

2

Transmissão e recepção de sinais em portadora única

Neste capítulo é apresentado o modelo de sinais que será utilizado ao longo deste trabalho. A abordagem é da transmissão em blocos com apenas uma única portadora. A Seção 2.1 aborda as questões da transmissão, como a modulação utilizada (QPSK), o agrupamento em blocos, o uso do equivalente passa-baixa no modelo discreto e a inserção de faixa de guarda nos blocos, pelas técnicas conhecidas como ZP (*Zero-Padding*) e CP (*Cyclic-Prefix*).

Em seguida, a Seção 2.2 apresenta as questões acerca da recepção dos sinais transmitidos, caracterizações estatísticas do ruído, a representação matricial do sistema e a parcela de interferência entre blocos (IEB) que é eliminada, desde que a faixa de guarda tenha tamanho apropriado.

A Seção 2.3 traz as caracterizações do canal considerado, explicitando os dois casos considerados: fixo e aleatório. Depois, as seções 2.4 e 2.5 introduzem os estágios de equalização no domínio do tempo e da frequência respectivamente.

Por fim, resultados de simulação são apresentados na Seção 2.6 e comentários finais acerca dos resultados são tecidos na Seção 2.7.

2.1

Transmissão de sinais em única portadora

Considera-se um esquema de modulação complexa AM-PM, onde cada símbolo b , de duração T_s , representa um ponto desta constelação complexa, tal que:

$$b = b_{\zeta_1} + jb_{\zeta_2}; \quad \zeta_1, \zeta_2 = 1, 2, \dots, \log_2 \mathcal{A}. \quad (2-1)$$

Utiliza-se nesse trabalho $\mathcal{A}=4$ níveis (modulação quaternária QPSK), média nula (constelação balanceada) e variância $\sigma_b^2 = 1$ (igual à energia do sinal). O sistema de transmissão será considerado sob o ponto de vista de transmissões em blocos. Estes blocos são compostos de N símbolos de informação (b) e mais uma faixa de guarda de tamanho L . Esta faixa de guarda é propositalmente escolhida de maneira a garantir que o sistema opere sem interferência entre blocos sucessivos. Define-se como \mathbf{d} um bloco qualquer de tamanho $M = N + L$

e, portanto, duração MT_s . Seja a mensagem $\{m\}$ a ser enviada, composta pela sucessão de blocos \mathbf{d}

$$\{m\} = \sum_{\alpha=0}^{\infty} \sum_{\beta=0}^{M-1} d^{(\alpha)}[\beta] \delta(t - \beta T_s - \alpha M T_s), \quad (2-2)$$

onde $d^{(\alpha)}[\beta]$ representa o β -ésimo símbolo do α -ésimo bloco.

Dois maneiras de se inserir faixa de guarda são consideradas neste trabalho: uma chamada de ZP (*Zero-Padding* ou preenchimento com zeros), e a outra chamada de CP (*Cyclic-Prefix* ou prefixo cíclico). Ambas são largamente citadas na literatura, como em [13], [18] e [19]. As faixas de guarda têm o objetivo de anular os efeitos da Interferência Entre Blocos (IEB). A Seção 2.2 apresenta a IEB no modelo de sinais e a faixa de guarda necessária para combater a IEB.

2.1.1

ZP

No ZP-SC, o bloco \mathbf{d}_{ZP} é composto de N símbolos de informação concatenados com L zeros ao final do bloco. Assim, a mensagem discreta a ser enviada pode ser escrita como

$$\{m_{ZP}\} = \sum_{\alpha=0}^{\infty} \sum_{\beta=0}^{M-1} d_{ZP}^{(\alpha)}[\beta] \delta(t - \beta T_s - \alpha M T_s), \quad (2-3)$$

onde as componentes $d_{ZP}^{(\alpha)}[\beta]$ são definidas por

$$d_{ZP}^{(\alpha)}[\beta] = \begin{cases} b^{(\alpha)}[\beta] & ; 0 \leq \beta \leq N - 1 \\ 0 & ; N \leq \beta \leq M - 1 \end{cases} \quad (2-4)$$

Em notação matricial, define-se o vetor $N \times 1$ $\mathbf{b}^{(\alpha)}$ como

$$\mathbf{b}^{(\alpha)} = [b^{(\alpha)}[0], b^{(\alpha)}[1], \dots, b^{(\alpha)}[N - 1]]^T, \quad (2-5)$$

assim, o vetor $\mathbf{d}_{ZP}^{(\alpha)}$ pode ser obtido

$$\begin{aligned} \mathbf{d}_{ZP}^{(\alpha)} &= \begin{bmatrix} \mathbf{I}_N \\ \dots \\ \mathbf{0}_{(L \times N)} \end{bmatrix} \mathbf{b}^{(\alpha)} \\ &= [b^{(\alpha)}[0], b^{(\alpha)}[1], \dots, b^{(\alpha)}[N - 1], \underbrace{0, 0, \dots, 0}_{L \text{ zeros}}]^T, \end{aligned} \quad (2-6)$$

em que \mathbf{I}_N é a matriz identidade de dimensão $N \times N$ e $\mathbf{0}_{(L,N)}$ é um vetor de zeros de dimensão $L \times N$.

2.1.2 CP

No esquema CP-SC, a faixa de guarda é obtida fazendo uma cópia dos últimos L símbolos de $\mathbf{b}^{(\alpha)}$, e inserindo-os nas L primeiras posições de $\mathbf{d}^{(\alpha)}$. Ou seja a mensagem discreta nesse caso passa a ser

$$\{m_{CP}\} = \sum_{\alpha=0}^{\infty} \sum_{\beta=0}^{M-1} d_{CP}^{(\alpha)}[\beta] \delta(t - \beta T_s - \alpha M T_s), \quad (2-7)$$

onde as componentes $d_{CP}^{(\alpha)}[\beta]$ são definidas por

$$d_{CP}^{(\alpha)}[\beta] = \begin{cases} b^{(\alpha)}[\beta - L] & ; L \leq \beta \leq M - 1 \\ b^{(\alpha)}[\beta + N - L] & ; 0 \leq \beta \leq L - 1 \end{cases} \quad (2-8)$$

Cria-se desse modo uma extensão cíclica no bloco transmitido, pois

$$d_{CP}^{(\alpha)}[\beta] = d_{CP}^{(\alpha)}[\beta + N] \quad ; \forall \beta \in (0, L - 1). \quad (2-9)$$

Em notação matricial, pode-se obter $\mathbf{d}_{CP}^{(\alpha)}$ fazendo

$$\begin{aligned} \mathbf{d}_{CP}^{(\alpha)} &= \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{CP}^T \\ \dots \\ \mathbf{I}_N \end{bmatrix} \mathbf{b}^{(\alpha)} \\ &= \underbrace{[b^{(\alpha)}[N - L], \dots, b^{(\alpha)}[N - 1], b^{(\alpha)}[0], b^{(\alpha)}[1], \dots, b^{(\alpha)}[N - 1]]^T}_{\text{Prefixo } L}, \end{aligned} \quad (2-10)$$

em que a matriz $N \times L$ \mathbf{I}_{CP} contém as últimas L colunas da matriz identidade \mathbf{I}_N .

2.1.3 União dos modelos matriciais

Para auxiliar na estruturação do modelo, insere-se a seguinte variável:

$$L_1 = \begin{cases} 0; & \text{se for ZP} \\ L; & \text{se for CP} \end{cases} \quad (2-11)$$

É definida assim, uma nova dimensão (possivelmente reduzida) $M_1 = M - L_1$, que no caso do CP, se reduz ao tamanho N , ou seja, a dimensão original do bloco de informação \mathbf{b} . Já no caso do ZP, trabalha-se com a dimensão estendida M do bloco (os zeros introduzidos são computados na equalização, como é visto mais adiante).

Define-se agora a matriz $\mathbf{V}(L_1)$ que fornece o bloco \mathbf{d} com faixa de guarda de

tamanho L . Esta matriz é da forma

$$\mathbf{V}(L_1) = \left[\mathbf{I}_{CP} \vdots \mathbf{I}_N \vdots \mathbf{0}_{(N,L-L_1)} \right]. \quad (2-12)$$

Ou seja, quando trabalha-se com ZP, tem-se

$$\mathbf{V}^T(0) = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_N \\ \dots \\ \mathbf{0}_{(L \times N)} \end{bmatrix}. \quad (2-13)$$

Já no caso do CP, a matriz fica da forma

$$\mathbf{V}^T(L) = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{CP}^T \\ \dots \\ \mathbf{I}_N \end{bmatrix}. \quad (2-14)$$

2.1.4

Filtragem e envoltória complexa

A mensagem é então filtrada por um filtro de transmissão $p(t)$ (um pulso formatador, como por exemplo o filtro de raiz de cosseno levantado, com fator de roll-off qualquer [11]) resultando em uma seqüência infinita de blocos transmitidos denotada por

$$m(t) = \sum_{\alpha=0}^{\infty} \sum_{\beta=0}^{M-1} d^{(\alpha)}[\beta] \delta(t - \beta T_s - \alpha M T_s) \star p(t). \quad (2-15)$$

O modelo equivalente banda-básica é utilizado, sendo representado pela envoltória complexa dos sinais considerados [17] e [1]. Seja então $v(t)$, dado por

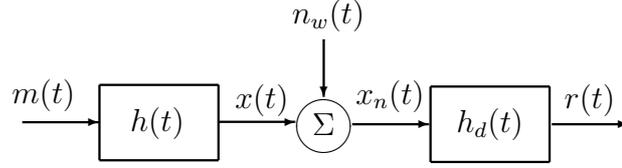
$$v(t) = \mathcal{R}e \{ m(t) e^{j2\pi f_c t} \}, \quad (2-16)$$

$m(t)$ é portanto, sua envoltória complexa com relação à frequência f_c .

2.2

Recepção de sinais em portadora única

A envoltória $m(t)$ do sinal $v(t)$ é então transmitida através de um canal passa-baixa, com resposta ao impulso $h(t)$, representando aqui a envoltória complexa da resposta ao impulso do canal. O canal $h(t)$ é um sistema linear invariante no tempo (SLIT) e por isso, a resposta à qualquer excitação na entrada é dada pela convolução linear desta entrada com a resposta impulsional do canal [12], [17], assim $x(t) = m(t) \star h(t)$. Em seguida, na entrada do equipamento receptor, o sinal resultante é corrompido por ruído aditivo gaussiano branco (RAGB) e é filtrado por um filtro de detecção $h_d(t)$. Para


 Figura 2.1: Sinal $r(t)$ observado na recepção

maximizar a razão sinal-ruído, este filtro $h_d(t)$ é casado ao sinal resultante da convolução entre o filtro de transmissão $p(t)$ e o canal de comunicação $h(t)$.

A envoltória do sinal resultante desses estágios é chamada de $r(t)$, que é dada por

$$r(t) = m(t) \star h(t) \star h_d(t) + n_w(t) \star h_d(t), \quad (2-17)$$

onde $n_w(t)$ é a envoltória complexa do RAGB com relação à frequência f_c e representa um processo aleatório estacionário no sentido amplo. Resumidamente, apresenta as seguintes características $\tau = t_2 - t_1$.

$$\mathbb{E}[n_w(t)] = 0, \quad \forall t; \quad (2-18)$$

$$R_{n_w}(\tau) = \mathbb{E}[n_w(t + \tau)n_w^*(t)] = 2N_0\delta(\tau); \quad (2-19)$$

$$\mathbb{E}[n_w(t_1)n_w(t_2)] = 0, \quad \forall(t_1, t_2). \quad (2-20)$$

e com densidade espectral de potência

$$S_{n_w}(f) = \mathcal{F}[R_{n_w}(\tau)] = 2N_0. \quad (2-21)$$

Substituindo a expressão (2-15) em (2-17), obtém-se

$$r(t) = \sum_{\alpha=0}^{\infty} \sum_{\beta=0}^{M-1} d^{(\alpha)}[\beta]\delta(t - \beta T_s - \alpha M T_s) \star p(t) \star h(t) \star h_d(t) + n_w(t) \star h_d(t). \quad (2-22)$$

Denomina-se de canal equivalente $q(t)$ a resposta ao impulso formada pelas convoluções agregadas do filtro formatador, o canal de comunicação e o filtro de detecção, ou seja, $q(t) = p(t) \star h(t) \star h_d(t)$. Da mesma maneira, $n(t)$ é definido como a resposta do processo ruidoso $n_w(t)$ filtrado pelo filtro de detecção, de maneira que $n(t) = n_w(t) \star h_d(t)$. Assim, a expressão (2-22) pode ser reescrita como

$$r(t) = \sum_{\alpha=0}^{\infty} \sum_{\beta=0}^{M-1} d^{(\alpha)}[\beta]q(t - \beta T_s - \alpha M T_s) + n(t). \quad (2-23)$$

Em seguida o vetor é amostrado à taxa de símbolos $t_{i,k} = i M T_s + k T_s$, resultando em:

$$r^{(i)}[k] = \sum_{\alpha=0}^{\infty} \sum_{\beta=0}^{M-1} d^{(\alpha)}[\beta]q[(i - \alpha) M T_s + (k - \beta) T_s] + n(i M T_s + k T_s). \quad (2-24)$$

Suprimindo a constante T_s da resposta ao impulso do canal equivalente, ou

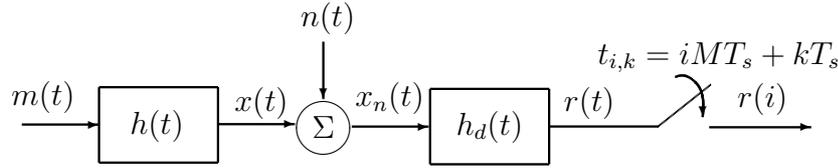


Figura 2.2: Sinal $r(t)$ amostrado

seja

$$q[(i - \alpha)M + (k - \beta)] = q[(i - \alpha)MT_s + (k - \beta)T_s],$$

e simplificando a notação para as amostras do ruído filtrado

$$n^{(i)}[k] = n(iMT_s + kT_s)$$

permite assim rescrever a equação (2-24) da forma

$$r^{(i)}[k] = \sum_{\alpha=0}^{\infty} \sum_{\beta=0}^{M-1} d^{(\alpha)}[\beta]q[(i - \alpha)M + (k - \beta)] + n^{(i)}[k]. \quad (2-25)$$

O sistema considerado é causal, ou seja, não depende de valores futuros para determinar o presente, e assim $\alpha \leq i$. Fazendo também uma substituição de variáveis, $\gamma = k - \beta$, obtém-se:

$$r^{(i)}[k] = \sum_{\alpha=0}^i \sum_{\gamma=k-M+1}^k d^{(\alpha)}[k - \gamma]q[(i - \alpha)M + \gamma] + n^{(i)}[k]. \quad (2-26)$$

O canal de comunicações é suposto ter resposta impulsional de ordem $P - 1$ (ou comprimento P) (mais sobre a caracterização estatística do canal na Seção 2.3), assim, $q[p] = 0, \forall p \notin [0, P - 1]$. Considera-se que o comprimento do canal P não é maior que a dimensão do bloco M , ou seja, $P < M$ e que a faixa de guarda L utilizada em cada bloco $\mathbf{d}(i)$ tenha tamanho apropriado, isto é, suficiente para anular o efeitos da IEB. Para $\alpha = i$, tem-se que

$$r^{(i)}[k] = \sum_{\gamma=0}^{P-1} d^{(i)}[k - \gamma]q[\gamma] + n^{(i)}[k], \quad 0 \leq k \leq M - 1. \quad (2-27)$$

Esta expressão representa a convolução discreta do i -ésimo bloco com as amostras da envoltória do canal equivalente. Pode-se dividi-la em duas parcelas,

$$r^{(i)}[k] = \begin{cases} \sum_{\gamma=0}^k d^{(i)}[k - \gamma]q[\gamma] + n^{(i)}[k], & 0 \leq k \leq P - 2 \\ \sum_{\gamma=0}^{P-1} d^{(i)}[k - \gamma]q[\gamma] + n^{(i)}[k], & P - 1 \leq k \leq M - 1. \end{cases}, \quad (2-28)$$

em que a primeira linha de (2-28) representa as primeiras $P - 1$ componentes do vetor observado $\mathbf{r}(i)$ originadas dos primeiros P símbolos do bloco $\mathbf{d}(i)$ convoluídos com o canal $\mathbf{q}(i)$. Para $\alpha = i - 1$, tem-se

$$r^{(i)}[k] = \sum_{\gamma=k-M+1}^{P-M-1} d^{(i-1)}[k-\gamma]q[M+\gamma] + n^{(i)}[k], \quad 0 \leq k \leq P-2. \quad (2-29)$$

Fazendo uma mudança de variável $\gamma' = \gamma + M$, permite rescrever (2-29) de forma equivalente

$$r^{(i)}[k] = \sum_{\gamma'=k+1}^{P-1} d^{(i-1)}[M+k-\gamma']q[\gamma'] + n^{(i)}[k], \quad 0 \leq k \leq P-2, \quad (2-30)$$

possibilitando assim escrever o k -ésimo símbolo do i -ésimo bloco recebido $\mathbf{r}(i)$ como:

$$r^{(i)}[k] = \begin{cases} \sum_{\gamma=0}^k d^{(i)}[k-\gamma]q[\gamma] + \sum_{\gamma=k+1}^{P-1} d^{(i-1)}[M+k-\gamma]q[\gamma] + n^{(i)}[k], & 0 \leq k \leq P-2 \\ \sum_{\gamma=0}^{P-1} d^{(i)}[k-\gamma]q[\gamma] + n^{(i)}[k], & P-1 \leq k \leq M-1. \end{cases} \quad (2-31)$$

As primeiras $P - 1$ componentes de $\mathbf{r}(i)$ contém as últimas $P - 1$ componentes de $\mathbf{d}(i-1)$, conforme pode ser verificado na equação (2-31). Estas componentes, que são as parcelas de IEB, podem ser retiradas desde que utilizada faixa de guarda com tamanho mínimo de $L \geq P - 1$.

Pode-se escrever os somatórios da equação (2-31) em forma matricial, assim

$$\mathbf{r}(i) = \mathbf{Q}_T(i)\mathbf{d}(i) + \mathbf{Q}_{IEB}\mathbf{d}(i-1) + \mathbf{n}(i), \quad (2-32)$$

onde $\mathbf{Q}_T(i)\mathbf{d}(i)$ e $\mathbf{Q}_{IEB}(i)\mathbf{d}(i-1)$ representam as expressões (2-27) e (2-29) respectivamente. A matriz $M \times M$ $\mathbf{Q}_T(i)$ representa a convolução discreta linear, por isso, é uma matriz *Toeplitz* onde a primeira coluna contém o vetor que representa o canal equivalente e mais $M - P$ zeros concatenados ao final do vetor, ou seja, $[q^{(i)}[0] \dots q^{(i)}[P-1]0 \dots 0]^T$. Assim:

$$\mathbf{Q}_T(i) = \begin{bmatrix} q^{(i)}[0] & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ q^{(i)}[1] & q^{(i)}[0] & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ q^{(i)}[2] & q^{(i)}[1] & q^{(i)}[0] & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & q^{(i)}[0] & \vdots & \dots & 0 \\ q^{(i)}[P-1] & q^{(i)}[P-2] & q^{(i)}[P-3] & \dots & \ddots & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & q^{(i)}[P-1] & \dots & q[0] \end{bmatrix}. \quad (2-33)$$

A matriz $\mathbf{Q}_{IEB}(i)$, que representa a interferência entre blocos sucessivos, tem dimensão $M \times M$, é *Toeplitz* triangular superior e contém na primeira linha $[0 \dots q^{(i)}[P-1] \dots q^{(i)}[1]]$, ou seja:

$$\mathbf{Q}_{IEB}(i) = \begin{bmatrix} 0 & \dots & q^{(i)}[P-1] & \dots & q^{(i)}[1] \\ \vdots & \ddots & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \ddots & \dots & q^{(i)}[P-1] \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}. \quad (2-34)$$

Seja $\mathbf{n}(i)$ o vetor que contém as amostras do ruído filtrado

$$\mathbf{n}(i) = [n^{(i)}[0], n^{(i)}[1], \dots, n^{(i)}[M-1]]^T, \quad (2-35)$$

então este possui média nula, e matriz covariância dada por:

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_n &= \mathbb{E} [\mathbf{n}(i)\mathbf{n}^H(i)] \\ &= N_0 \mathbf{I}_M \\ &= \sigma_n^2 \mathbf{I}_M. \end{aligned} \quad (2-36)$$

Como o vetor $\mathbf{n}(i)$ é complexo com variância N_0 , as partes real e imaginária deste vetor tem variância igual à $\frac{N_0}{2}$ cada. Assim, tem-se a seguinte expressão para o vetor recebido $\mathbf{r}(i)$ que representa as amostras da envoltória do i -ésimo bloco recebido:

$$\mathbf{r}(i) = \mathbf{Q}_T(i)\mathbf{V}^T(L_1)\mathbf{b}(i) + \mathbf{Q}_{IEB}(i)\mathbf{V}^T(L_1)\mathbf{b}(i-1) + \mathbf{n}(i). \quad (2-37)$$

2.2.1

Bloco recebido CP

No caso do CP ($L_1 = L$), e não há IEB pois retira-se os primeiros L símbolos (faixa de guarda) do bloco considerado¹. Definindo a matriz $\mathbf{T}(L)$ que remove a faixa de guarda, tem-se

$$\mathbf{T}(L) = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{N \times L} & \vdots & \mathbf{I}_{N \times N} \end{bmatrix}, \quad (2-38)$$

onde $\mathbf{0}_{N \times L}$ representa uma matriz de zeros de dimensão $N \times L$. Seja $\mathbf{r}(i)$ o

¹Considera-se nesse trabalho sincronização perfeita de portadora e conhecimento exato de início/fim do bloco (*block timing*).

vetor definido em (2-37), o vetor $\mathbf{r}_{CP}(i)$ de dimensão $N \times 1$, é

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_{CP}(i) &= \mathbf{T}(L)\mathbf{r}(i) \\ &= \underbrace{\mathbf{T}(L)\mathbf{Q}_T(i)\mathbf{V}^T(L)}_{\mathbf{Q}_c} \mathbf{b}(i) + \underbrace{\mathbf{T}(L)\mathbf{Q}_{IEB}}_{\mathbf{0}_{N \times M}} \underbrace{\mathbf{V}^T(L)\mathbf{b}(i-1)}_{\mathbf{d}_{CP}(i-1)} + \mathbf{T}(L)\mathbf{n}(i) \\ &= \mathbf{Q}_c \mathbf{b}(i) + \mathbf{n}_N(i), \end{aligned} \quad (2-39)$$

onde $\mathbf{n}_N(i)$ contém as últimas N amostras do vetor $\mathbf{n}(i)$. O segundo membro da equação (2-39) é igual a $\mathbf{0}_{N \times 1}$, o que significa ausência de IEB. Já o primeiro membro é equivalente a fazer

$$\mathbf{T}(L)\mathbf{Q}_T \mathbf{d}_{CP}(i) = \mathbf{Q}_c \mathbf{b}(i), \quad (2-40)$$

em que \mathbf{Q}_c é uma matriz circulante, de dimensão $N \times N$. A primeira linha desta matriz é $[q[0], \mathbf{0}_{(1, N-P)}, q[P-1], \dots, q[1]]$ e a primeira coluna é $[q^{(i)}[0], q^{(i)}[1], \dots, q^{(i)}[P-1], \mathbf{0}_{(1 \times N-P)}]^T$. Ou seja,

$$\mathbf{Q}_c = \begin{bmatrix} q^{(i)}[0] & 0 & \dots & \dots & q^{(i)}[1] \\ \vdots & q^{(i)}[0] & 0 & \dots & \vdots \\ q^{(i)}[P-1] & \vdots & q^{(i)}[0] & \dots & q^{(i)}[P-1] \\ 0 & q^{(i)}[P-1] & \vdots & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & q^{(i)}[0] \end{bmatrix}. \quad (2-41)$$

Os elementos desta matriz podem ser encontrados calculando $[Q_c(i)]_{m,k} = q^{(i)}[m-k]_{\text{mod}M}$. Cada coluna de $\mathbf{Q}_c(i)$ é um deslocamento cíclico para baixo em relação à coluna anterior.

2.2.2

Bloco recebido ZP

No caso em que estivermos trabalhando com ZP ($L_1 = 0$), percebe-se que não há IEB no i -ésimo bloco, pois os últimos L símbolos (faixa de guarda) do $(i-1)$ -ésimo bloco contém apenas zeros, conforme visto na equação (2-6). Assim, o segundo membro da equação (2-37) denotado por $\mathbf{Q}_{IEB}(i)\mathbf{V}^T(0)\mathbf{b}(i-1)$, corresponde a um vetor de zeros de dimensão $M \times 1$. O vetor recebido $\mathbf{r}_{ZP}(i)$, também de dimensão $M \times 1$, então fica

$$\mathbf{r}_{ZP}(i) = \mathbf{Q}_T \underbrace{\mathbf{V}^T(0)\mathbf{b}(i)}_{\mathbf{d}_{ZP}} + \mathbf{n}_M(i) \quad (2-42)$$

$$= \mathbf{Q}_T \begin{bmatrix} \mathbf{I}_N \\ \mathbf{0}_{L \times N} \end{bmatrix} \mathbf{b}(i) + \mathbf{n}_M(i). \quad (2-43)$$

A matriz *Toeplitz* $\mathbf{Q}_T(i)$ pode ser particionada da forma

$$\mathbf{Q}_T(i) = \left[\mathbf{Q}_0(i) : \mathbf{Q}_{ZP}(i) \right], \quad (2-44)$$

onde $\mathbf{Q}_0(i)$ é uma matriz *Toeplitz* (truncada), triangular inferior de dimensão $M \times N$ que contém as primeiras N colunas de (2-33) e $\mathbf{Q}_{ZP}(i)$, as últimas L colunas de (2-33). Assim, permite que (2-43) possa ser expressa da forma

$$\mathbf{r}_{ZP}(i) = \mathbf{Q}_0(i)\mathbf{b}(i) + \mathbf{n}_M(i). \quad (2-45)$$

2.3

Modelo do canal equivalente

O canal equivalente $\mathbf{q}(i)$ utilizado neste trabalho é descrito de duas maneiras diferentes: canal fixo e canal variante no tempo. Entende-se por canal fixo aquele que se mantém fixo durante toda a realização de uma transmissão. Já os canais variantes no tempo, variam à taxa de blocos do sistema considerado. As definições de ambos os canais são apresentadas nas subseções seguintes.

Sua modelagem é de um filtro FIR (*Finite-duration Impulse Response*), de duração finita, pois assim evita-se o problema do canal representar uma função potencialmente instável, como nos casos dos filtros IIR (*Infinite-duration Impulse Response*) em decorrência da presença de *feedback*, que provoca resposta com duração infinita. O filtro FIR é, neste caso, modelado com $P = 4$ coeficientes ou *taps*,

$$\begin{aligned} \mathbf{q}(i) &= [q_1(i), q_2(i), q_3(i), q_4(i)]^T \\ &= [p_1\alpha_1, p_2\alpha_2, p_3\alpha_3, p_4\alpha_4]^T, \end{aligned} \quad (2-46)$$

onde p_l são pesos fixos e α_l são variáveis aleatórias, e assim, formam cada componente do canal $q_l(i) = p_l\alpha_l$. As subseções 2.3.1 e 2.3.2 explicitam com mais profundidade a variável α_l . A escolha dos pesos (perfil de potência dos retardos ou *power delay profile*) é tal que:

$$\begin{aligned} \mathbf{p}(i) &= [0dB, -3dB, -6dB, -9dB]^T \\ &= [p_1^2(dB), p_2^2(dB), p_3^2(dB), p_4^2(dB)]^T. \end{aligned} \quad (2-47)$$

Os pesos p_l satisfazem a $\sum_{l=1}^P p_l^2 = 1$ (quando não estão em *dB*).

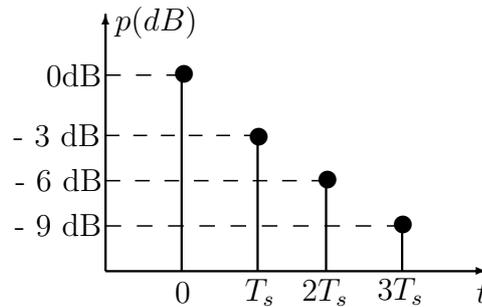


Figura 2.3: Perfil de potência (em dB) dos retardos ou *power delay profile* do canal equivalente considerado.

Numa situação real de transmissão sem-fio, o canal (interface aérea) se apresenta com múltiplos percursos (ou ecos) entre origem e destino. Ou seja, a antena receptora recebe uma mesma informação mais de uma vez, pois esta percorre caminhos diferentes e por conta disso, leva tempos diferentes entre a transmissão e a recepção da mesma. A atenuação experimentada pelo sinal também não é igual nos vários caminhos percorridos. Estes diversos percursos são exatamente os pesos p_l em (2-47).

Esta função complexa $\mathbf{q}(i)$ (canal equivalente) pode causar no sinal portador da informação alterações de fase e amplitude (canal equivalente é linear).

2.3.1

Canal fixo

O canal fixo considerado foi do tipo fixo-aleatório, onde um determinado canal é sorteado no início da simulação e é repetido ao longo de todos os blocos desta mesma realização. Neste caso, as variáveis aleatórias α_l em (2-46) foram modeladas como Gaussianas complexas estatisticamente independentes, todas com média nula e $\mathbb{E}[|\alpha_l|^2] = 1$. Os valores de α_l são sorteados no início de cada simulação e mantidos fixos ao longo de cada teste.

Dessa maneira, obtém-se uma média do comportamento do sistema em diversos canais fixos. Como a cada repetição da simulação, um novo canal fixo é sorteado aleatoriamente, denomina-se de canal fixo-aleatório.

2.3.2

Canal variante no tempo

Quando há movimento relativo entre o transmissor e o receptor, o canal sofre variações de fase/amplitude. Estas variações ocasionam o que é conhecido como desvanecimento do sinal, ou seja, flutuações do mesmo ao longo do tempo.

Parte-se do pressuposto que as ondas eletromagnéticas que formam o sinal composto na antena receptora são todas de amplitudes equivalentes. Este

cenário é verdade na maioria dos casos de transmissão celular por exemplo, onde não há linha de visada. Nesta situação, tem-se que o desvanecimento é dado por uma função densidade de probabilidade (*fdp*) de Rayleigh [8]. Este é o modelo adotado de agora em diante.

Nos casos em que há uma componente dominante, a estatística do canal é diferente e o desvanecimento é descrito por uma *fdp* de Rice [8]. Devido à componente especular majoritária, há menos vales no espectro do canal. Esta situação não é tratada neste trabalho.

Para o canal variante no tempo do modelo considerado, supõe-se que $\alpha_l(i)$, $i = 1, 2, 3, \dots$, são seqüências de variáveis aleatórias Gaussianas complexas correlacionadas, obtidas ao se filtrar um processo Gaussiano complexo branco por um filtro cuja resposta é dada aproximadamente por [3]

$$H_{dop}(f) = \frac{\Xi}{\sqrt{1 - \left(\frac{f}{f_d}\right)^2}}, \quad (2-48)$$

em que Ξ é uma constante de normalização, $f_d = \frac{v}{\lambda_w}$ é o máximo desvio

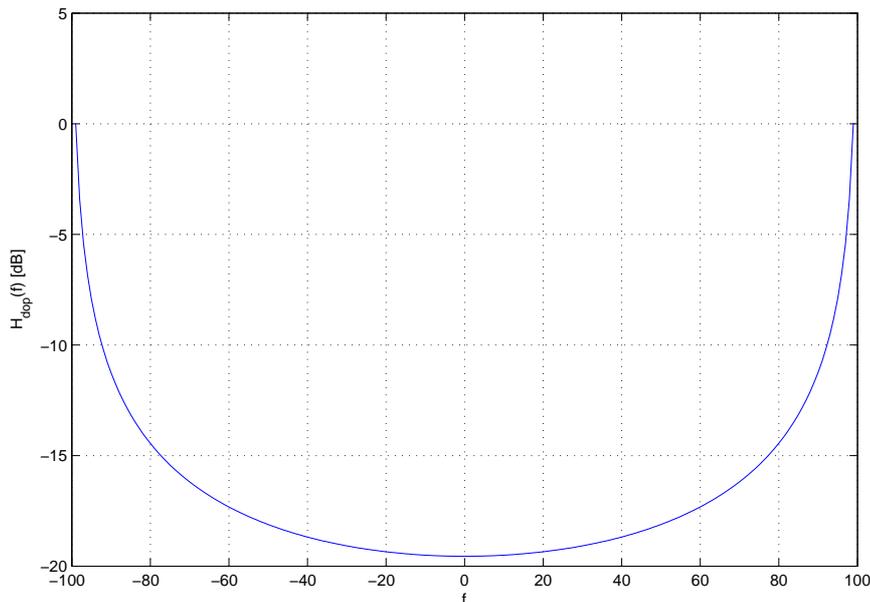


Figura 2.4: Exemplo do espectro de Jakes com $f_d^{max} = 100Hz$, $f_c = 900MHz$ e velocidade do terminal móvel $v = 120Km/h$

doppler de freqüência, λ_w é o comprimento de onda e v é a velocidade de deslocamento do terminal móvel. Os resultados para canal variante no tempo são apresentadas em termos da freqüência doppler normalizada ($f_d T$), onde T é a duração de 1 bloco.

O módulo da variável aleatória complexa α_l tem densidade de probabilidade de Rayleigh e sua fase é uniformemente distribuída entre $[0, 2\pi]$. Canais desta forma são chamados de canais com desvanecimento de Rayleigh. O espectro dado por (2-48) é conhecido como espectro de Jakes (Figura 2.3.2).

O canal altera a amplitude e a fase do sinal. Surge então a necessidade de equalizá-los no intuito de mitigar estas distorções. A próxima seção trata dos equalizadores. Para uma primeira análise, supõe-se conhecimento das componentes do canal. No Capítulo 3, são estudados algoritmos adaptativos que estimam estas distorções e, recursivamente, tentam minimizá-las segundo critérios específicos.

2.4 Equalização no domínio do tempo

O bloco observado na recepção sofre distorções causadas pelo canal conforme visto na seção anterior. Os equalizadores, representados aqui pela matriz $\mathbf{A}(i)$, operam sobre os blocos recebidos com objetivo de mitigar os efeitos dessas distorções. Dois equalizadores são apresentados: ZF (*Zero-Forcing*) e MMSE (*Minimum Mean Squared Error*). Ambos supõem conhecimento das componentes do canal e operam em bloco no domínio do tempo (*Time Domain Equalization* ou TDE).

As deduções para o filtro ZF estão apresentados nas próprias sub-seções que se seguem, enquanto as derivações para os filtros MMSE se encontram no Apêndice A.

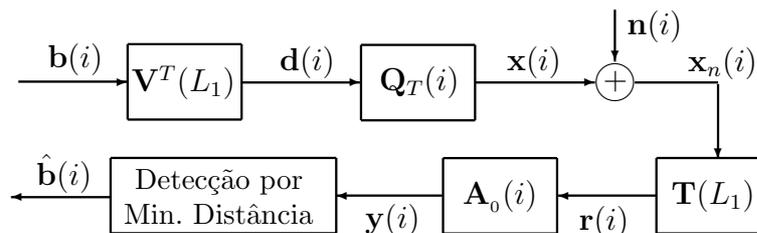


Figura 2.5: Modelo do sistema *single-carrier* com equalização no domínio do tempo.

2.4.1 Equalizador Zero-Forcing no domínio do tempo

O equalizador ZF retira apenas a interferência do canal, computando a inversa da matriz do canal que pré-multiplica os dados $\mathbf{b}(i)$ em (2-45) e em (2-39), sem levar em consideração o efeito do ruído.

2.4.2 CP-TDE-ZF

Neste caso, equaliza-se o bloco recebido em (2-39), resultando no bloco que é entregue ao decisor

$$\mathbf{y}_{ZF}(i) = \mathbf{A}_{0,ZF}(i)\mathbf{Q}_c(i)\mathbf{b}(i) + \underbrace{\mathbf{A}_{0,ZF}(i)\mathbf{n}_N(i)}_{\mathbf{n}_{ZF}}. \quad (2-49)$$

O equalizador ZF tem o objetivo de fazer com que $\mathbf{A}_{0,ZF}(i)\mathbf{Q}_c(i) = \mathbf{I}_N$. Portanto, a matriz $\mathbf{A}_{0,ZF}(i)$ é dada por

$$\mathbf{A}_{0,ZF}(i) = \mathbf{Q}_c^{-1}(i). \quad (2-50)$$

A estimativa *Zero-Forcing*, produzida pelo decisor de mínima distância, pode então ser escrita como

$$\hat{\mathbf{b}}_{ZF}(i) = DISC[\mathbf{b}(i) + \mathbf{Q}_c^{-1}(i)\mathbf{n}_N(i)], \quad (2-51)$$

onde $\hat{\mathbf{b}}_{ZF}^{(i)}[k] = DISC[\mathbf{y}_{ZF}^{(i)}[k]]$ corresponde ao ponto da constelação de sinais definida em (2-1) mais próximo de $\mathbf{y}_{ZF}^{(i)}[k]$. Pela equação (2-51) nota-se um grande problema do equalizador ZF: a amplificação do ruído caso as componentes do canal tenham valores muito pequenos (ou mesmo a não inversibilidade da matriz $\mathbf{Q}_c(i)$ caso seu determinante seja nulo).

2.4.3 ZP-TDE-ZF

A partir do bloco recebido, definido em (2-43), tem-se na saída do equalizador ZF

$$\mathbf{y}_{ZF}(i) = \mathbf{A}_{0,ZF}(i)\mathbf{Q}_0(i)\mathbf{b}(i) + \underbrace{\mathbf{A}_{0,ZF}(i)\mathbf{n}_M(i)}_{\mathbf{n}_{ZF}}, \quad (2-52)$$

que é entregue ao decisor. De maneira análoga ao CP-TDE-ZF, o equalizador tem como objetivo fazer com que $\mathbf{A}_{0,ZF}(i)\mathbf{Q}_0(i) = \mathbf{I}_N$. Porém, como $\mathbf{Q}_0(i)$ é uma matriz de dimensão $M \times N$, $\mathbf{A}_{0,ZF}(i)$ representa então a pseudo-inversa de $\mathbf{Q}_0(i)$, ou seja,

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{0,ZF}(i) &= \mathbf{Q}_0^\dagger(i) \\ &= [\mathbf{Q}_0^H(i)\mathbf{Q}_0(i)]^{-1} \mathbf{Q}_0^H(i). \end{aligned} \quad (2-53)$$

Nesse caso, a estimativa *Zero-Forcing* do ZP-SC-TDE, com equalização no domínio do tempo é

$$\hat{\mathbf{b}}_{ZF}(i) = DISC\{\mathbf{b}(i) + [\mathbf{Q}_0^H(i)\mathbf{Q}_0(i)]^{-1} \mathbf{Q}_0^H(i)\mathbf{n}(i)\}. \quad (2-54)$$

Novamente, a equação (2-54) denota uma desvantagem do equalizador ZF. Devido à inversão de $\mathbf{Q}_0^H(i)\mathbf{Q}_0(i)$, pode haver uma forte amplificação do ruído, caso as componentes em frequência do canal se aproximem de zero (ou a impossibilidade de se inverter o produto $\mathbf{Q}_0^H(i)\mathbf{Q}_0(i)$ caso o determinante da matriz resultante seja zero).

2.4.4 CP-TDE-MMSE

O equalizador MMSE para o caso do CP é encontrado minimizando a função custo

$$J = \mathbb{E} [\|\mathbf{b}(i) - \mathbf{A}_0(i)\mathbf{r}_{CP}(i)\|^2]. \quad (2-55)$$

A solução MMSE para o filtro CP-SC no domínio do tempo é (ver Apêndice A)

$$\mathbf{A}_{0,MMSE}(i) = \mathbf{Q}_c^H(i) [\sigma_b^2 \mathbf{Q}_c(i)\mathbf{Q}_c^H(i) + \sigma_n^2 \mathbf{I}_N]^{-1}, \quad (2-56)$$

lembrando que a energia dos símbolos PSK, denotada por σ_b^2 , é considerada igual à 1 para simplificar os cálculos, sem com isso acarretar em perda de generalidade dos resultados obtidos.

2.4.5 ZP-TDE-MMSE

O equalizador MMSE para o caso do ZP é encontrado minimizando a função custo

$$J = \mathbb{E} [\|\mathbf{b}(i) - \mathbf{A}_0(i)\mathbf{r}_{ZP}(i)\|^2]. \quad (2-57)$$

A solução MMSE para o filtro ZP-SC no domínio do tempo é (ver Apêndice A)

$$\mathbf{A}_{0,MMSE}(i) = \mathbf{Q}_0^H(i) [\mathbf{Q}_0(i)\mathbf{Q}_0^H(i) + \sigma_n^2 \mathbf{I}_M]^{-1}. \quad (2-58)$$

2.5 Equalização no domínio da frequência

Uma segunda maneira de se resolver o problema de equalização é realizá-la no domínio da transformada. Uma DFT (*Discrete Fourier Transform*) é então aplicada no bloco recebido. Após a equalização por $\tilde{\mathbf{A}}(i)$, o bloco equalizado é novamente transformado para o domínio do tempo e assim, segue para sua posterior detecção (Figura 2.6). A DFT (normalizada) é representada

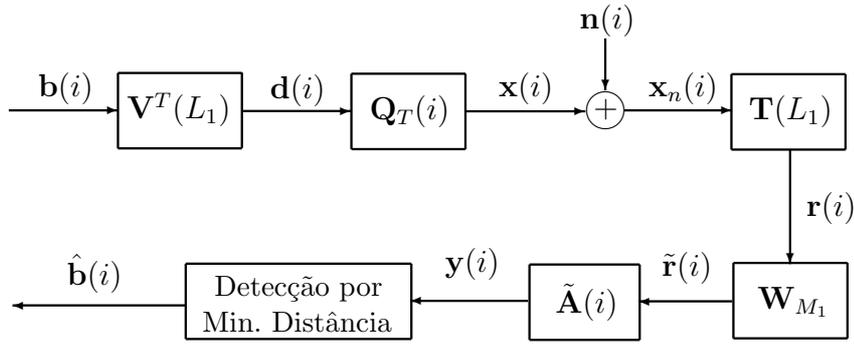


Figura 2.6: Modelo do sistema SC com equalização no domínio da frequência.

pela matriz

$$\mathbf{W}_{M_1} = \frac{1}{\sqrt{M_1}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & W_{M_1}^1 & W_{M_1}^2 & \dots & W_{M_1}^{(M_1-1)} \\ 1 & W_{M_1}^2 & W_{M_1}^4 & \dots & W_{M_1}^{2(M_1-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & W_{M_1}^{(M_1-1)} & W_{M_1}^{2(M_1-1)} & \vdots & W_{M_1}^{(M_1-1)(M_1-1)} \end{bmatrix}, \quad (2-59)$$

que possui componentes

$$[W_{M_1}]_{m,v} = \frac{1}{\sqrt{M_1}} e^{-j \frac{2\pi}{M_1} mv} \quad 0 \leq m, v \leq M_1 - 1. \quad (2-60)$$

Cabe ressaltar que a matriz de DFT (normalizada) \mathbf{W}_{M_1} é uma matriz unitária, pois

$$\mathbf{W}_{M_1}^H \mathbf{W}_{M_1} = \mathbf{I}_{M_1}. \quad (2-61)$$

O cálculo de uma DFT necessita normalmente de M_1^2 multiplicações complexas e $M_1(M_1 - 1) \approx M_1^2$ adições complexas [9]. Claramente, a dependência é quadrática, ou seja

$$DFT = \mathcal{O}(M_1^2),$$

o que pode se tornar computacionalmente inviável caso M_1 cresça muito. Entretanto, uma gama de algoritmos existentes calculam a transformada de Fourier discreta realizando um número menor de operações. Estes algoritmos são conhecidos como FFT (*Fast Fourier Transform*) e tem custo computacional de

$$\mathcal{O}(M_1 \log M_1).$$

Ao longo deste trabalho, usa-se as FFTs para implementar as transformações discretas entre tempo e frequência.

Propriedades das transformadas discretas de Fourier são utilizadas e alguns resultados interessantes trazem simplificações nas equalizações. Novamente, os equalizadores ZF e MMSE são considerados. Ambos supõem conhecimento das componentes da transformada do canal e operam em blocos

no domínio da frequência (*Frequency Domain Equalization* ou FDE). Assim como foi feito no caso dos equalizadores no domínio do tempo, as deduções das expressões para os filtros MMSE estão no Apêndice A.

2.5.1

Propriedade das DFTs

Seja \mathbf{Q}_c uma matriz circulante de dimensão $M \times M$, como definida em (2-41), a transformação da forma $\mathbf{W}_M \mathbf{Q}_c \mathbf{W}_M^H$, gera uma matriz diagonal, de tamanho M , contendo os autovalores de \mathbf{Q}_c em sua diagonal principal. Estes autovalores representam a resposta em frequência do canal:

$$\tilde{\mathbf{Q}}_d = \mathbf{W}_M \mathbf{Q}_c \mathbf{W}_M^H. \quad (2-62)$$

A operação inversa, $\mathbf{W}_M^H \tilde{\mathbf{Q}}_d \mathbf{W}_M$, onde $\tilde{\mathbf{Q}}_d$ é uma matriz diagonal de tamanho M , gera uma matriz circulante \mathbf{Q}_c , contendo em sua primeira coluna a IDFT da diagonal principal de $\tilde{\mathbf{Q}}_d$:

$$\mathbf{Q}_c = \mathbf{W}_M^H \tilde{\mathbf{Q}}_d \mathbf{W}_M. \quad (2-63)$$

2.5.2

CP-FDE-ZF

O vetor (2-39) é transformado por meio de uma DFT de N -pontos:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{r}}_{CP}(i) &= \mathbf{W}_N \mathbf{r}_{CP}(i) \\ &= \mathbf{W}_N \mathbf{Q}_c \mathbf{b}(i) + \underbrace{\mathbf{W}_N \mathbf{n}_N(i)}_{\tilde{\mathbf{n}}_N(i)} \end{aligned} \quad (2-64)$$

Como as DFTs estão normalizadas, estas representam uma transformação unitária, e então tem-se que $\tilde{\mathbf{n}}_N(i)$ possui a mesma caracterização estatística de $\mathbf{n}(i)$. Observando a propriedade de DFTs descrita na sub-seção anterior, pode-se fazer

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{r}}_{CP}(i) &= \underbrace{\mathbf{W}_N \mathbf{Q}_c \mathbf{W}_N^H}_{\tilde{\mathbf{Q}}_d} \mathbf{W}_N \mathbf{b}(i) + \tilde{\mathbf{n}}_N(i) \\ &= \tilde{\mathbf{Q}}_d \mathbf{W}_N \mathbf{b}(i) + \tilde{\mathbf{n}}_N(i), \end{aligned} \quad (2-65)$$

onde $\tilde{\mathbf{Q}}_d(i)$ é uma matriz diagonal, cujas componentes são a transformada discreta N -pontos do canal equivalente $\mathbf{q}(i)$, ou seja, $\tilde{\mathbf{Q}}_d(i) = \text{diag}[\tilde{\mathbf{q}}(i)]$, em que $\tilde{\mathbf{q}}(i) = \sqrt{N} \mathbf{W}_{NP} \mathbf{q}(i)$ e \mathbf{W}_{NP} é a matriz que contém as primeiras P colunas de

\mathbf{W}_N . O bloco equalizado, a ser entregue ao decisor, é obtido fazendo-se

$$\begin{aligned} \mathbf{y}(i) &= \tilde{\mathbf{A}}_{0,ZF}(i)\tilde{\mathbf{r}}_{CP}(i) \\ &= \tilde{\mathbf{A}}_{0,ZF}(i)\tilde{\mathbf{Q}}_d(i)\mathbf{W}_N\mathbf{b}(i) + \underbrace{\tilde{\mathbf{A}}_{0,ZF}(i)\tilde{\mathbf{n}}_N(i)}_{\mathbf{n}_{ZF}}, \end{aligned} \quad (2-66)$$

onde o equalizador *Zero-Forcing* é calculado invertendo a matriz que pré-multiplica os dados, isto é,

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{A}}_{0,ZF}(i) &= \left[\tilde{\mathbf{Q}}_d(i)\mathbf{W}_N \right]^{-1} \\ &= \mathbf{W}_N^{-1}\tilde{\mathbf{Q}}_d^{-1}(i) \\ &= \mathbf{W}_N^H\tilde{\mathbf{Q}}_d^{-1}(i). \end{aligned} \quad (2-67)$$

Como a matriz de DFT \mathbf{W}_N só depende da escolha do parâmetro N (número de símbolos de informação por bloco), pode-se pré-computá-la e assim, separá-la do cálculo iterativo do equalizador ZF, uma vez que é fixa. Portanto, o equalizador pode ser simplificado para

$$\tilde{\mathbf{A}}_{ZF}(i) = \tilde{\mathbf{Q}}_d^{-1}(i), \quad (2-68)$$

seguido de uma multiplicação pela matriz de IDFT \mathbf{W}_N^H . Aqui reside a grande vantagem do equalizador CP-SC-ZF no domínio da frequência, onde há apenas a necessidade da inversão de uma matriz diagonal, de dimensão N , e portanto, realizando apenas N operações. O resultado pode ser visto então como N equalizações independentes, pois $\tilde{\mathbf{A}}_{ZF}(i)$ é também diagonal. Assim, a k -ésima componente do i -ésimo bloco (antes da IDFT) corresponde a

$$\begin{aligned} \tilde{y}^{(i)}[k] &= \tilde{a}_{ZF}^{(i)}[k]\tilde{q}^{(i)}[k]\tilde{b}^{(i)}[k] + \underbrace{\tilde{a}_{ZF}^{(i)}[k]\tilde{n}_N^{(i)}[k]}_{n_{ZF}^{(i)}[k]} \\ &= \tilde{b}^{(i)}[k] + \frac{\tilde{n}_N^{(i)}[k]}{\tilde{q}^{(i)}[k]}. \end{aligned} \quad (2-69)$$

Em contra-partida, a desvantagem do ZF fica evidente em (2-69), pois um valor muito baixo em uma das componentes da transformada do canal amplifica muito o ruído. Já um nulo no espectro do canal acarreta em perda total da informação. Em seqüência, o vetor equalizado precisa ser novamente transformado para o domínio do tempo via uma IDFT de N pontos. A estimativa ZF,

realizada sobre o bloco $\mathbf{y}(i)$ fica então

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{b}}_{ZF}(i) &= DISC[\mathbf{W}_N^H \tilde{\mathbf{y}}(i)] \\ &= DISC[\mathbf{b}(i) + \mathbf{W}_N^H \tilde{\mathbf{Q}}_d^{-1}(i) \tilde{\mathbf{n}}_N(i)].\end{aligned}\quad (2-70)$$

2.5.3 ZP-FDE-ZF

No caso de sistemas com faixa de guarda ZP, o bloco observado na recepção, e definido em (2-42), é transformado por meio de uma DFT de dimensão M :

$$\tilde{\mathbf{r}}_{ZP}(i) = \mathbf{W}_M \mathbf{Q}_T \underbrace{\mathbf{V}^T(0) \mathbf{b}(i)}_{\mathbf{d}_{ZP}(i)} + \underbrace{\mathbf{W}_M \mathbf{n}_M(i)}_{\tilde{\mathbf{n}}_M(i)}.\quad (2-71)$$

As últimas L colunas de $\mathbf{Q}_T(i)$ estão multiplicando apenas os zeros de $\mathbf{V}^T(0)$, assim $\mathbf{Q}_T(i)$ pode ser modificada de maneira que se torne uma matriz circulante $\mathbf{Q}_c(i)$, de dimensão $M \times M$, sem com isso alterar o resultado do produto. Assim

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{r}}_{ZP}(i) &= \underbrace{\mathbf{W}_M \mathbf{Q}_c(i) \mathbf{W}_M^H}_{\tilde{\mathbf{Q}}_d(i)} \underbrace{\mathbf{W}_M \mathbf{V}^T(0)}_{\mathbf{W}_{MN}} \mathbf{b}(i) + \tilde{\mathbf{n}}_M(i) \\ &= \tilde{\mathbf{Q}}_d(i) \mathbf{W}_{MN} \mathbf{b}(i) + \tilde{\mathbf{n}}_M(i),\end{aligned}\quad (2-72)$$

onde $\tilde{\mathbf{Q}}_d(i) = \text{diag}[\tilde{\mathbf{q}}(i)]$, em que $\tilde{\mathbf{q}}(i) = \sqrt{M} \mathbf{W}_{MP} \mathbf{q}(i)$ e $\mathbf{W}_{M,P}$ contém as primeiras P colunas de \mathbf{W}_M . Portanto, o bloco equalizado a ser entregue ao decisor é

$$\mathbf{y}(i) = \tilde{\mathbf{A}}_{0,ZF}(i) \tilde{\mathbf{Q}}_d(i) \mathbf{W}_{MN} \mathbf{b}(i) + \underbrace{\tilde{\mathbf{A}}_{ZF}(i) \tilde{\mathbf{n}}_M(i)}_{\mathbf{n}_{ZF}(i)},\quad (2-73)$$

denotando que o equalizador ZF, operando no domínio da transformada é a pseudo-inversa do produto de matrizes (de dimensão $M \times N$) que pré-multiplica o bloco de dados $\mathbf{b}(i)$, ou seja

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{A}}_{0,ZF}(i) &= \left[\tilde{\mathbf{Q}}_d(i) \mathbf{W}_{MN} \right]^\dagger \\ &= \left[\mathbf{W}_{MN}^H \tilde{\mathbf{Q}}_d^H(i) \tilde{\mathbf{Q}}_d(i) \mathbf{W}_{MN} \right]^{-1} \mathbf{W}_{MN}^H \tilde{\mathbf{Q}}_d^H(i).\end{aligned}\quad (2-74)$$

Assim, a estimativa *Zero-Forcing* do i -ésimo bloco é

$$\hat{\mathbf{b}}_{ZF}(i) = DISC[\mathbf{b}(i) + \left[\mathbf{W}_{MN}^H \tilde{\mathbf{Q}}_d^H(i) \tilde{\mathbf{Q}}_d(i) \mathbf{W}_{MN} \right]^{-1} \mathbf{W}_{MN}^H \tilde{\mathbf{Q}}_d^H(i) \tilde{\mathbf{n}}_M(i)].\quad (2-75)$$

Tal qual no CP, a estimativa ZF amplifica o ruído caso haja valores perto de zero no espectro do canal equivalente. Por outro lado, mesmo que haja um nulo

no espectro, não se perde a detectabilidade do símbolo pois, diferentemente do CP, há mais equações do que incógnitas (sistema sobre-determinado $N \times M$) na matriz de equalização do ZP-SC-FDE-ZF.

2.5.4 CP-FDE-MMSE

Observando a Figura (2.6), nota-se que o bloco equalizado entregue ao decisor é obtido fazendo-se $\mathbf{y}(i) = \tilde{\mathbf{A}}_0(i)\tilde{\mathbf{r}}_{CP}(i)$, onde $\tilde{\mathbf{A}}_0(i)$ é encontrado, no caso do MMSE, minimizando-se a função custo

$$J = \mathbb{E} \left[\|\mathbf{b}(i) - \tilde{\mathbf{A}}_0(i)\tilde{\mathbf{r}}_{CP}(i)\|^2 \right]. \quad (2-76)$$

A solução FDE-MMSE para o equalizador do sistema CP-SC no domínio da frequência é (ver Apêndice A)

$$\tilde{\mathbf{A}}_{0,MMSE}(i) = \sigma_b^2 \mathbf{W}_N^H \underbrace{\tilde{\mathbf{Q}}_d^H(i) \left[\sigma_b^2 \tilde{\mathbf{Q}}_d(i) \tilde{\mathbf{Q}}_d^H(i) + \sigma_n^2 \mathbf{I}_N \right]^{-1}}_{\tilde{\mathbf{A}}_{MMSE}(i)}, \quad (2-77)$$

o que permite enxergar a solução MMSE como um equalizador (representado por uma matriz diagonal $\tilde{\mathbf{A}}_{MMSE}(i)$) seguido de uma IDFT de N pontos, que pode ser previamente computada.

2.5.5 Observação sobre equalizadores MMSE e ZF para sistemas CP-SC-FDE

Considerando que a energia da constelação é unitária, pode-se reescrever (2-77) de maneira análoga fazendo

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{A}}_{0,MMSE}(i) &= \mathbf{W}_N^H \tilde{\mathbf{Q}}_d^H(i) \tilde{\mathbf{Q}}_d(i) \tilde{\mathbf{Q}}_d^{-1}(i) \left[\tilde{\mathbf{Q}}_d(i) \tilde{\mathbf{Q}}_d^H(i) + \sigma_n^2 \mathbf{I}_N \right]^{-1} \\ &= \mathbf{W}_N^H \underbrace{\tilde{\mathbf{Q}}_d^H(i) \tilde{\mathbf{Q}}_d(i) \left[\tilde{\mathbf{Q}}_d(i) \tilde{\mathbf{Q}}_d^H(i) + \sigma_n^2 \mathbf{I}_N \right]^{-1}}_{\mathbf{\Gamma}(i)} \underbrace{\tilde{\mathbf{Q}}_d^{-1}(i)}_{\tilde{\mathbf{A}}_{ZF}(i)} \\ &= \mathbf{W}_N^H \mathbf{\Gamma}(i) \tilde{\mathbf{A}}_{ZF}(i), \end{aligned} \quad (2-78)$$

em que $\mathbf{\Gamma}(i)$ é uma matriz diagonal de componentes reais. O bloco observado CP-SC-FDE-MMSE é então

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_{MMSE}(i) &= \mathbf{W}_N^H \mathbf{\Gamma}(i) \tilde{\mathbf{A}}_{ZF}(i) \tilde{\mathbf{r}}_{CP}(i) \\ &= \mathbf{W}_N^H \mathbf{\Gamma}(i) \tilde{\mathbf{A}}_{ZF}(i) \left[\tilde{\mathbf{Q}}_d \mathbf{W}_N \mathbf{b}(i) + \mathbf{W}_N \mathbf{n}_N(i) \right] \\ &= \mathbf{W}_N^H \mathbf{\Gamma}(i) \left[\tilde{\mathbf{A}}_{ZF}(i) \tilde{\mathbf{Q}}_d \mathbf{W}_N \mathbf{b}(i) + \tilde{\mathbf{A}}_{ZF}(i) \mathbf{W}_N \mathbf{n}_N(i) \right]. \end{aligned} \quad (2-79)$$

O termo entre colchetes é exatamente o bloco $\tilde{\mathbf{y}}_{ZF}(i)$ (antes da IDFT), como pode ser visto em (2-66). Assim, (2-79) equivale à

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_{MMSE}(i) &= \mathbf{W}_N^H \mathbf{\Gamma}(i) \tilde{\mathbf{y}}_{ZF}(i) \\ &= \mathbf{W}_N^H \mathbf{\Gamma}(i) \mathbf{W}_N \mathbf{W}_N^H \tilde{\mathbf{y}}_{ZF}(i) \\ &= \mathbf{W}_N^H \mathbf{\Gamma}(i) \mathbf{W}_N \mathbf{y}_{ZF}(i) \\ &= \mathbf{\Gamma}_c(i) \mathbf{y}_{ZF}(i), \end{aligned} \quad (2-80)$$

onde $\mathbf{\Gamma}_c(i)$ é uma matriz circulante, de componentes complexas. O resultado em (2-80) denota que o equalizador MMSE para os sistemas CP-SC-FDE intrinsecamente faz uma correção de módulo e fase com relação ao bloco $\mathbf{y}_{ZF}(i)$. A matriz $\mathbf{\Gamma}_c(i)$ é função do canal e da razão sinal-ruído.

2.5.6 ZP-FDE-MMSE

A função custo neste caso é um pouco diferente pois considera o bloco estendido $\tilde{\mathbf{r}}_{ZP}(i)$ de dimensão M . Assim, tem-se que encontrar a solução para minimizar

$$J = \mathbb{E} \left[\|\mathbf{b}(i) - \tilde{\mathbf{A}}_0(i) \tilde{\mathbf{r}}_{ZP}(i)\|^2 \right], \quad (2-81)$$

em que a matriz $\tilde{\mathbf{A}}_0(i)$ tem dimensão $N \times M$. Calculando a solução FDE-MMSE para o filtro do sistema ZP-SC no domínio da frequência (ver Apêndice A), obtém-se

$$\tilde{\mathbf{A}}_{0,MMSE}(i) = \sigma_b^2 \mathbf{W}_{MN}^H \underbrace{\tilde{\mathbf{Q}}_d^H(i) \left[\sigma_b^2 \frac{N}{M} \tilde{\mathbf{Q}}_d(i) \tilde{\mathbf{Q}}_d^H(i) + \sigma_n^2 \mathbf{I}_M \right]^{-1}}_{\tilde{\mathbf{A}}_{MMSE}(i)}. \quad (2-82)$$

Tal qual o CP-SC-FDE-MMSE, a solução FDE-MMSE para o sistema ZP-SC pode ser expressa como uma matriz equalizadora diagonal $M \times M$, seguida de uma IDFT truncada, de dimensão $N \times M$ (que pode ser previamente computada).

2.6 Resultados de simulação

Nas simulações de computador, foram utilizados como parâmetros $N = 16$ para os símbolos de informação dentro de um bloco e $L = 4$ como faixa de guarda em cada bloco. A eficiência do sistema (vazão) é, por conseguinte, de $\frac{N}{N+L} = \frac{16}{16+4} = 80\%$. Os resultados foram obtidos ao longo de 20.000 realizações diferentes com 100 blocos por realização. Estes parâmetros se mantêm ao longo deste trabalho, salvo quando explicitado de forma diferente.

2.6.1

Custo computacional

A tabela a seguir resume o número de operações matemáticas realizadas em cada equalizador (por bloco detectado): Cabe ressaltar que as DFTs

Tabela 2.1: Complexidade dos Equalizadores

Complexidade dos equalizadores		
	CP	ZP
SC-TDE-ZF	N^3	$N^3 + 2N^2M$
SC-TDE-MMSE	$3N^3$	$M^3 + 2M^2N + MN^2$
SC-FDE-ZF	N	$N^3 + MN^2 + (M^2 + 2M)N$
SC-FDE-MMSE	$3N$	$3M$

foram consideradas implementadas via FFT (*Fast Fourier Transform*), e assim são necessárias $M_1 \log_2(M_1)$ operações aritméticas. Porém, não estão incluídas na tabela, uma vez que podem ser pré-computadas (pois se mantêm inalteradas durante toda a transmissão). Sabe-se que cada multiplicação complexa equivale a 04 multiplicações reais e mais 02 somas reais, enquanto 01 soma complexa equivale à 02 somas reais. Por conta disso, as somas reais de matrizes no denominador das expressões dos equalizadores MMSE foram desconsideradas. Apenas as multiplicações complexas foram levadas em consideração. Plotando as expressões de cada equalizador para diferentes tamanhos de bloco e mantendo a mesma eficiência de $\frac{N}{M} = 80\%$, obtém-se as curvas de desempenho ilustradas nas figuras 2.7 e 2.8.

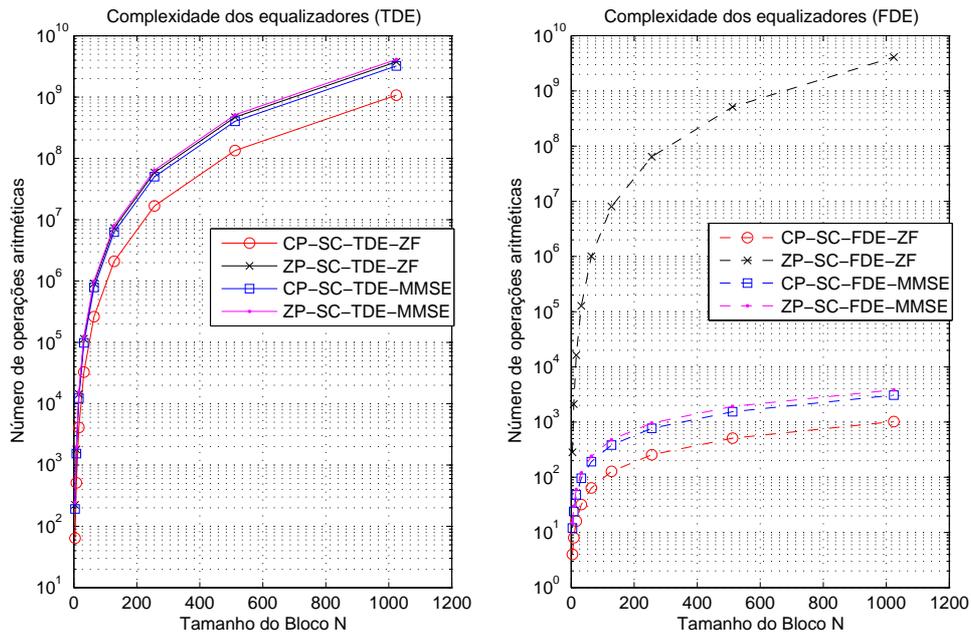


Figura 2.7: Complexidade dos algoritmos - Número de operações aritméticas.

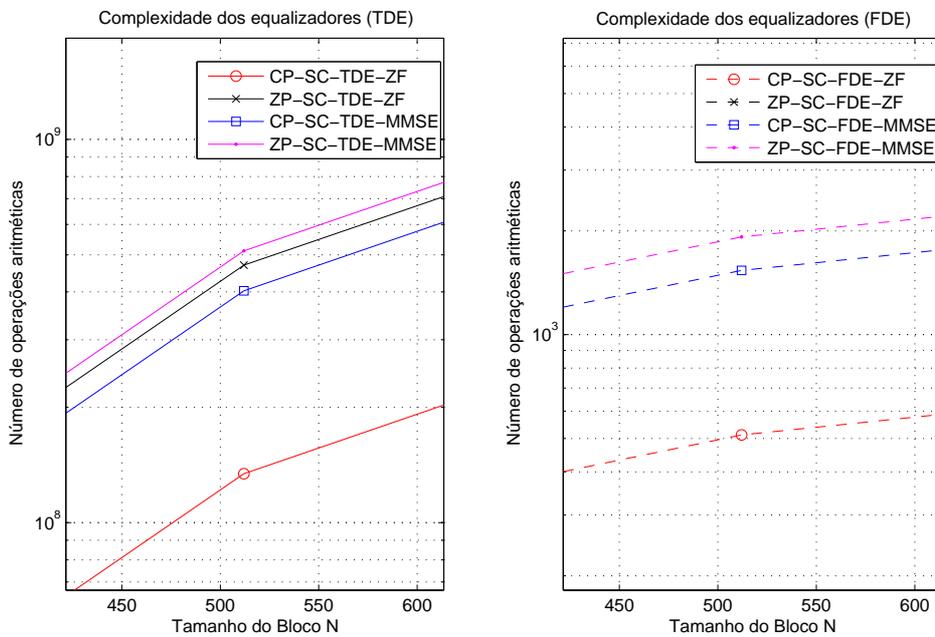


Figura 2.8: Complexidade dos algoritmos - Número de operações aritméticas (zoom em torno de $N = 512$).

2.6.2 Desempenho

As figuras 2.9 à 2.14 apresentam as curvas de desempenho com relação à taxa de erros de *bit* ou BER (*Bit Error Rate*).

Também são ilustrados os diferentes desempenhos quando os sistemas utilizam diferentes tamanhos de blocos de informação N , preservando sempre a vazão de 80%.

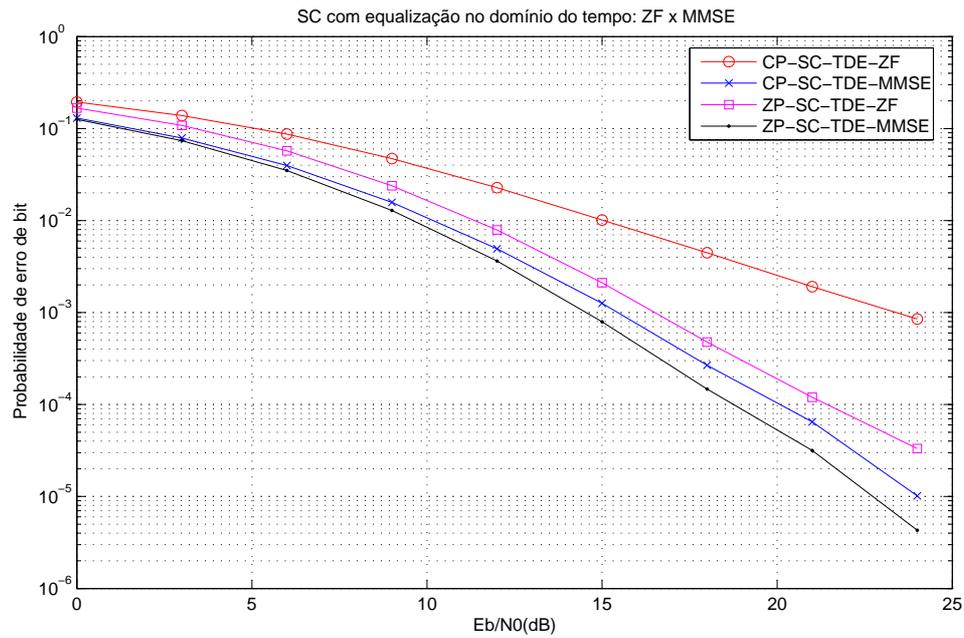


Figura 2.9: Comparação de desempenho entre os equalizadores TDE-ZF e TDE-MMSE no domínio do tempo em canal fixo com transmissão CP e ZP.

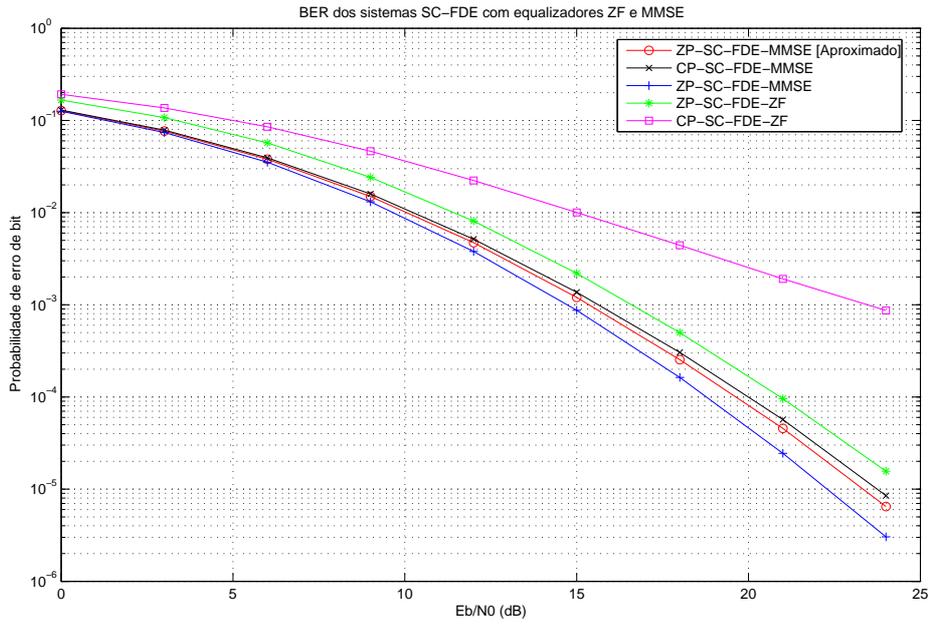


Figura 2.10: Comparação de desempenho entre os equalizadores FDE-ZF e FDE-MMSE em canal fixo com transmissão CP e ZP.

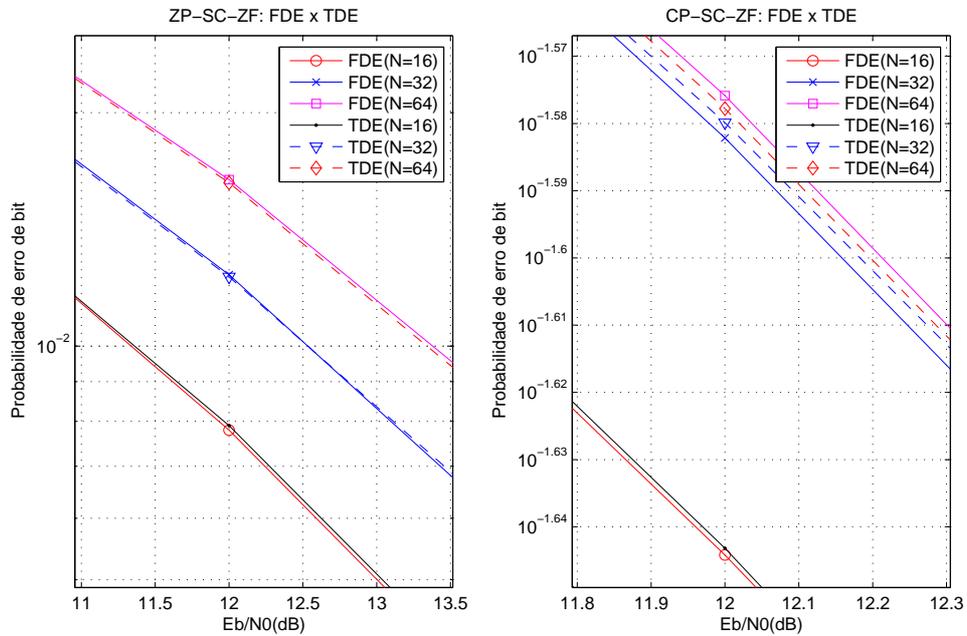


Figura 2.11: Comparação de desempenho dos equalizadores TDE-ZF e FDE-ZF para diferentes tamanhos de bloco com transmissão CP e ZP.

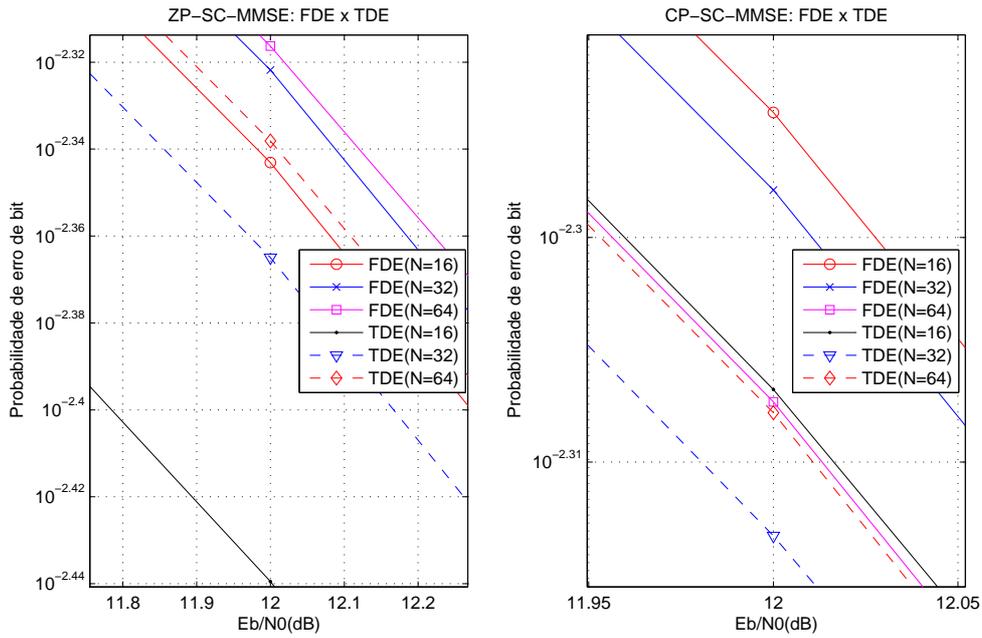


Figura 2.12: Comparação de desempenho dos equalizadores TDE-MMSE e FDE-MMSE para diferentes tamanhos de bloco com transmissão CP e ZP.

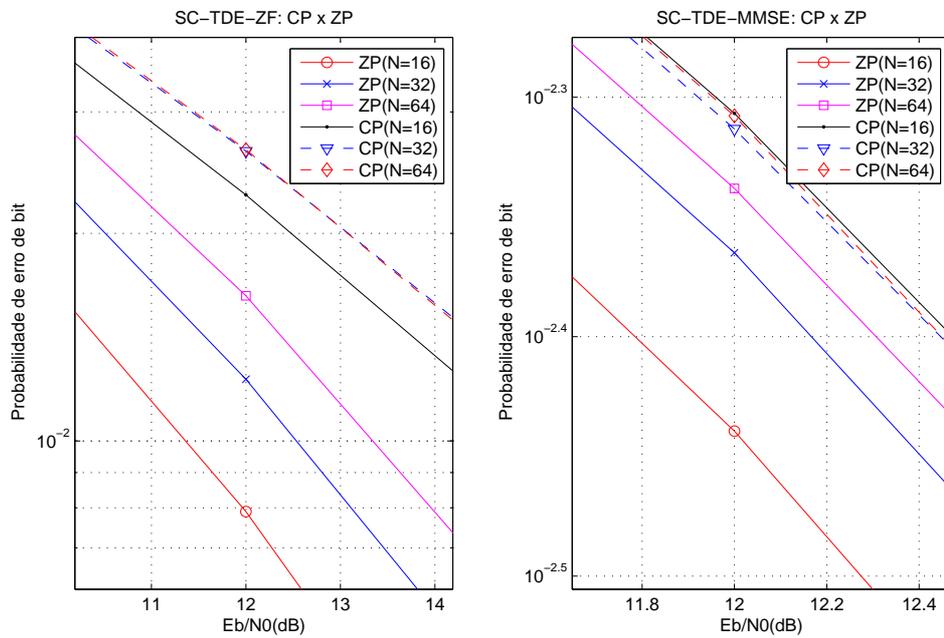


Figura 2.13: Comparação de desempenho dos equalizadores TDE-ZF e TDE-MMSE para diferentes tamanhos de bloco com transmissão CP e ZP no domínio do tempo.

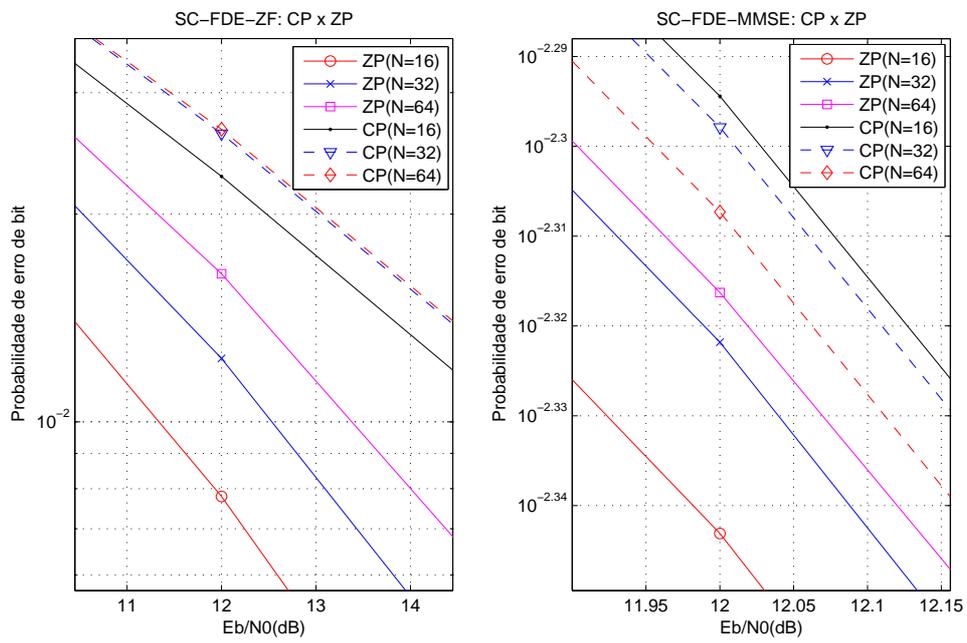


Figura 2.14: Comparação de desempenho dos equalizadores FDE-ZF e FDE-MMSE para diferentes tamanhos de bloco com transmissão CP e ZP no domínio da frequência.

2.7

Considerações Finais

Este capítulo verifica que equalizadores MMSE apresentam melhor desempenho que os equalizadores ZF em ambos os casos (FDE e TDE) e que equalizadores ZF e MMSE apresentam desempenhos equivalentes entre suas versões respectivas no domínio do tempo e no domínio da frequência. Com uma pequena aproximação feita no equalizador ZP-SC-FDE-MMSE (ver Apêndice A), é possível implementar a solução FDE-MMSE, tanto no CP quanto no ZP, com uma redução significativa do número de operações aritméticas (sem perda impactante de desempenho no caso do ZP) quando comparadas ao TDE-MMSE. Para blocos muito grandes (isto é, com muitos símbolos por bloco), a implementação dos equalizadores TDE pode se tornar computacionalmente inviável, como ilustra a Figura 2.7.

Conforme apresentado em [19] (para o domínio do tempo), encontra-se nas Figuras 2.11 e 2.12 que os equalizadores (TDE ou FDE, MMSE ou ZF) para transmissão com blocos ZP têm perda de desempenho conforme aumenta-se o número de símbolos por bloco, ou equivalentemente, a resolução das DFTs envolvidas no caso do FDE. Assim:

$$BER_1^{ZP-SC} \leq BER_2^{ZP-SC} \leq \dots \leq BER_\infty^{ZP-SC}, \quad (2-83)$$

onde BER_N^{ZP-SC} denota a taxa de erro de bits para a transmissão ZP-SC com blocos de tamanho N . O mesmo, porém, não pode ser dito das transmissões com prefixo cíclico. Conforme visto nas mesmas Figuras 2.11 e 2.12, os sistemas de transmissão CP-SC-TDE não têm ordem definida de BER para tamanhos de blocos variados [19].

Outro ponto importante: a equalização no domínio da frequência pode ser vista como M_1 sistemas de equações independentes, o que torna os algoritmos mais rápidos em sua convergência quando implementados adaptativamente. Assim, considerando-se estas observações, os próximos capítulos não mais consideram os filtros operando no domínio do tempo e se atém apenas à implementações recursivas do FDE-MMSE.