \mathbf{W}_N^H \right]^{-1} \mathbf{W}_N \mathbf{W}_{MN}^H \tilde{\mathbf{Q}}_d^H(i). \quad (5-19)\end{aligned}$$

5.3.5 ZP-OFDM - MMSE

Na minimização da função custo definida em (A-1), obtém-se

$$\tilde{\mathbf{A}}_{0,MMSE}(i) = \frac{M}{N} \mathbf{W}_N \mathbf{W}_{MN}^H \tilde{\mathbf{Q}}_d^H(i) \underbrace{\left[\left(\tilde{\mathbf{Q}}_d(i) \tilde{\mathbf{Q}}_d^H(i) + \frac{M}{N} \sigma_n^2 \mathbf{I}_M \right) \right]^{-1}}_{\text{Diagonal}}. \quad (5-20)$$

Da mesma maneira que o ocorrido com o CP, há somente a inversão de uma matriz diagonal, neste caso de dimensão $M \times M$, desde que considerada a aproximação descrita no Apêndice A para o produto das DFTs truncadas em (5-20). Como $\frac{M}{N} \mathbf{W}_N \mathbf{W}_{MN}^H$ é constante dado um tamanho de bloco N e uma faixa de guarda L , pode-se estabelecer, de maneira equivalente, que o equalizador MMSE é a matriz diagonal

$$\tilde{\mathbf{A}}_{MMSE}(i) = \tilde{\mathbf{Q}}_d^H(i) \left[\left(\tilde{\mathbf{Q}}_d(i) \tilde{\mathbf{Q}}_d^H(i) + \frac{M \sigma_n^2}{N} \mathbf{I}_M \right) \right]^{-1}, \quad (5-21)$$

que depende apenas do canal, seguido de uma pós-multiplicação por $\frac{M}{N} \mathbf{W}_N \mathbf{W}_{MN}^H$, que é fixo e independente do canal. A Figura 5.4 ilustra o di-

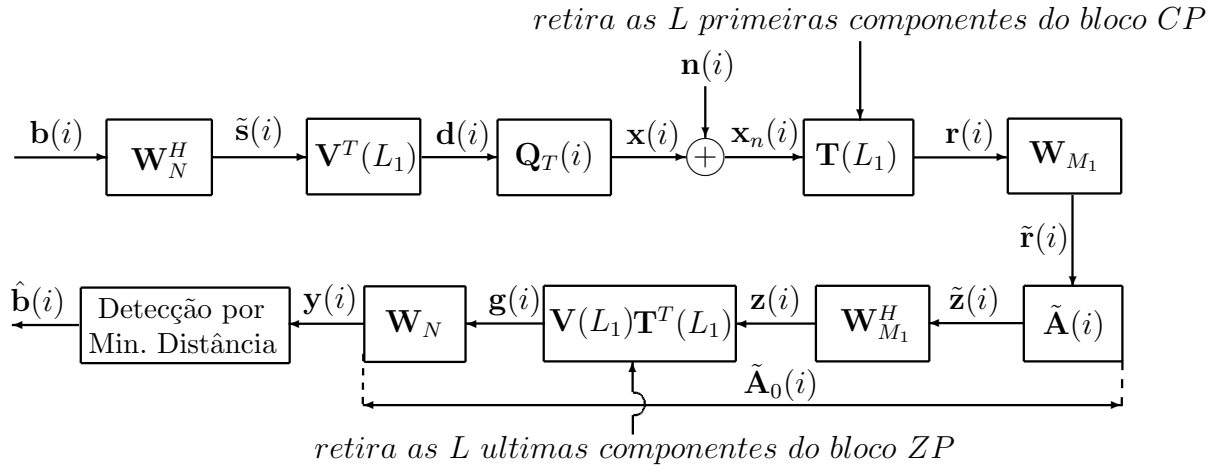


Figura 5.5: Estrutura unificada de transmissão OFDM-FDE.

agrama em blocos do esquema de transmissão/equalização ZP-OFDM-FDE-MMSE.

5.4

Equalização adaptativa OFDM-FDE

A Figura 5.5 apresenta ambos os sistemas (CP e ZP), em um único diagrama de blocos. A equalização se dá no domínio da frequência, implementando de forma recursiva a solução de *Wiener* (MMSE) para os coeficients do filtro linear. Diferentes algoritmos podem implementar esta solução, porém, como é visto no Capítulo 3, o algoritmo RLS apresenta desempenho superior (entre o LMS, NLMS e RLS) e é menos sensível à escolha do parâmetro de atualização, sendo desta maneira mais robusto. Assim, a função custo é

$$J_{RLS} = \sum_{l=1}^i \lambda^{i-l} \|\mathbf{b}(l) - \tilde{\mathbf{A}}_0(i) \tilde{\mathbf{r}}(l)\|^2. \quad (5-22)$$

Devido ao fato de podermos escrever o filtro equalizador adaptativo como M_1 taps em uma matriz diagonal, é possível rescrever a equação (5-22) de maneira equivalente, fazendo

$$J_{RLS} = \sum_{l=1}^i \lambda^{i-l} \|\mathbf{b}(l) - \mathbf{W}_N \mathbf{V}(L_1) \mathbf{T}^T(L_1) \mathbf{W}_{M_1} \tilde{\mathbf{R}}(l) \tilde{\mathbf{a}}(l)\|^2. \quad (5-23)$$

No argumento da função (5-23) tem-se o vetor de erro associado ao i -ésimo bloco OFDM (ou símbolo OFDM) transmitido

$$\mathbf{e}(i) = \mathbf{b}(i) - \mathbf{W}_N \mathbf{V}(L_1) \mathbf{T}^T(L_1) \mathbf{W}_{M_1}^H \tilde{\mathbf{R}}(i) \tilde{\mathbf{a}}(i). \quad (5-24)$$

Tomando o gradiente complexo da função custo definida em (5-23) com relação ao vetor de coeficientes do equalizador $\tilde{\mathbf{a}}(i)$, obtém-se

$$\begin{aligned}\nabla_{\tilde{\mathbf{a}}} J_{RLS} &= \sum_{l=1}^i \lambda^{i-l} \nabla_{\tilde{\mathbf{a}}} \left[\mathbf{b}^H \mathbf{b} - \mathbf{b}^H \mathbf{W}_N \mathbf{V}(L_1) \mathbf{T}^T(L_1) \mathbf{W}_{M_1}^H \tilde{\mathbf{R}} \tilde{\mathbf{a}} - \tilde{\mathbf{a}}^H \tilde{\mathbf{R}}^H \mathbf{W}_{M_1} \mathbf{T}(L_1) \mathbf{V}^T(L_1) \mathbf{W}_N^H \mathbf{b} \right. \\ &\quad \left. + \tilde{\mathbf{a}}^H \tilde{\mathbf{R}}^H \mathbf{W}_{M_1} \mathbf{T}(L_1) \mathbf{V}^T(L_1) \mathbf{W}_N^H \mathbf{W}_N \mathbf{V}(L_1) \mathbf{T}^T(L_1) \mathbf{W}_{M_1}^H \tilde{\mathbf{R}} \tilde{\mathbf{a}} \right] \\ &= -2 \sum_{l=1}^i \lambda^{i-l} \left[\tilde{\mathbf{R}}^T \mathbf{W}_{M_1}^* \mathbf{T}(L_1) \mathbf{V}^T(L_1) \mathbf{W}_N^T \mathbf{b}^* \right. \\ &\quad \left. - \tilde{\mathbf{R}}^T \mathbf{W}_{M_1}^* \mathbf{T}(L_1) \mathbf{V}^T(L_1) \mathbf{V}(L_1) \mathbf{T}^T(L_1) \mathbf{W}_{M_1}^T \tilde{\mathbf{R}}^* \tilde{\mathbf{a}}^* \right],\end{aligned}\quad (5-25)$$

em que o índice i foi excluído por simplificação. Igualando o gradiente em (5-25) à zero e conjugando termos, chega-se a

$$\begin{aligned}\nabla_{\tilde{\mathbf{a}}} J_{RLS} &= 0. \\ &= -2 \sum_{l=1}^i \lambda^{i-l} \left[\tilde{\mathbf{R}}^H \mathbf{W}_{M_1} \mathbf{T}(L_1) \mathbf{V}^T(L_1) \mathbf{W}_N^H \mathbf{b} \right. \\ &\quad \left. - \tilde{\mathbf{R}}^H \mathbf{W}_{M_1} \mathbf{T}(L_1) \mathbf{V}^T(L_1) \mathbf{V}(L_1) \mathbf{T}^T(L_1) \mathbf{W}_{M_1}^H \tilde{\mathbf{R}} \tilde{\mathbf{a}} \right].\end{aligned}\quad (5-26)$$

Rearrmando as parcelas, obtém-se

$$\sum_{l=1}^i \lambda^{i-l} \tilde{\mathbf{R}}^H \mathbf{W}_{M_1} \mathbf{T}(L_1) \mathbf{V}^T(L_1) \mathbf{V}(L_1) \mathbf{T}^T(L_1) \mathbf{W}_{M_1}^H \tilde{\mathbf{R}} \tilde{\mathbf{a}} = \sum_{l=1}^i \lambda^{i-l} \tilde{\mathbf{R}}^H \mathbf{W}_{M_1} \mathbf{T}(L_1) \mathbf{V}^T(L_1) \mathbf{W}_N^H \mathbf{b}.\quad (5-27)$$

Definindo a parcela no lado esquerdo de (5-27) como

$$\Phi_{ofdm}(i) = \sum_{l=1}^i \lambda^{i-l} \tilde{\mathbf{R}}^H(l) \mathbf{W}_{M_1} \mathbf{T}(L_1) \mathbf{V}^T(L_1) \mathbf{V}(L_1) \mathbf{T}^T(L_1) \mathbf{W}_{M_1}^H \tilde{\mathbf{R}}(l) \quad (5-28)$$

e a parcela do lado direito de (5-27) como

$$\chi_{ofdm}(i) = \sum_{l=1}^i \lambda^{i-l} \tilde{\mathbf{R}}^H(l) \mathbf{W}_{M_1} \mathbf{T}(L_1) \mathbf{V}^T(L_1) \mathbf{W}_N^H \mathbf{b}(l), \quad (5-29)$$

permite expressar a solução OFDM-FDE-RLS como

$$\tilde{\mathbf{a}}(i) = \Phi_{ofdm}^{-1}(i) \chi_{ofdm}(i). \quad (5-30)$$

Seguindo procedimento semelhante ao caso do *single-carrier*, é possível calcular as igualdades em (5-28) e (5-29) de forma recursiva. Assim

$$\Phi_{ofdm}(i) = \lambda \Phi_{ofdm}(i-1) + \tilde{\mathbf{R}}^H(i) \mathbf{W}_{M_1} \mathbf{T}(L_1) \mathbf{V}^T(L_1) \mathbf{V}(L_1) \mathbf{T}^T(L_1) \mathbf{W}_{M_1}^H \tilde{\mathbf{R}}(i), \quad (5-31)$$

e

$$\mathbf{x}_{ofdm}(i) = \lambda \mathbf{x}_{ofdm}(i-1) + \tilde{\mathbf{R}}^{\mathcal{H}}(i) \mathbf{W}_{M_1} \mathbf{T}(L_1) \mathbf{V}^T(L_1) \mathbf{W}_N^{\mathcal{H}} \mathbf{b}(i). \quad (5-32)$$

5.4.1

CP-OFDM - RLS

No caso do modelo CP-OFDM (Figura 5.3), a equação (5-23) se torna

$$\begin{aligned} J_{RLS} &= \sum_{l=1}^i \lambda^{i-l} \left[\|\mathbf{b}(l) - \tilde{\mathbf{A}}(l) \tilde{\mathbf{r}}(i)\|^2 \right] \\ &= \sum_{l=1}^i \lambda^{i-l} \left[\|\mathbf{b}(l) - \tilde{\mathbf{R}}(l) \tilde{\mathbf{a}}(i)\|^2 \right], \end{aligned} \quad (5-33)$$

O erro associado ao i -ésimo bloco é representado por

$$\mathbf{e}_{CP}(i) = \mathbf{b}(i) - \tilde{\mathbf{R}}(i) \tilde{\mathbf{a}}(i) \quad (5-34)$$

A parcelas que envolvem a solução para o filtro RLS (5-30) são calculadas fazendo

$$\Phi_{ofdm}(i) = \lambda \Phi_{ofdm}(i-1) + \tilde{\mathbf{R}}^{\mathcal{H}}(i) \tilde{\mathbf{R}}(i), \quad (5-35)$$

e

$$\mathbf{x}_{ofdm}(i) = \lambda \mathbf{x}_{ofdm}(i-1) + \tilde{\mathbf{R}}^{\mathcal{H}}(i) \mathbf{b}(i). \quad (5-36)$$

5.4.2

ZP-OFDM - RLS

No esquema de transmissão ZP-OFDM, a função custo (5-23) se reduz à

$$J_{RLS} = \sum_{l=1}^i \lambda^{i-l} \left[\|\mathbf{b}(l) - \mathbf{W}_N \mathbf{W}_{MN}^{\mathcal{H}} \tilde{\mathbf{R}}(l) \tilde{\mathbf{a}}(i)\|^2 \right], \quad (5-37)$$

e assim, o erro que está no argumento de (5-37) é

$$\mathbf{e}_{ZP}(i) = \mathbf{b}(i) - \mathbf{W}_N \mathbf{W}_{MN}^{\mathcal{H}} \tilde{\mathbf{R}}(i) \tilde{\mathbf{a}}(i) \quad (5-38)$$

As atualizações da matriz e do vetor que envolvem o cálculo da solução RLS são dadas por

$$\Phi_{ofdm}(i) = \lambda \Phi_{ofdm}(i-1) + \tilde{\mathbf{R}}^{\mathcal{H}}(i) \mathbf{W}_{MN} \mathbf{W}_{MN}^{\mathcal{H}} \tilde{\mathbf{R}}(i), \quad (5-39)$$

e

$$\mathbf{x}_{ofdm}(i) = \lambda \mathbf{x}_{ofdm}(i-1) + \tilde{\mathbf{R}}^{\mathcal{H}}(i) \mathbf{W}_{MN} \mathbf{W}_N^{\mathcal{H}} \mathbf{b}(i). \quad (5-40)$$

Novamente, tal qual no caso dos sistemas ZP-SC, a queda de desempenho pela aproximação $\mathbf{F}_M = \mathbf{W}_{MN} \mathbf{W}_{MN}^{\mathcal{H}} \approx \frac{N}{M} \mathbf{I}_M = \mathbf{F}_M'$ foi considerável. Assim,

a inversão da matriz $\Phi(i)$ é computacionalmente mais dispendiosa tendo em vista a manutenção da melhor operação do equalizador.

5.4.3

ZP-OFDM - RLS (Não diagonal)

Como percebido no Apêndice A, a aproximação no caso do ZP-OFDM-MMSE para uma matriz diagonal levou à uma queda de desempenho relativamente acentuada. Com o algoritmo recursivo implementando esta solução, obviamente, o mesmo ocorre. Para obter desempenho próximo da solução ótima MMSE, uma implementação com uma matriz não diagonal é necessária. Se por um lado há ganho de desempenho, por outro há queda na velocidade de convergência do algoritmo devido a correlação existente entre os *taps* do equalizador.

Expandindo a expressão da função custo definida em (5-22), chega-se em

$$\begin{aligned} J_{RLS} &= \sum_{l=1}^i \lambda^{i-l} \left[\mathbf{b}^H(l) - \tilde{\mathbf{r}}^H(l) \tilde{\mathbf{A}}_0^H(i) \right] \left[\mathbf{b}(l) - \tilde{\mathbf{A}}_0(i) \tilde{\mathbf{r}}(l) \right] \\ &= \sum_{l=1}^i \lambda^{i-l} \left[\mathbf{b}^H(l) \mathbf{b}(l) - \mathbf{b}^H(l) \tilde{\mathbf{A}}_0(i) \tilde{\mathbf{r}}(l) - \tilde{\mathbf{r}}^H(l) \tilde{\mathbf{A}}_0^H(i) \mathbf{b}(l) + \tilde{\mathbf{A}}_0^H(i) \tilde{\mathbf{A}}_0(i) \tilde{\mathbf{r}}(l) \tilde{\mathbf{r}}^H(l) \right]. \end{aligned} \quad (5-41)$$

Forçando-se o gradiente à zero, encontra-se o ponto de mínimo desta função custo quadrática. Assim,

$$\begin{aligned} \nabla_{\tilde{\mathbf{A}}_0} J_{RLS} &= \sum_{l=1}^i \lambda^{i-l} \nabla_{\tilde{\mathbf{A}}_0} \left[\mathbf{b}^H(l) \mathbf{b}(l) - \tilde{\mathbf{A}}_0(i) \tilde{\mathbf{r}}(l) \mathbf{b}^H(l) - \tilde{\mathbf{A}}_0^H(i) \mathbf{b}(l) \tilde{\mathbf{r}}^H(l) + \tilde{\mathbf{A}}_0^H(i) \tilde{\mathbf{A}}_0(i) \tilde{\mathbf{r}}(l) \tilde{\mathbf{r}}^H(l) \right] \\ &= \sum_{l=1}^i \lambda^{i-l} \left[-\mathbf{b}^*(l) \tilde{\mathbf{r}}^T(l) + \tilde{\mathbf{A}}_0^*(i) \tilde{\mathbf{r}}^*(l) \tilde{\mathbf{r}}^T(l) \right]. \\ &= 0 \end{aligned} \quad (5-42)$$

Igualando as parcelas e conjugando os termos, obtém-se

$$\tilde{\mathbf{A}}_0(i) \underbrace{\sum_{l=1}^i \lambda^{i-l} \tilde{\mathbf{r}}(l) \tilde{\mathbf{r}}^H(l)}_{\Phi_{ofdm}(i)} = \underbrace{\sum_{l=1}^i \lambda^{i-l} \mathbf{b}(l) \tilde{\mathbf{r}}^H(l)}_{\chi_{ofdm}(i)}, \quad (5-43)$$

onde reconhece-se do lado esquerdo da equação (5-43) a matriz quadrada $\Phi_{ofdm}(i)$, de dimensão $M \times M$, e que representa a matriz de autocorrelação temporal das observações e do lado direito da equação (5-43), o vetor $\chi_{ofdm}(i)$

de dimensão $N \times M$ que denota a correlação temporal cruzada dos dados enviados e observados [11] e [15]. Portanto, é direto que a solução é encontrada computando-se

$$\tilde{\mathbf{A}}(i) = \boldsymbol{\chi}_{ofdm}(i) \boldsymbol{\Phi}_{ofdm}^{-1}(i). \quad (5-44)$$

Da mesma maneira que em (5-39) e (5-40), pode-se encontrar recursivamente as matrizes envolvidas em (5-44) fazendo

$$\boldsymbol{\Phi}_{ofdm}(i) = \lambda \boldsymbol{\Phi}_{ofdm}(i-1) + \tilde{\mathbf{r}}(i) \tilde{\mathbf{r}}^H(i) \quad (5-45)$$

e

$$\boldsymbol{\chi}_{ofdm}(i) = \lambda \boldsymbol{\chi}_{ofdm}(i-1) + \mathbf{b}(i) \mathbf{r}^H(i), \quad (5-46)$$

lembrando que um fator de regularização deve ser introduzido no início da recursão de $\boldsymbol{\Phi}_{ofdm}(i)$ para garantir a inversibilidade da matriz em todos os estágios do algoritmo. De maneira análoga ao encontrado no caso do ZP-SC-FDE-RLS, a inversa da matriz $\boldsymbol{\Phi}_{ofdm}(i)$ pode ser encontrada fazendo uso do lema da inversão de matrizes (ou indentidade de *Woodbury*), reduzindo-se assim a complexidade envolvida em sua computação.

5.5

Análise do bloco recebido OFDM

No intuito de analisar a estrutura da matriz de erro que perturba os dados na recepção, é desenvolvido um raciocínio análogo ao realizado na Seção 4.1.

Resultados de simulação mostram que o filtro MMSE tem desempenho superior ao ZF, e por isso, sua estrutura diagonal (aproximada no caso do ZP) é considerada nos raciocínios das sub-seções que se seguem.

5.5.1

Análise do bloco recebido CP-OFDM

O bloco à ser equalizado pelo filtro linear é expresso em (5-5). Assim

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_{CP}(i) &= \tilde{\mathbf{A}}(i) \tilde{\mathbf{r}}_{CP}(i) \\ &= \tilde{\mathbf{A}}(i) \tilde{\mathbf{Q}}_d(i) \mathbf{b}(i) + \tilde{\mathbf{A}}(i) \tilde{\mathbf{n}}_N(i) \\ &= \boldsymbol{\epsilon}_d(i) \mathbf{b}(i) + \mathbf{n}_{CP}(i). \end{aligned} \quad (5-47)$$

A expressão denota que o bloco de dados recebido na transmissão CP-OFDM não sofre IES, visto que a matriz $N \times N$ $\boldsymbol{\epsilon}_d(i)$ é obtida a partir do produto de matrizes diagonais. Assim, não faz sentido implementar um

filtro de realimentação (*feedback*), pelo fato das componentes de $\mathbf{y}_{CP}(i)$ serem desacopladas.

5.5.2

Análise do vetor recebido ZP-OFDM

A partir da expressão (5-10), pode-se expressar o bloco recebido no caso do ZP-OFDM como

$$\begin{aligned}
 \mathbf{y}_{ZP}(i) &= \frac{M}{N} \underbrace{\mathbf{W}_N \mathbf{W}_{MN}^H \tilde{\mathbf{A}}(i)}_{\tilde{\mathbf{A}}_0(i)} \tilde{\mathbf{Q}}_d(i) \mathbf{W}_{MN} \mathbf{W}_N^H \mathbf{b}(i) + \tilde{\mathbf{A}}(i) \tilde{\mathbf{n}}(i) \\
 &= \frac{M}{N} \mathbf{W}_N \mathbf{V}(0) \mathbf{W}_M^H \boldsymbol{\epsilon}_d(i) \mathbf{W}_M \mathbf{V}^T(0) \mathbf{W}_N^H \mathbf{b}(i) + \mathbf{n}_{ZP}(i) \\
 &= \frac{M}{N} \mathbf{W}_N \mathbf{V}(0) \boldsymbol{\epsilon}_c(i) \mathbf{V}^T(0) \mathbf{W}_N^H \mathbf{b}(i) + \mathbf{n}_{ZP}(i) \\
 &= \frac{M}{N} \mathbf{W}_N \boldsymbol{\epsilon}'(i) \mathbf{W}_N^H \mathbf{b}(i) + \mathbf{n}_{ZP}(i), \tag{5-48}
 \end{aligned}$$

onde a matriz $\boldsymbol{\epsilon}_d(i)$ é diagonal, de dimensão $M \times M$, e a matriz circulante $\boldsymbol{\epsilon}_c(i)$ é obtida a partir do produto $\mathbf{W}_M^H \boldsymbol{\epsilon}_d(i) \mathbf{W}_M$. A matriz $\boldsymbol{\epsilon}'(i)$ todavia, não tem uma forma definida e por conta disso o produto

$$\boldsymbol{\epsilon}''(i) = \mathbf{W}_N \boldsymbol{\epsilon}'(i) \mathbf{W}_N^H \tag{5-49}$$

não apresenta, da mesma maneira, uma estrutura conhecida. A Figura 5.6 apresenta plotada a energia da primeira linha desta matriz erro $\boldsymbol{\epsilon}''(i)$, de onde percebe-se que a energia fica toda concentrada ao redor da primeira componentente. De maneira geral, a energia da N -ésima linha desta matriz de erro se concentra no entorno da N -ésima componente.

5.6

União dos Modelos

A semelhança entre os sistemas SC e OFDM permite que ambos sejam apresentados num modelo único, conforme visto na Figura 5.6. Definindo-se

$$\mathbf{G}_{TX} = \begin{cases} \mathbf{I}_N; & \text{se for SC} \\ \mathbf{W}_N^H; & \text{se for OFDM} \end{cases} \tag{5-50}$$

como um parâmetro que pode ser visto como uma pré-codificação feita na transmissão, o sistema OFDM representa então, um caso particular de uma série de pré-codificações possíveis [13]. Considerando-se também o estágio de DFE para o ZP-*single-carrier*, tem-se então o diagrama de blocos unificado, novamente, como ilustrado na Figura 5.6.

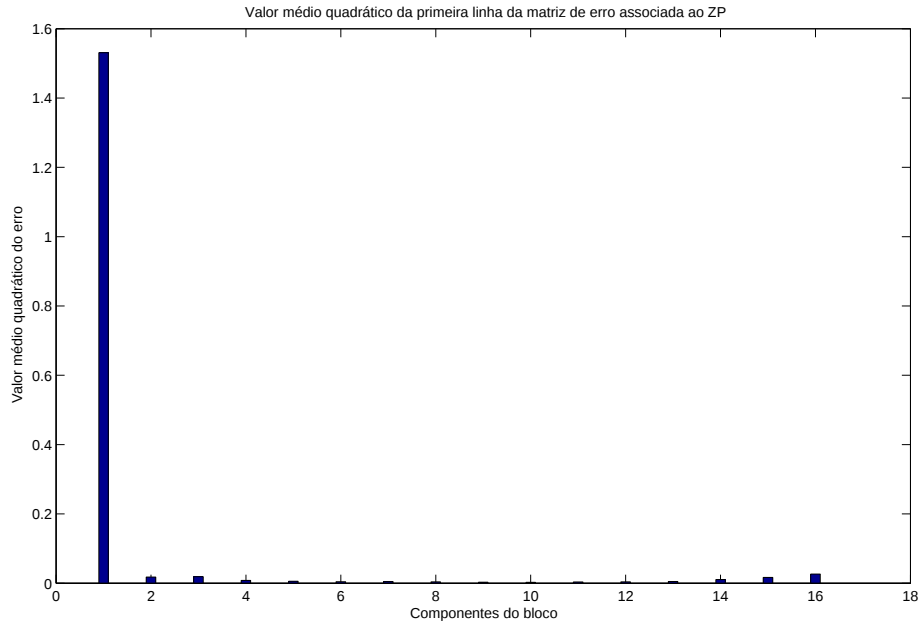


Figura 5.6: Energia associada à primeira coluna da matriz de erro relativa ao bloco ZP-OFDM a ser equalizado.

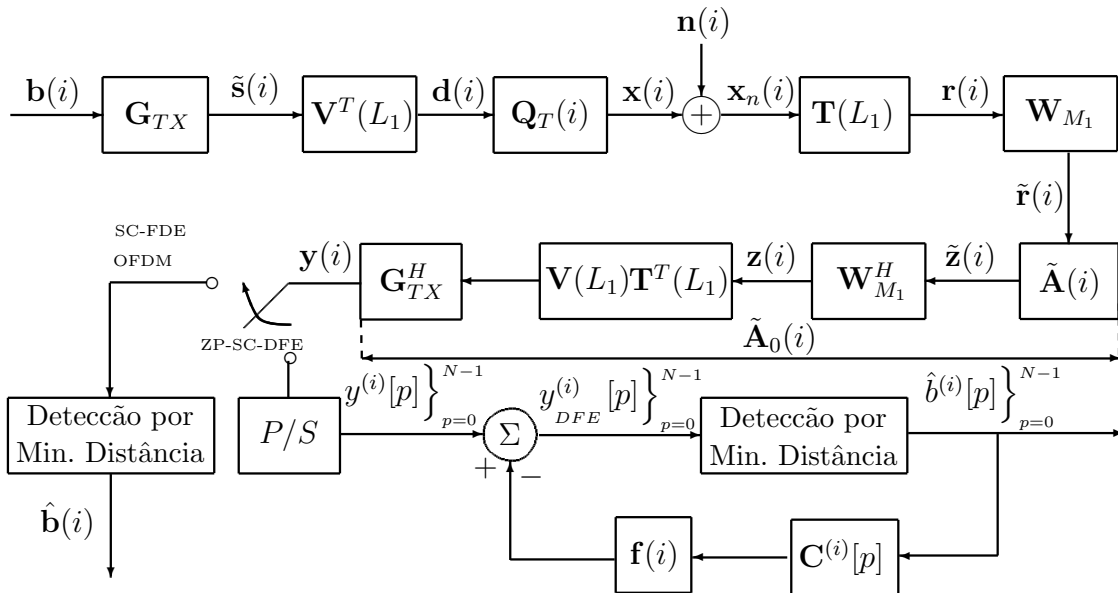


Figura 5.7: Diagrama em blocos do modelo unificado OFDM/SC, incluindo o estágio de DFE

5.7

Resultados de simulação

Primeiramente os resultados são apresentados para os equalizadores que detêm conhecimento de canal (MMSE e ZF). As curvas de desempenho do OFDM são comparadas com as do *single-carrier*.

Em seguida, as curvas de desempenho dos sistemas com equalização adaptativa são apresentadas.

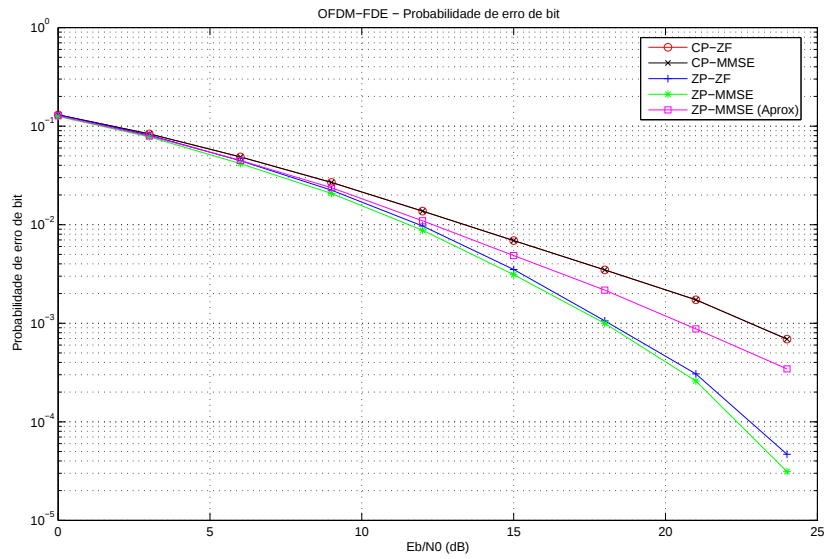


Figura 5.8: OFDM: Probabilidade de erro de bit para sistemas com equalização linear (LE).

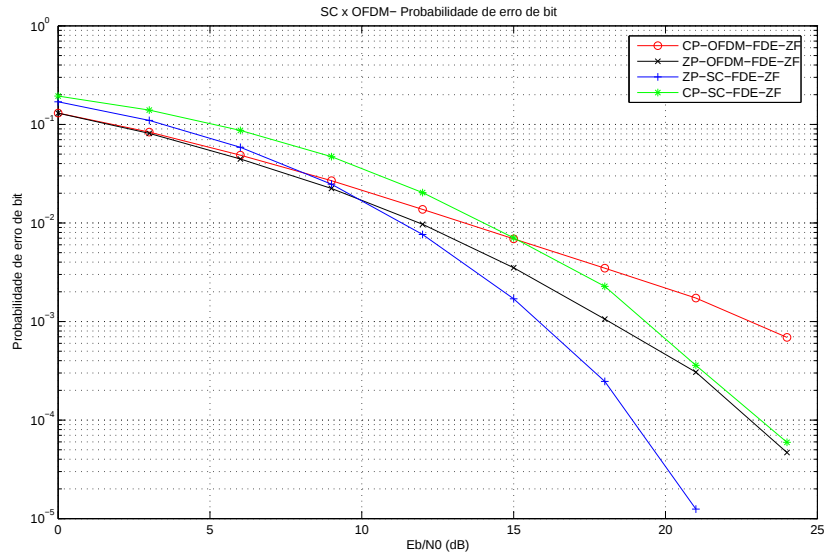


Figura 5.9: Probabilidade de erro de bit para sistemas OFDM e SC com equalização linear(LE) FDE-ZF.

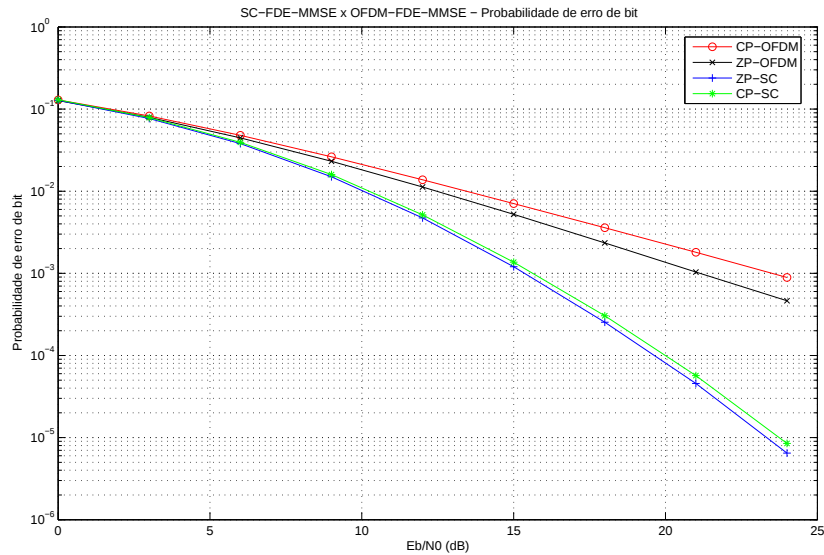


Figura 5.10: Probabilidade de erro de bit para sistemas OFDM e SC com equalização linear(LE) FDE-MMSE.

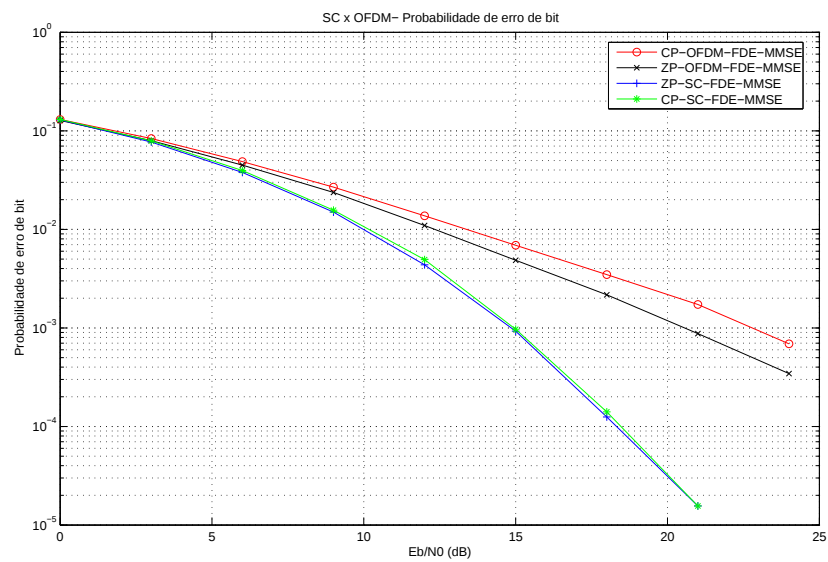


Figura 5.11: Probabilidade de erro de bit para OFDM e SC com equalização adaptativa linear.

5.8

Considerações finais

A técnica OFDM é largamente utilizada e difundida. A fato de se dividir a informação a ser transmitida em subportadoras com taxas inferiores (e por isso, com pulsos mais largos) motivou seu uso comercial e pesquisas.

Devido ao grau de semelhança com os sistemas SC, o modelo OFDM é bastante semelhando ao modelo SC e permite inclusive um esquema unificado de ambos com mostra a Figura 5.5.

Porém, como apresentado nos resultados de simulação, os sistemas de portadora única (*single-carrier*) apresentam desempenho superior ao OFDM, tanto com CP quanto com ZP.

O fato de dividir a informação em subportadoras traz consigo a perda de diversidade em frequência, principalmente no caso do CP-OFDM, onde não há qualquer diversidade envolvida.

Este sistema (CP-OFDM), contudo, permite equalizar apenas a fase em modulações PSK ou até mesmo, não precisam de equalização, caso seja utilizada um modulação PSK diferencial.