

## 8 Demonstração no ensino brasileiro: os *livros de matemática*

Em 1931, foi publicado o volume *Curso de Mathematica*, 3ª. Serie II – *Geometria* de Euclides Roxo, que será a primeira obra sob análise nesse conjunto de livros-texto, que agora reúne livros de matemática usados no ensino brasileiro a partir dos anos 30, o último grupo da base documental que completa este estudo.

Esse livro de Roxo foi antecedido por duas publicações do autor, o *Curso de Mathematica Elementar*, volume 1, edição de 1929, e o *Curso de Mathematica Elementar*, volume 2, edição de 1930. Reunidas, essas obras foram escritas com o objetivo de atender a uma série de propostas modernizadoras para o ensino da matemática, que resultaram em programas de ensino implementados em 1929 e em 1931, os quais ele defendeu<sup>1</sup>.

Mas, antes de prosseguir com as análises, em *A Matemática na Educação Secundaria*, lançamento de 1937, Roxo apresenta um quadro do desenvolvimento histórico e educacional da matemática. Na introdução do livro, ele diz que desde o final do século XIX já se observava uma agitação provocada pelos problemas educacionais que não poderiam deixar de atingir o ensino da matemática.

Com respeito ao Brasil, a atuação de Euclides Guimarães Roxo nos insere no espírito desse tempo, haja vista sua participação nas duas grandes reformas do ensino brasileiro, a reforma implementada por Francisco Campos em 1932, e a reforma implementada por Gustavo Capanema em 1942<sup>2</sup>. Nessa época, têm lugar ações como a criação, em 1937, do INL – Instituto Nacional do Livro, órgão subordinado ao MEC que, segundo Freitag (1989), tinha por objetivo garantir a produção e a circulação do livro escolar.

E por volta dos anos 30, foi com forte base em idéias do matemático reformista alemão Felix Klein (1849-1925), que Roxo defendeu a reforma modernizadora para o ensino da matemática no Brasil e lançou sua coleção de livros de matemática.

---

<sup>1</sup> Ver: Beltrame, 2000; Rocha, 2001; Dassie, 2001.

<sup>2</sup> Ver: Rocha, 2001; Dassie, 2001.

O movimento de reforma do ensino da matemática nos primórdios do século XX surgiu principalmente na Alemanha e na França, tendo alcançado muitos outros países<sup>3</sup>. Em 1908, sob a presidência de Klein, reúne-se em Roma o primeiro comitê internacional para o ensino de matemática, designado em alemão pela sigla IMUK (Internationale Mathematische Unterrichtskommission) e em francês, CIEM (Comission Internationale de l'Enseignement Mathématiques). A partir de 1954, a comissão passa a ser denominada *International Commission on the Teaching of Mathematics*, abreviadamente, ICMI.

Matemáticos atuantes na pesquisa teórica também se dedicaram ao trabalho de trazer as novas descobertas para dentro da escola que, na época, era designada entre nós como ensino secundário<sup>4</sup> e Klein, matemático alemão de renome, teve uma atuação representativa nesse sentido. Ele ministrou cursos para professores secundários de matemática e física e publicou os livros tratando da matemática elementar de um ponto de vista superior, focalizando aritmética, álgebra e análise superior, um material importante na historiografia da matemática escolar. O trecho da *Introdução* ao livro de geometria, edição em inglês de 1929, traduz bem as questões da época,

Estou contente por me referir a um curso de férias para professores de matemática e física que foi dado aqui em Göttingen durante o feriado da Páscoa, em 1908. Nisso, eu dei segmento às minhas aulas de inverno. Relacionado a isso e também com orientação do professor Behrendsen do ginásio local, surgiu uma interessante e estimulante discussão sobre a reorganização do ensino escolar em aritmética, álgebra e análise e, mais particularmente, sobre a introdução do cálculo integral e diferencial nas escolas. Aqueles que participaram mostraram um interesse extremamente gratificante por essas questões e, em geral, por nossos esforços em trazer a universidade para um contato vivo com as escolas. Espero que minhas aulas atuais possam ter uma influência nessa direção (Klein, 1929)

Ainda com respeito ao ensino-aprendizagem da matemática em geral, o mesmo autor menciona,

Eu defendo aqui, como sempre é comum em minhas aulas, uma tendência que eu gosto de denominar pela frase “fusão da aritmética e geometria” – querendo dizer por aritmética, como é usual nas escolas, o campo que inclui não apenas a teoria dos inteiros, mas também toda a álgebra e a análise. (idem)

No *Prefácio* à primeira edição e enfatizando as razões que o levaram a escrever o livro de geometria, Klein diz, “Em geometria não possuímos nenhum

---

3 Ver: Roxo, 1937; Schubring, 1987; Miorim, 1998; Rocha, 2001, p. 63-78.

4 Ver: Haidar, 1972; Romanelli, 1989.

livro-texto correspondente ao nível geral da ciência como existe em álgebra e análise, graças ao modelo dos Cursos Franceses”. Contrariamente a esse quadro e em função da proposta pedagógica e científica geral que se persegue, como ele mesmo diz, foi necessário “que eu tentasse uma apresentação mais unificada”.

Uma avaliação também em pauta nessa época se dirigiu ao “costume”, conforme refere Klein, de estudar primeiro a geometria plana e depois a dos sólidos e, assim, “o espaço geométrico é infelizmente desprezado com frequência, e a nobre faculdade da percepção espacial que possuímos originalmente é perturbada” (idem, p. 2). Essa restrição à organização tradicional dos conteúdos e ao modo de abordá-los no livro de geometria repercute na matriz euclidiana. A crítica a Euclides se mantém nas discussões em torno da modernização da matemática escolar, no início do século XX. E, ferindo qualquer julgamento de anacronismo, a obra de Euclides ao longo de mais de dois milênios mantém uma posição central para se entender o desenvolvimento da matemática escolar.

### **8.1 *Curso de Mathematica – 3ª Série – II – Geometria de Roxo***

Com o *Curso de Mathematica*, 3ª Serie II – Geometria, de 1931, de Roxo, inicia-se a série de análises dos *livros de matemática*, o último grupo de livros-texto da base documental.

Com esta obra de Roxo é introduzido um fato novo, considerando a amostra da base documental e o estudo dedutivo da geometria. Ou seja, o livro de matemática propõe estratégias didáticas direcionadas ao ensino da demonstração que, junto com os exercícios, permite constatar o seguinte: esse fato determina um outro tipo de livro, considerando os *elementos de geometria*, mesmo os mais distanciados do modelo teorema-problema pela inclusão de exercícios, por exemplo, como discutido antes.

O livro de matemática se distingue dos *elementos de geometria* pelo caráter didático com que aborda a demonstração, a demonstração torna-se objeto de ensino e esse fato está incorporado no texto demonstrativo. Será visto que essa característica se perde e reaparece nos anos 60, com Sangiorgi. Um estudo comparativo será feito mais adiante visando mostrar o caráter didático sob o qual a demonstração é abordada nas duas obras.

O livro de Roxo tem uma estrutura dedutiva no sentido de que apresenta axiomas e proposições que estarão fundamentando as provas dos teoremas e problemas, sendo que o capítulo X trata das construções geométricas. Uma sequência numérica percorre o livro por completo indexando a exposição dos assuntos. Há listas de questões propostas, *exercícios*, ao final de cada capítulo.

A demonstração do teorema de Pitágoras no livro de Roxo se insere no *Capítulo XII, Relações métricas nos triângulos*. Primeiro, consta a prova pela semelhança de figuras, ao que se segue “praticamente, um esboço de demonstração dada por Euclides para o theorema de Phytagoras” (p. 333), e isso diz respeito à prova pela equivalência de áreas. O livro se ocupa em apresentar uma generalização do teorema e a abordagem se particulariza por explorar idéias intuitivas.

Para demonstrar o teorema de Pitágoras pela semelhança, Roxo introduz o conceito de média proporcional ou média geométrica de dois números, e lança mão da referência (n. 236), assunto do capítulo XI. O livro de matemática de Roxo é indexado com uma numeração direta que marca desde o início todo o texto, e nesse capítulo a exposição dedutiva do assunto contém muitas referências. O encaminhamento do autor visa justamente reforçar a mudança no tratamento das grandezas, a mudança conceitual geométrico-numérico-algébrico que, no caso em discussão, diz respeito a segmento – medida numérica.

Com a referência (n. 236), mencionada acima, Roxo explica o significado da razão entre os segmentos *AB*, *CD*, ou seja,

$$\frac{CD}{AB} \text{ significa: } \frac{\text{medida de } CD}{\text{medida de } AB}$$

Temos o direito de assim proceder, uma vez que, com tal substituição não alteramos de modo algum o valor da razão, de accôrdo com o theorema já anunciado no n. 197: *A razão de duas grandezas da mesma espécie é igual à razão dos números que lhes servem de medida, relativamente a uma mesma unidade.* (p. 267-268)

Essa seqüência leva ao estudo das propriedades das proporções que ao serem tomadas em seu caráter numérico, passam a significar propriedades dos números. Dessa forma, o livro cria a rede de justificativas para as operações entre razões ou números. Especificamente, essa passagem geométrico-algébrico-numérico está contemplada nos livros de matemática de Roxo e Carvalho (2006) ressalta,

Como um exemplo do estilo desse livro, vamos mencionar que Roxo prova geometricamente a bem conhecida regra  $(a + b)^2 = a^2 + 2bc + b^2$ , colocando em prática o que ele prega como a “correlação” entre álgebra e geometria. Isto foi uma inovação genuína no Brasil. (idem, p. 77)

A observação de Carvalho é importante no contexto desta Tese, porque ressalta o ponto em torno do qual se estabelecem modificações no desenvolvimento das provas da geometria plana elementar, quando se observa comparativamente os textos demonstrativos em livros-texto.

Voltando à exposição do autor, abaixo consta o teorema da média geométrica.

**294. Theorema** — *Em um triângulo rectângulo, cada catheto é média proporcional entre a hypotenusa e a sua projecção sobre ella.*

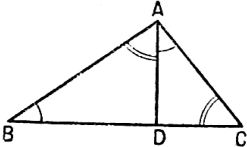


Fig. 215

**Hyp.:** o  $\triangle ABC$ , rectângulo em A, e  $AD \perp BC$  (figura 215).

**These:**  $\frac{BD}{AB} = \frac{AB}{BC}$  ou  $\overline{AB}^2 = BD \cdot BC$ .

**Demonstração:**

(1)  $\triangle ABD \sim \triangle ABC$ . (1) Têm o  $\angle B$  comum e  $\angle BAC = \angle ADB$  como rectos.

(2)  $\therefore \frac{BD}{AB} = \frac{AB}{BC}$  (2) Principio (numero 261).

Fig. 41 Teorema, Roxo, p. 330

Note que na demonstração, acima, as justificativas para o passo dedutivo da prova têm como base a semelhança dos dois triângulos e que a conclusão se baseia em um dos casos de semelhança, dois ângulos correspondentes congruentes, logo lados homólogos proporcionais.

A partir desse ponto, o encaminhamento da prova do teorema é o mesmo que consta em livros anteriores. Ou seja, a partir do conceito de média proporcional chega-se às relações métricas do triângulo retângulo que levam ao teorema de Pitágoras.

Em seguida, em duas observações o autor expõe como se chega às *fórmulas* ou *relações* com as quais a prova do teorema de Pitágoras é concluída, explicitando a passagem geométrico-numérico (p.331).

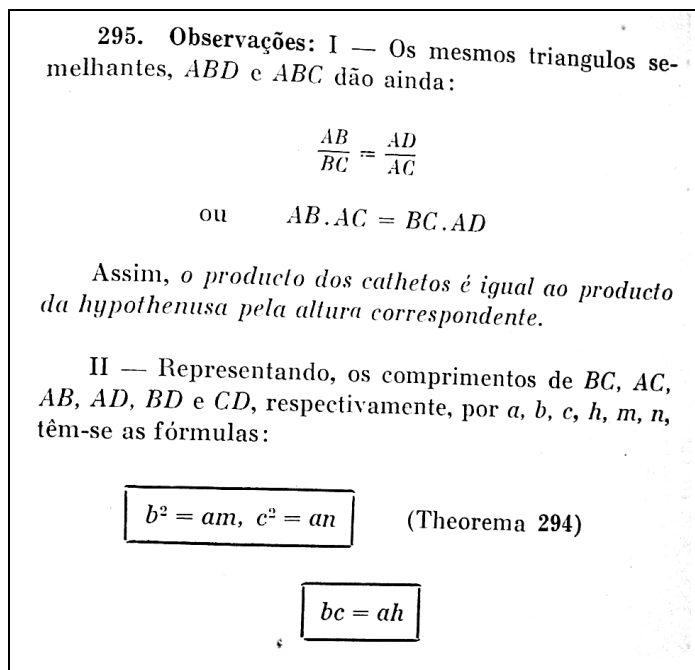


Fig. 42 Observações, Roxo, p. 338

Note que o texto do teorema 294, figura da página anterior, leva à referência (*numero 261*) que é a proposição, “dois triangulos dizem-se semelhantes quando têm os ângulos iguaes e os lados homologos proporcionaes” (p. 298).

Finalmente, consta o teorema de Pitágoras com uma prova algébrica, mas que geometricamente tem base na semelhança de triângulos.

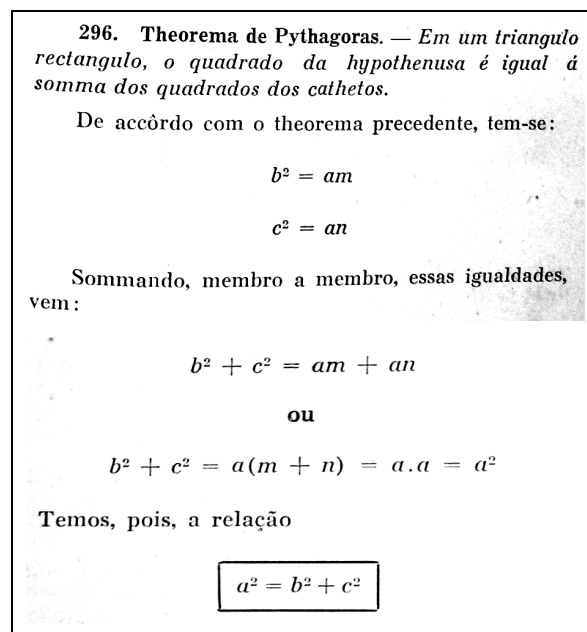


Fig. 43 Teorema de Pitágoras, Roxo, p. 332

Após isso, o autor explora a figura que consta nos *Elementos*.

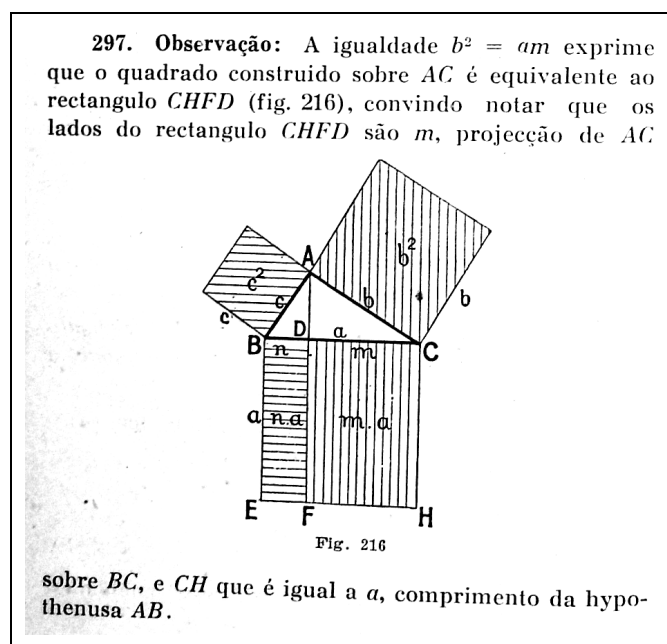


Fig. 44 Observação, Roxo, p. 332

Usando a figura acima, o autor expõe o significado geométrico da igualdade  $b^2 = am$ . Ele explica que só apresenta um esboço da demonstração dada por Euclides. Menciona o autor dos *Elementos*, aqui, e isso faz sentido porque esse

personagem já foi contemplado nos textos históricos inseridos ao longo do livro. Essa é outra característica particular do livro de Roxo, que não está presente em nenhum outro da base documental.

Analogamente,  $c^2 = an$  exprime que o quadrado construído sobre  $AB$  é equivalente ao rectângulo  $BEFD$ , cujas dimensões são  $n$ , projecção de  $AB$  sobre  $BC$  e  $BE$ , que é igual à hypotenusa,  $a$ .

Dahi resulta que a somma dos quadrados, construídos sobre  $AC$  e  $AB$ , é igual á somma desses dois rectangulos, ou ao quadrado construído sobre a hypotenusa.

Ahi temos, praticamente, um esboço de demonstração dada por EUCLIDES para o theorema de PYTHAGORAS.

Fig. 45 Observação, Roxo, p. 333

Retomando o encaminhamento dado por Roxo ao teorema de Pitágoras, a relação  $a^2 = b^2 + c^2$ , como ele mesmo nomeia, que traduz algebricamente o teorema, vem em destaque no texto, margeada pelo retângulo. Observe no texto da demonstração, um pouco antes, que as propriedades geométricas são traduzidas algebricamente. A prova torna-se algébrica e não apresenta o padrão *hipótese, tese, demonstração*, e as justificavas passam a ter como base as operações com equações algébricas. Isso mostra que a geometria dedutiva no livro de matemática é abordada de modo a ressaltar o caráter algébrico das proposições, o que segue sendo confirmado quando o autor discute um exemplo de questões a resolver.

No item *Aplicação* consta um caso numérico, resolvido em dois exemplos, e visando mostrar procedimentos distintos. Atente para a forma como, no primeiro exemplo, o autor refere discursivamente e de modo preciso “o quadrado do número que medirá a hipotenusa (...)”, e a partir dessa afirmativa a questão proposta se resolve sem substituição de valor numérico na *fórmula*.



Exemplo: I — Calcular a hypotenusa de um triângulo cujos cathetos são 3 m. e 4 m.

Tomando para unidade o metro, o quadrado do numero que medirá a hypotenusa será a somma dos quadrados dos numeros 3 e 4, que medem os cathetos.

Essa somma sendo  $3^2 + 4^2 = 25$ , cuja raiz quadrada é 5; a hypotenusa terá 5 m.

Ou ainda, da fórmula do n. 296, se deduz:

$$a = \sqrt{b^2 + c^2}$$

Substituindo  $b$  e  $c$  pelos valores dados, 3 e 4, tem-se

$$a = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5.$$

Fig. 46 Exemplo, Roxo, p. 333.

O segundo exemplo mostra a resolução com o uso da fórmula.

Exemplo: II — Calcular um dos cathetos de um triângulo rectângulo, do qual um catheto tem 11m,20 e a hypotenusa 29m,80.

Seja  $c$  o catheto desconhecido.

Da fórmula do n. 296, se deduz

$$c = \sqrt{a^2 - b^2}$$

Substituindo,  $a$  e  $b$  pelos seus valores, vem

$$c = \sqrt{29,8^2 - 11,2^2} = \sqrt{784} = 28m.$$

Fig. 47 Exemplo, Roxo, p. 333

Roxo quer apresentar a generalização do teorema de Pitágoras partindo das relações métricas em um triângulo qualquer. Mas, antes de apresentar os teoremas, ele explora essa idéia a partir das figuras, procedendo didaticamente, como se pode verificar. Isso, porque a idéia de generalização é abordada, primeiro, de um modo intuitivo, no sentido de não formalizado dedutivamente, ou seja, os fatos descritos são constatados pela evidência visual, como já se discutiu na primeira parte desta Tese.

O autor propõe imaginar que no triângulo  $ABC$  (fig. 219) o ângulo  $BAC$  diminua, mas conservando-se inalteráveis os lados  $AB$  e  $AC$ . Então os quadrados construídos sobre  $AB$  e sobre  $AC$  não variam de grandeza. (fig. 220). Mas,

diminuindo a distância entre  $B$  e  $C$ , decresce a área do quadrado construído sobre  $BC$ .

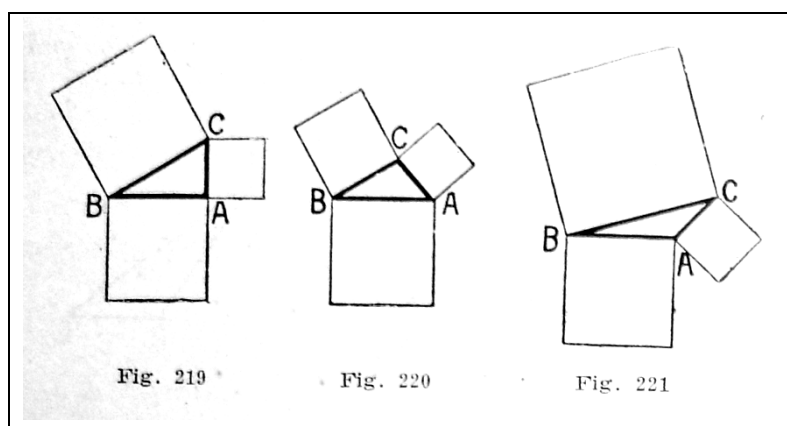


Fig. 48 Ilustração, Roxo, p. 336

De modo análogo, aumentando o ângulo  $BAC$ , da figura 219, como se vê na figura 221, verifica-se que o quadrado construído sobre o lado oposto ao ângulo obtuso  $B$  é maior do que a soma dos quadrados construídos sobre os outros dois lados.

Em seguida, Roxo apresenta dois teoremas que mostram o caso das relações métricas em triângulos acutângulos e obtusângulo traduzidas pelas relações  $a^2 = b^2 + c^2 - 2bn$  e  $a^2 = b^2 + c^2 - 2bn$ . Porém, antes, consta a prova do teorema que relaciona a diferença dos quadrados de dois lados com a das projeções desses lados sobre o terceiro, em um triângulo qualquer.

O *teorema 300*, abaixo, será usado na prova das relações métricas dos triângulos acutângulos e obtusângulos. Note que, por exemplo, a referência, *Axioma 3*, que consta da justificativa da prova, mostra a estrutura dedutiva do livro. O Axioma afirma,

Si de duas grandezas iguaes se subtraem grandezas iguaes, os retos são iguaes: isto é,  $a = b$  e  $c = d$ , então,  $a - c = b - d$ . (p. 15)

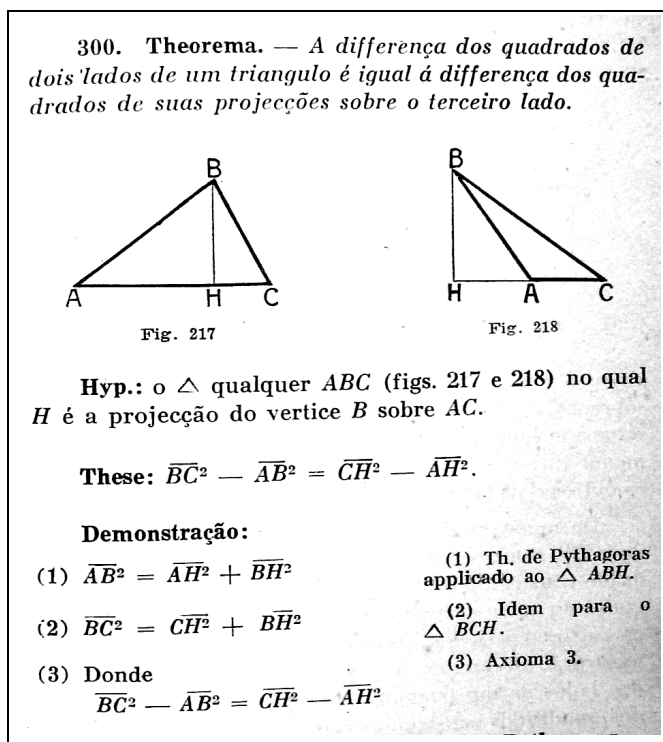


Fig. 49 Teorema, Roxo, p. 335

Observe que o texto da demonstração acima apresenta as justificativas para os passos dedutivos e como o texto da próxima demonstração traz as marcas *hipótese, tese, demonstração*.

O importante é ressaltar mais uma vez o – “é em outros termos” – retomando as palavras de Legendre lá no início das análises, quando ele reescreveu o teorema de Pitágoras algebricamente, ao final da prova. O modo conciso de traduzir as propriedades geométricas do triângulo ao mesmo tempo inscreve a mudança conceitual, ou seja, a grandeza geométrica é tomada pela representação do valor numérico associado a sua medida.

A próxima demonstração está chaveada em dois grandes blocos, visando destacar a presença de duas estruturas em funcionamento no desenvolvimento e na redação da prova, o *procedimento geométrico* e o *procedimento algébrico*. Esse aspecto em destaque, agora, vale para os casos anteriores e os que estão por vir.

302. **Theorema.** — *Em qualquer triângulo, o quadrado do lado oposto a um ângulo agudo é igual á somma dos quadrados dos outros dois lados, menos duas vezes o producto de um desses lados pela projecção do outro sobre elle.*

**Hyp.:** o  $\triangle ABC$  em que  $\angle A < 90^\circ$  (fig. 217) e no qual  $H$  é a projecção de  $B$  sobre  $AC$ .

**These:**  $\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 - 2AC.AH$ .

**Demonstração:**

procedimento geométrico

(1)  $\overline{BC}^2 - \overline{AB}^2 = \overline{CH}^2 - \overline{AH}^2$  (1) Theorema precedente.

(2) Onde  $\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{CH}^2 - \overline{AH}^2$

(3)  $CH = AC - AH$  (3) Sendo  $\angle A < 90^\circ$  (Hyp.), o ponto  $H$  cae entre  $A$  e  $C$ .

procedimento algébrico

(4) Onde  $\overline{CH}^2 = \overline{AC}^2 - 2AC.AH + \overline{AH}^2$  (4) De accôrdo com a fórmula:  $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

(5)  $\therefore \overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 - 2AC.AH + \overline{AH}^2 - \overline{AH}^2$  (5) Substituindo, em (2),  $\overline{CH}^2$  por seu valor.

(6) ou  $\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 - 2AC.AH + \overline{AC}^2$  (6) Fazendo a redução de  $\overline{AH}^2 - \overline{AH}^2$ .

(Conclusão).

Fig. 50 Teorema, Roxo, p. 337

O texto do teorema, acima, está disposto em duas colunas e observe a segunda coluna em que as justificativas estão dispostas. A partir do item (4) a justificativa passa a ser algébrica e a conclusão da prova tem como base as operações algébricas, embora ainda se mantenha a notação  $BC$ ,  $AB$ , etc, indicativa do objeto geométrico *segmento* (esse é o termo usado por Roxo). Note que essa mescla de procedimentos ocorre, por exemplo, em Timotheo Pereira.

Após a demonstração acima, é proposto como exercício ao “estudante”, usando a palavra de Roxo, o teorema que fornece a expressão do lado oposto ao ângulo obtuso em um triângulo qualquer. O autor apresenta a *hipótese* e destaca que, nesse caso, a igualdade será  $CH = AC + AH$ , considerando a figura 218, como mostra o teorema 300 um pouco acima.

Essa é uma estratégia didática nova, que insere o estudante na discussão em pauta, ou seja, a proposta não é apresentar a demonstração pronta para que o estudante a leia, a memorize, como se ressaltou a partir do livro de Hérigone. A proposta, aqui, é que o estudante também participe, que seja ativo e se encarregue

da tarefa de demonstrar. Isso atesta o caráter didático que a demonstração adquire, a demonstração torna-se objeto do ensino-aprendizagem. Esse é um diferencial, um marco que aparece no *livro de matemática* e o distingue dos livros tipo *elementos de geometria*.

Seguindo com a abordagem do teorema de Pitágoras, o autor observa que reunidos, os dois teoremas que provam as relações  $a^2 = b^2 + c^2 - 2bn$  e  $a^2 = b^2 + c^2 + 2bn$  constituem uma generalização do teorema de Pitágoras, que seria um caso particular se a prova não se baseasse no próprio teorema. Porque, supondo  $A = 90^\circ$  e caindo  $H$  em  $A$ , tem-se  $AH = 0$  e desaparece o termo  $\pm 2AC.AH$ .

Sintetizando, o livro registra que no triângulo  $ABC$  considerado, tem-se as duas relações abaixo (elas vêm destacadas graficamente pela borda retangular),

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bn \quad \text{quando } A < 90^\circ$$

$$a^2 = b^2 + c^2 + 2bn \quad \text{quando } A > 90^\circ$$

E prossegue o encaminhamento do teorema recíproco,

305. Cor.: I - Considerando em conjunto a relação de Pitágoras e as duas precedentes, podemos enunciar a seguinte proposição disjuntiva: Conforme um angulo de um triangulo for agudo, recto ou obtuso, o quadrado do lado opposto será menor, igual ou maior que a somma dos quadrados dos outros dois lados. Assim as três hypotheses disjunctivas:  
 $\wedge A > 90^\circ, \wedge A = 90^\circ, \wedge A < 90^\circ$  (H)

acarretam, respectivamente, as theses disjunctivas:

$$a^2 > b^2 + c^2, \quad a^2 = b^2 + c^2, \quad a^2 < b^2 + c^2 \quad (T)$$

(...)

(p. 338)

E, como as recíprocas são verdadeiras (n. 169), isto é, as hipóteses (T) acarretam, respectivamente, as teses (H), explica o autor que assim se tem a condição necessária e suficiente do teorema recíproco,

Cor. II – Um triangulo será acutangulo, rectangulo ou obtusângulo, conforme o quadrado do maio lado fôr menor, igual ou superior á somma dos quadrados dos outros dois. (p. 339)

É notável que o encaminhamento de Roxo se diferencia do que já se viu antes, pelo objetivo de chegar ao teorema recíproco. Com isso, se revela mais uma característica didática do livro, o trabalho de expor o funcionamento dedutivo da demonstração. Nesse caso, explicar a relação entre hipótese e tese e a possibilidade das proposições recíprocas. Um outro fato que se pode destacar a

partir do livro de Roxo é o uso do termo *escólio*, que é tradicionalmente encontrado nos *elementos de geometria* e aos poucos vai sendo substituído por outro, o termo *observação*. Em Timotheo Pereira e Perez y Marin e Paula há a presença das duas denominações. Os demais *elementos de geometria* da amostra adotam exclusivamente a denominação *escólio*.

Roxo encerra o Capítulo XIII, *Relações métricas nos triângulos* com um texto histórico intitulado *Theorema de Phytogoras* (p. 334-360). Esse texto será sumarizado com o objetivo de exemplificar como a história deixa de ter um caráter episódico, porque amplia o tema, explorando o âmbito intuitivo das demonstrações visuais, trazendo casos hindus e árabes, a demonstração de Pappus, as associações feitas entre fatos da vida cotidiana e a figura do teorema clássico euclidiano, os números pitagóricos.

A história do teorema de Pitágoras reporta a um tempo mais remoto. Embora tradicionalmente seja atribuída a Pitágoras a primeira demonstração do teorema, Roxo diz que não se conhece qual seria o desenvolvimento da prova e destaca, ainda, a existência de demonstrações variadas.

A demonstração pela equivalência de área, a primeira que consta nos *Elementos* e umas das que serviram como ferramenta de estudo nesta Tese, é atribuída a Euclides. Roxo menciona Schopenhauer, filósofo alemão do século XIX que avaliou a demonstração como “demonstração que caminha com pernas de pau” e “uma ratoeira”, mas pondera que, no entanto, ela tem resistido ao longo do tempo. E, uma outra digna de destaque, segundo Roxo, é a de Pappus.

A segunda demonstração digna de nota é a de Pappus (300). sobre os dois lados menores AB, AC de um triângulo qualquer ABC, construímos, á vontade os parallelogrammos AM e NA; sobre BC façamos o parallelogrammo CT, de modo a ser  $QR = AP$ .

Tem-se então

$$(CT) = (AM) + (AN)$$

relação esta que se reduz á de Pythagoras quando o triângulo se torna rectangulo em A e os parallelogrammos se tornam quadrados.

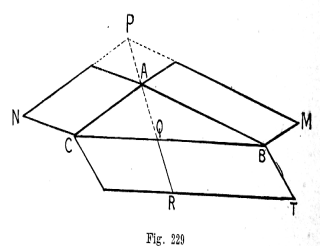


Fig. 51 Demonstração de Pappus, Roxo, p. 357

E ainda existem várias demonstrações que consistem em decompor tanto os quadrados construídos sobre os catetos como o construído sobre a hipotenusa do triângulo retângulo, de modo que as partes congruentes correspondentes tornem o teorema evidente. Roxo diz que nesses casos “basta um golpe de vista sobre a figura para se apreender a demonstração” (p. 357). Entre os hindus, tem-se o exemplo do teorema de Pitágoras por Bhaskara (1160).

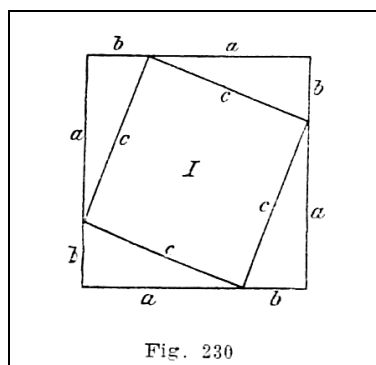


Fig.52 Demonstração visual por Bhaskara, Roxo, p. 359

Roxo ressalta que entre os hindus se encontram muitos outros casos como esse, em que as demonstrações são quase sempre intuitivas. Durante a Idade Média o teorema de Pitágoras era considerado o “magister matheseos”, isto é, o limite dos conhecimentos matemáticos, se não máximo pelo menos da média. E apresenta ainda, outra demonstração intuitiva do teorema, atribuída a Epstein (fig. 232).

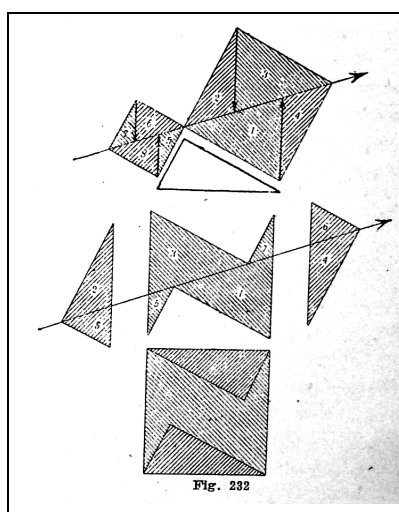


Fig. 53 Demonstração visual, Roxo, p. 359

Relata Roxo que entre os árabes a figura dos *Elementos* era chamada “‘Figura de noiva’ talvez porque, represente dois (quadrados) juntos em um” (p. 359) e também era conhecida por “Cadeira de noiva” (p. 359), talvez pela semelhança entre a figura que aparece em Euclides e a cadeira que um escravo levava às costas, na qual as noivas do oriente costumavam ser transportadas para a cerimônia de casamento.

Também, figurinhas feitas com os três quadrados serviam para representar o professor de matemática e Roxo diz que “ainda hoje os estudantes alemães fazem muitas caricaturas, como a que se encontra abaixo, para representar o professor de Mathematica” (p. 358).



Fig. 54 Caricatura a partir da figura dos *Elementos*, Roxo, p. 360

É importante esse aspecto destacado por Roxo porque revela a apropriação de conhecimento de uma área específica em correlação com a vida cotidiana e com modos de a representar e veicular. Embora não saiba de um trabalho específico, nesse sentido, tratando do teorema de Pitágoras, a literatura sobre impressos explora essa correlação<sup>5</sup>.

Entre os franceses modernos, segundo Roxo, o teorema de Pitágoras é chamado como “pons asinorum”, denominação atribuída pelos antigos a outra proposição, tema que consta no livro de Roxo um pouco antes (p. 123-124).

Ele diz que o “pons asinorum” está ligado à proposição que Euclides enuncia como “nos triângulos isósceles, os ângulos da base são iguaes entre si, e, si se prolongarem os lados iguaes, os ângulos formados abaixo da base serão

5 Ver: Darnton; Roche (orgs.), 1996; Manguel, 2002.



iguais entre si” (p. 122). A celebridade da proposição se associa ao fato de que ela representava o limite de instrução em muitos cursos da Idade Média. Ou seja, os pouco inteligentes não chegavam a esse ponto de estudo e, assim, resultou o nome que significa a ponte dos burros, aquela que alguns não podem atravessar. Roger Bacon (1250) usou o nome elefuga, referindo-se à “fuga dos míseros, porque neste ponto eles geralmente abandonavam a Geometria” (p. 124).

Encerrando o histórico do teorema, Roxo destaca que posteriormente foi interessante para os matemáticos descobrir séries de valores inteiros que satisfizessem a equação  $a^2 = b^2 + c^2$ , das quais a mais simples é formada pelos números 3, 4, 5, conhecidos como números pitagóricos. Entre muitas regras conhecidas para resolver esses cálculos, as mais importantes, relata Roxo, são atribuídas a Pythagoras, Platão e a Proclo e,

correspondem, mais ou menos, às seguintes formulas, respectivamente:

$$\begin{aligned} n^2 + \left(\frac{n^2-1}{2}\right)^2 &= \left(\frac{n^2+1}{2}\right)^2 \\ (2n)^2 + (n^2-1)^2 &= (n^2+1)^2 \\ (2n+1)^2 + \left(\frac{(2n+1)^2-1}{2}\right)^2 &= \left(\frac{(2n+1)^2+1}{2}\right)^2 \end{aligned} \quad (\text{p. 360})$$

Os dados históricos que já aparecem nos *elementos de geometria*, com caráter episódico, em que nomes, datas e feitos são mencionados, se distingue no livro de Roxo por apresentar desdobramentos novos do assunto, como se pode constatar pelo que se mostrou a partir do teorema de Pitágoras. No entanto é preciso considerar o livro de Roxo em um contexto mais geral.

Thiré e Mello e Souza, em 1931, lançaram os livros *Matemática, 1º ano*, *Matemática, 2º ano* e *Matemática, 3º ano – Álgebra*, em que apresentam um texto histórico ao final de cada capítulo, visando atender o novo programa para o ensino de matemática, de 1931, que previa para o 3º ano um primeiro bloco com aritmética e álgebra e um segundo bloco com geometria, inclusive geometria dedutiva<sup>6</sup>. O *Curso de Mathematica, 3ª serie II – geometria*, de 1931,

---

6 Ver: Beltrame, 2000; Rocha, 2001; Dassié, 2001.

provavelmente foi lançado para atender ao quesito, estudo da geometria dedutiva, previsto pelo novo programa, e manteve a característica de inserir os textos históricos ao final dos capítulos seguindo o que fizeram Thiré e Mello e Souza. Isso se afirma porque o *Curso de Matemática elementar, volume I*, de 1929, e o *Curso de Matemática elementar, volume II*, de 1930, lançados por Roxo, não se caracterizam pela presença de textos históricos.

Mas essa característica do livro de matemática se perde, quando se observa os conteúdos da geometria dedutiva, como mostra a próxima obra a ser analisada, *Matemática Ginasial*, de 1945, co-autoria de Roxo, Mello e Souza e Cecil Thiré, e também nos demais livros da base documental.

## 8.2 *Matemática Ginasial* de Roxo, Thiré e Mello e Souza

O livro dos três autores, de 1945, traz um pequeno prefácio em que eles agradecem as colaborações recebidas de colegas professores, que os ajudaram “no sentido de tornar mais simples e mais clara a exposição de certos assuntos”. Um prefácio breve e lacônico que deixa o desafio de um estudo comparativo entre as duas edições do livro, para buscar identificar mudanças ocorridas nas abordagens dos assuntos e tentar dar significado à afirmativa, exposição mais clara e simples. Como já visto, ao longo do tempo se constata um discurso didático sendo construído com base nessa justificativa e, note bem, esse discurso justifica a abordagem dos conteúdos no livro-texto. Portanto, o discurso didático deve ser explorado a partir de fatos que o incorporem como, por exemplo, esse mesmo livro.

O livro *Matemática Ginasial* está dividido em nove unidades. As três primeiras reúnem conteúdos de álgebra e o estudo da geometria dedutiva engloba as demais unidades. A parte de álgebra e a de geometria dedutiva são indexadas, numericamente, de modo independente. A primeira demonstração do teorema de Pitágoras é aquela que tem por base a semelhança de figuras e consta da *Unidade V, Relações métricas no triângulo retângulo*, no item, 37 – *Teorema de Pitágoras*.

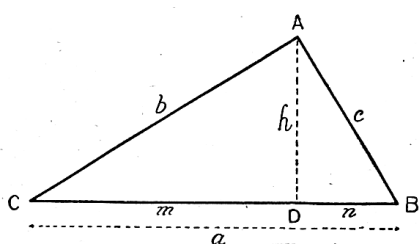
Comparando com o desenvolvimento do teorema, no livro de Roxo, a abordagem dos três autores deixa de se ocupar em discutir intuitivamente a idéia de que o teorema de Pitágoras é um caso particular da expressão do lado de um triângulo qualquer em função da medida do ângulo que lhe é oposto.

O encaminhamento deste livro deixa de enfatizar a passagem geométrico-numérico que se destacou na análise anterior, e também o conceito de proporcionalidade entre os lados homólogos que está na base da semelhança de dois triângulos. Com isso enfatiza o aspecto operacional da abordagem, fato que pode ser constatado pelo modo como se opera com as proporções. Esse aspecto terá prioridade nessa análise.

Um esboço dos títulos e de alguns desenvolvimentos que constam do livro basta para mostrar o encaminhamento que leva à primeira demonstração do teorema de Pitágoras. Os autores partem do conceito de *Projeção ortogonal* e, depois, na discussão sobre a *Projeção dos catetos de um triângulo retângulo* eles explicam que o comprimento dos lados do triângulo é representado pelas letras  $a$ ,  $b$  e  $c$ .

Seja  $ABC$  um triângulo, retângulo, no qual  $a$  designa o comprimento da hipotenusa e  $b$  e  $c$ , os comprimentos dos catetos.

Tracemos a altura  $AD$  desse triângulo.



O segmento  $BD$  será a projeção do cateto  $b$  sobre a hipotenusa; designaremos o comprimento dessa projeção pela letra  $m$ .

(...)

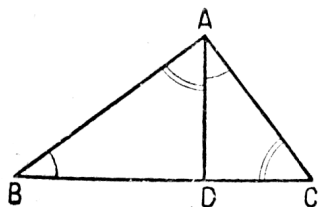
é evidente que a soma das projeções dos catetos é igual à hipotenusa:  $m + n = a$ .

(p. 239).

Dando sequência à exposição do assunto, segue-se o item intitulado, 33 – *Decomposição do triângulo retângulo. Teorema*. Observe, logo abaixo, que a conclusão final, a semelhança dos três triângulos, segue sem ser justificada pela transitividade, como consta em outras demonstrações. E também a proporcionalidade dos lados correspondentes nos triângulos semelhantes não está referenciada, e é justamente a partir dela que se opera e se chega à “relação que traduz” o teorema de Pitágoras, como afirmam os autores.

### 33 - Decomposição do triângulo retângulo. Teorema.

A altura de um triângulo retângulo decompõe esse triângulo em dois triângulos semelhante entre si e semelhantes ao triângulo dado.



Seja  $ABC$  um triângulo retângulo. Tracemos do vértice  $A$  do ângulo reto a altura  $AD$ <sup>(4)</sup>.

Fica o triângulo  $ABC$  decomposto em dois triângulos retângulos:  $ABD$  e  $ACD$ . Os triângulos retângulos  $ABC$  e  $ABD$  são semelhantes, porque têm um ângulo agudo comum, que é o ângulo  $B$ . Temos:

$$\Delta ABD \sim \Delta ABC^{(5)}$$

Os triângulos retângulos  $ABC$  e  $ACD$  são semelhantes, porque têm um ângulo agudo comum, que é o ângulo  $C$ . Podemos escrever:

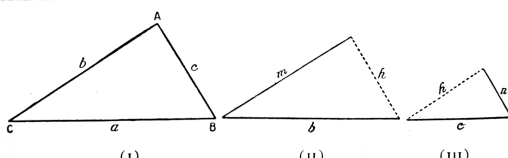
$$\Delta ACD \sim \Delta ABC$$

Como os triângulos  $ABD$  e  $ACD$  são semelhantes ao triângulo  $ABC$ , concluímos que esses triângulos são semelhantes entre si. (p. 240).

A referência (4) leva à nota de rodapé “quando nos referimos à altura de um triângulo retângulo entende-se que se trata da altura baixada sobre a hipotenusa. Aliás, as outras duas se confundem com os catetos.” (p. 239). Já a referência número (5) leva à nota de rodapé que informa sobre os símbolos  $\Delta$ ,  $\sim$  e o modo como são lidos. A abordagem dos três autores vai mostrando como a proporcionalidade é trabalhada com ênfase no caráter operacional. Isso se constata com o segundo teorema que o livro apresenta, o cateto como média proporcional, que é apresentado logo abaixo.

**34 — Cateto como média proporcional. TEOREMA.** *Qualquer cateto é média proporcional entre a hipotenusa e a sua projeção sobre ela.*

Consideremos o triângulo retângulo  $ABC$ , que figura no parágrafo anterior. A altura  $AD$  decompõe esse triângulo em dois triângulos, também retângulos  $ACD$  e  $ABD$ .



O triângulo  $ACD$  tem hipotenusa  $b$  e catetos  $m$  e  $h$ . Esse triângulo está reproduzido na figura (II).

O triângulo  $ABD$ , cuja hipotenusa é  $c$ , está representado na figura (III).

Como já demonstráramos, os triângulos (I), (II) e (III) são semelhantes.

Da semelhança dos triângulos (I) e (II) podemos tirar a seguinte proporção: a hipotenusa do 1.º está para a hipotenusa do 2.º, assim como o cateto maior do 1.º está para o cateto maior do 2.º.

Podemos indicar essa proporção, assim:

$$\frac{\text{Hipotenusa do 1}^\circ}{\text{Hipotenusa do 2}^\circ} = \frac{\text{Cateto maior do 1}^\circ}{\text{Cateto maior do 2}^\circ}$$

ou, empregando as letras convencionais:

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{m} \quad (...)$$

Fig. 55 Média proporcional, Roxo, Thiré, Mello e Souza, p. 240

Na abordagem do livro anterior o conceito de semelhança está explicitado. Ali, no teorema 294 a semelhança dos dois triângulos é justificada com um dos casos de semelhança, dois ângulos iguais, lados correspondentes ou homólogos proporcionais e também a mudança conceitual geométrico-numérico que a proporção expressa é enfatizada na exposição do assunto.

Ao contrário, a abordagem dos três autores não enfatiza a mudança conceitual, nem a correspondência entre lados os proporcionais nos triângulos semelhantes, dando lugar ao caráter operatório das proporções quando enfatiza o procedimento hipotenusa-cateto maior: o ponto de partida é a figura dos triângulos retângulos semelhantes em que as “letras convencionais” estão dispostas, sendo pressuposto o reconhecimento da hipotenusa e dos catetos nas figuras, e a partir disso a proporção é “indicada”.

Voltando ao texto do teorema acima, a proporção indicada leva às duas relações, a relação  $b^2 = am$ , referenciada como (N), e a relação  $c^2 = na$ , indicada como (N') que traduzem o enunciado do teorema (p. 241). Logo em seguida consta a prova do teorema de Pitágoras.

**37 — Teorema de Pitágoras.** *Em qualquer triângulo, o quadrado da hipotenusa é igual à soma dos quadrados dos catetos.*

Tomemos as relações (N) e (N'), já deduzidas no número 5 d'êste capítulo.

$$am = b^2$$

$$an = c^2$$

Somando-se membro a membro essas duas igualdades, resulta:

$$am + an = b^2 + c^2$$

Escrevendo o fator  $a$  em evidência:

$$a(m + n) = b^2 + c^2$$

Sendo a soma  $m + n$  igual a  $a$ , temos:

$$a \cdot a = b^2 + c^2$$

finalmente:

$$a^2 = b^2 + c^2$$

Esse resultado demonstra a proposição famosa, conhecida, em geral, sob a denominação de *teorema de Pitágoras* <sup>(6)</sup>.

Fig. 56 Teorema de Pitágoras, Roxo, Thiré, Mello e Souza, p. 243-244

A prova do teorema de Pitágoras é algébrica, sem marcas discursivas como as etapas *tese*, *hipótese*, *demonstração* e sem justificativas para os procedimentos algébricos, constando apenas da descrição dos procedimentos efetuados, somar membro a membro, pôr um fator em evidência.

Logo em seguida, consta a seguinte explicação sobre o teorema,

OBSERVAÇÃO. Sabemos que  $a^2$ ,  $b^2$ ,  $c^2$  representam as áreas dos quadrados construídos respectivamente sobre  $a$ ,  $b$ ,  $c$ . O teorema de Pitágoras pode, pois, ser enunciado do seguinte modo: *o quadrado construído sobre a hipotenusa é equivalente à soma dos quadrados construídos sobre os catetos.*

RELAÇÃO DE PITÁGORAS. A relação

$$a^2 = b^2 + c^2 \quad (P)$$

que acabámos de demonstrar traduz uma relação notável em matemática e é, em geral, conhecida pela denominação de *lei de Pitágoras* ou *relação de Pitágoras*.

Fig. 57 Observação, Roxo, Thiré, Mello e Souza, p. 244

A referência (6), no texto da demonstração, leva o leitor à seguinte nota histórica,

(6) A relação entre os lados de um triângulo retângulo era praticamente conhecida, para casos especiais, dos egípcios (2000 a. de J.C.) dos chineses (1100 anos a. de J.C.), e dos hindús também muito antes da nossa era. A PITÁGORAS atribui-se, entretanto, com os melhores fundamentos, a demonstração geral do teorema, embora não se saiba o método por ele seguido e que não era certamente o indicado acima.

Fig. Nota, 58 Roxo, Thiré e Mello e Souza, p. 144.

A segunda demonstração do teorema de Pitágoras consta da *Unidade IX, Área das figuras planas*. Observe no texto, abaixo, que o uso da linguagem algébrica substitui a linguagem discursiva, tornando o texto mais conciso como no caso dos passos dedutivos (I) e (II) e na conclusão da igualdade dos dois ângulos. A prova não traz as marcas das etapas *hipótese*, *tese* e *demonstração*, nem referencia as proposições que estão na base da prova. Isso indica que o livro perde

a estrutura dedutiva característica, em que os axiomas e proposições são indexados para que possam estar referidos, na medida em que eles embasem a prova de um teorema ou problema. Note que, por exemplo, no livro anterior em uma das provas foi referenciado o *axioma 3*.

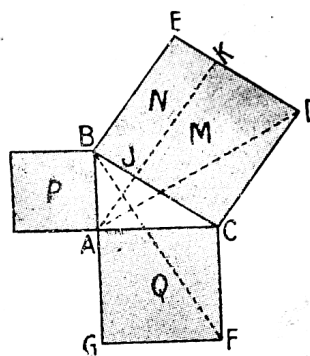
**130 — Teorema de Pitágoras.** A proposição famosa, conhecida pela denominação de *teorema de Pitágoras*, pode ser enunciada do seguinte modo:

*O quadrado construído sobre a hipotenusa é equivalente à soma dos quadrados construídos sobre os catetos.*

$$M = P + Q$$

Seja o triângulo  $ABC$ , retângulo em  $A$ .

Construamos um quadrado sobre cada um de seus lados e baixemos de  $A$  uma perpendicular,  $AJ$ , sobre a hipotenusa,  $BC$ . Essa perpendicular, prolongada até  $K$ , vai decompor o quadrado  $BCDE$  em dois retângulos de áreas  $M$  e  $N$ . Provemos que as áreas  $M$  e  $N$  são iguais respectivamente a  $P$  e  $Q$ , áreas dos quadrados construídos sobre os catetos.



Liguemos  $A$  a  $D$  e  $B$  a  $F$ . O triângulo  $ACD$  tem a mesma base  $CD$  e a mesma altura,  $CJ$ , que o retângulo  $N$ ; logo

$$\text{área}(ACD) = \frac{1}{2} M \quad (I)$$

O triângulo  $BCF$  tem a mesma base  $CF$  e a mesma altura  $AC$  que o quadrado  $Q$ ; logo

$$\text{área}(BCF) = \frac{1}{2} Q \quad (II)$$

Por outro lado, temos

$$\angle ACD = 1 \text{ reto} + \angle ACB$$

$$\angle BCF = 1 \text{ reto} + \angle ACB$$

e, portanto,  $\angle ACD = \angle BCF$

Além disso,  $BC = CD$  como lados de um quadrado e pela mesma razão  $AC$  e  $CF$ . Assim, os triângulos  $ACD$  e  $BCF$  são congruentes por terem um ângulo igual formado por lados respectivamente iguais e tem, pois, a mesma área. Sendo iguais os primeiros membros de (I) e (II), concluímos ser  $M = Q$ . Analogamente provaríamos ser  $N = P$ . Como a área do quadrado  $BCDE$  é a soma de  $M$  e  $N$ , esse quadrado é equivalente à soma dos quadrados construídos sobre os catetos. <sup>(14)</sup>.

Fig. 59 Teorema de Pitágoras, Roxo, Thiré, Mello e Souza, p. 338-339

A conclusão da prova do teorema, acima, não tem uma justificativa baseada em proposições geométrica, mas sim, em operações com equações algébricas. Essas operações também não são justificadas. Isso mostra que o desenvolvimento dedutivo ao ser mesclado com procedimentos algébricos perde o seu caráter de justificativas com base em proposições já dadas anteriormente.

O texto da demonstração, acima, ainda traz a referência (14) que leva a uma nota de rodapé com informes históricos.

(14) A demonstração que apresentamos não é devida a PITÁGORAS (vide nota 6, pag. 245). Ela se encontra em *Os Elementos* de EUCLIDES, a quem a atribui PROCLIO (+ 460) e é, das numerosas demonstrações euclidianas, a que melhor tem resistido à ação do tempo. Outra demonstração notável é a de PAPPUS (+ 300), que faz o teorema de Pitágoras resultar como caso particular de outra relação análoga entre paralelogramos construídos sobre os lados de um triângulo qualquer.

Fig. 60 Nota, Roxo, Thiré, Mello e Souza, p. 339

Pelo visto, em relação a abordagens anteriores o encaminhamento dado para se chegar teorema de Pitágoras, no livro dos três autores, mostra que a demonstração deixa de ter as marcas do desenvolvimento dedutivo à medida que fica mesclada com os procedimentos algébricos. Mostra que o que se apresenta nos livros como geometria dedutiva cada vez mais deixa de ser uma abordagem que se estrutura a partir dos axiomas e proposições que justificam as propriedades dos objetos geométricos. Com respeito à inclusão da história da matemática, esse livro se aproxima de obras anteriores pelo caráter episódico das informações. Uma característica que o livro traz e é nova em relação aos outros, são as *Respostas dos Exercícios*, contemplando apenas as questões numéricas, pois o livro propõe *Exercícios teóricos* e *Exercícios numéricos*.

| UNIDADE IX                                                               |                                                                                |
|--------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------|
| ÁREAS PLANAS                                                             |                                                                                |
| 1. 60 m <sup>2</sup>                                                     | 2. 30 m e 12 m                                                                 |
| 3. 48 m <sup>2</sup>                                                     | 4. 1260 m <sup>2</sup>                                                         |
| 5. 7,75 m e 4,25 m                                                       | 6. 5,88 m <sup>2</sup> e 20,12 m <sup>2</sup>                                  |
| 7. 80 m e 20 m                                                           | 8. 12 m e 7 m                                                                  |
| 9. 12,2 m e 6,8 m                                                        | 10. 12 m e 9 m                                                                 |
| 11. 5 m, 4 m e 3 m                                                       | 12. 1,2 m                                                                      |
| 13. 12 cm e 4 cm                                                         | 14. 12,96 cm <sup>2</sup>                                                      |
| 15. 16 cm                                                                | 16. 18 cm                                                                      |
| 17. 0,96 m <sup>2</sup>                                                  | 18. 8,64 cm <sup>2</sup>                                                       |
| 19. 225 cm <sup>2</sup>                                                  | 20. 64 m <sup>2</sup>                                                          |
| 21. 15 cm e 20 cm                                                        | 22. 60 m <sup>2</sup>                                                          |
| 23. 134,352 m <sup>2</sup>                                               | 24. A) 249,40 cm <sup>2</sup> B) 43,24 m <sup>2</sup>                          |
| C) 1330,17 cm <sup>2</sup>                                               | 25. 32,4750 m <sup>2</sup>                                                     |
| 26. A) 2,04 m B) 9,202 cm                                                | 27. A) 3 m; 6 m; 7 m B) 10 m; 6 m; 8 m C) 5 m; 6 m; 9 m D) 2,4 m; 2,6 m; 2,8 m |
| 28. A) 49 m <sup>2</sup> B) 32 cm <sup>2</sup>                           | 29. 8,46 m                                                                     |
| 30. A) 48 m <sup>2</sup> B) 0,0346 m <sup>2</sup>                        | 31. 7,6 cm                                                                     |
| 32. A) 260 m <sup>2</sup> B) 13,20 cm <sup>2</sup> C) 294 m <sup>2</sup> | 33. 208 m <sup>2</sup>                                                         |
| 34. A) 2,8 m B) 4 m                                                      | 35. 6 cm, 6 cm e 18 cm                                                         |
| 36. 163949,4592 m <sup>2</sup>                                           | 37. A) 1152 cm <sup>2</sup> B) 10,392 m <sup>2</sup>                           |
| C) 59,44 m <sup>2</sup> D) 2,1213 m <sup>2</sup>                         | 38. A) 15,58 cm <sup>2</sup> B) 7,4995 m C) 2,0812 m <sup>2</sup>              |

Fig. 61 Respostas aos exercícios, Roxo, Thiré, Mello e Souza, p. 363



A lista, acima, reúne parte das 87 respostas aos exercícios numéricos relativos à unidade em que se estuda a área das figuras planas. E, ao final do livro, como já registrado antes com a geometria F.I.C, consta em duas folhas o Formulário e, uma delas segue reproduzida abaixo.

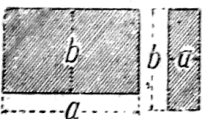
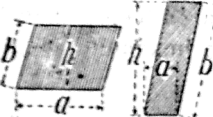
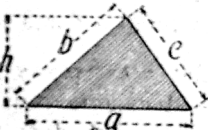
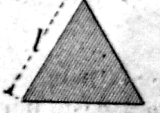
| FORMULÁRIO — Perímetros e áreas das figuras planas            |                                                                                     |                         |                                                        |
|---------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------|--------------------------------------------------------|
| (S, área; P, perímetro; p, semi-perímetro; C, circunferência) |                                                                                     |                         |                                                        |
| Designação das figuras                                        | Figuras                                                                             | Fórmulas dos perímetros | Fórmulas das áreas                                     |
| Retângulo .....                                               |    | $P = 2a + 2b$           | $S = ab$                                               |
| Quadrado .....                                                |    | $P = 4l$                | $S = l^2$                                              |
| Paralelogramo .....                                           |   | $P = 2(a + b)$          | $S = ah$                                               |
| Triângulo .....                                               |  | $P = a + b + c$         | $S = \frac{ah}{2}$ ou<br>$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ |
| Triângulo equilátero .....                                    |  | $P = 3l$                | $S = 0,43l^2$                                          |
| Hexágono regular                                              |  | $P = 6l$                | $S = 2,6l^2$ ou $S = 0,86h^2$                          |
| Octógono regular convexo .....                                |  | $P = 8l$                | $S = 4,83l^2$ ou $S = 0,83h^2$                         |

Fig. 62 Roxo, Thiré, Mello e Souza, p. 352

A presença dos exercícios numéricos que está relacionada com o uso das fórmulas, considerando a fórmula como um modo de traduzir ou expressar as propriedades dos objetos geométricos, indica que o estudo da geometria dedutiva está associado com a álgebra e a aritmética, abordagem que se sedimenta e passa a ser característica no livro de matemática.

### 8.3 Curso de Matemática de Maeder

O autor Maeder teve seus livros adotados no ensino básico brasileiro por mais de três décadas, e em muitos estados brasileiros. O seu *Curso de Matemática*, 4ª Série, 13ª edição de 1959, já não expõe os assuntos da geometria plana elementar a partir de uma estrutura dedutiva, ou seja, definições, axiomas e proposições que fundamentam as provas dos teoremas. Não há notas históricas, o livro é indexado em uma seqüência numérica única e, em cada capítulo, após os teoremas consta do item, *Fórmulas*, a síntese algébrica das proposições enunciadas nos teoremas. Os exercícios resolvidos antecedem a lista de questões propostas que encerra cada capítulo do livro, uma característica que marca a abordagem desse autor e também vai se tornar comum no texto escolar em livros de matemática.

O teorema de Pitágoras consta do *Capítulo VII, Relações métrica no Triângulo retângulo*, e a prova do teorema pela semelhança de figuras é encaminhada a partir do conceito de média proporcional de segmentos:

(...) devemos acentuar que um segmento é media proporcional de dois outros, quando o número que exprime sua medida é média proporcional dos números que exprimem a medida dos outros dois.

Assim, designando respectivamente por  $A$ ,  $B$  e  $C$  os números que medem três segmentos dados, e sendo  $B$  a média proporcional de  $a$  e  $c$ , temos

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{c},$$

de onde se deduz

$$b^2 = ac. \quad (\text{p. 104})$$

A abordagem enfatiza o caráter numérico desse conteúdo, pois a média proporcional dos segmentos se reduziu à média proporcional de valores numéricos. Mas esse conceito não está articulado com o de projeção dos catetos sobre a hipotenusa nem com o conceito de lados correspondentes proporcionais em triângulos semelhantes, tornando os teoremas não inteligíveis.

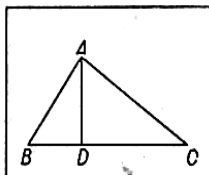
O teorema, abaixo, fornece a expressão de cada cateto do triângulo retângulo como média proporcional entre a hipotenusa e a sua projeção sobre ela:

$\overline{AB}^2 = \overline{BC} \overline{BD}$  e  $\overline{AC}^2 = \overline{CB} \overline{CD}$ . Assim, não foram correlacionados os dois conceitos de modo que ficasse explícito que a projeção dos catetos sobre a hipotenusa determina os dois segmentos com os quais se estabelece a relação de segmentos proporcionais discutida antes.

76. Teorema. — Em qualquer triângulo retângulo:

1.º a altura relativa à hipotenusa é média proporcional entre os segmentos que sobre ela determina;

2.º cada cateto é média proporcional entre a hipotenusa e a sua projeção sobre ela.



Consideremos o triângulo ABC, figura acima, no qual AD é a altura relativa à hipotenusa.

**Hipótese:**

$$\hat{A} = 90^\circ$$

$$AD \perp BC.$$

**Tese:**

$$\overline{AD}^2 = DB \cdot DC$$

$$\overline{AB}^2 = BC \cdot BD$$

$$\overline{AC}^2 = CB \cdot CD$$

**Demonstração.** I. Nos triângulos retângulos ADB e ADC, temos

$$\hat{DBA} = 90^\circ - \hat{BAD}$$

$$\hat{DAC} = 90^\circ - \hat{BAD}.$$

Essas igualdades permitem-nos concluir que

$$\hat{DBA} = \hat{DAC}.$$

Por outro lado, sabemos que, quando dois triângulos retângulos têm um ângulo agudo igual são semelhantes. — Portanto:

$$\triangle ADB \sim \triangle ADC.$$

Da semelhança desses triângulos, deduz-se

$$\frac{DB}{AD} = \frac{AD}{DC},$$

de onde tiramos

$$\overline{AD}^2 = DB \cdot DC.$$

Fica, assim demonstrada a primeira parte da proposição.

Fig. 63 Teorema, Maeder, p. 105

Observe ainda no teorema, acima, que a segunda proposição é enunciada usando o conceito de projeção dos catetos sobre a hipotenusa, mas esse conceito não foi discutido antes na apresentação do conteúdo (nem há qualquer referência que permita ao leitor encontrar essa informação nesse ou em outro volume da coleção). Além disso, a proporção presente no texto foi deduzida da semelhança dos dois triângulos, sem que a proporcionalidade dos lados correspondentes fosse

mencionada e, como no livro anterior, o conceito de semelhança foi usado parcialmente: apenas a igualdade dos ângulos é estabelecida. Mas isso não é suficiente para a demonstração, porque o teorema de Pitágoras é uma relação estabelecida entre os lados do triângulo retângulo.

A exposição do assunto revela que o modo como o conceito de média proporcional de segmentos foi abordado não deixa claro a base geométrica sobre a qual o conceito se assenta. E, como se pode constatar, abaixo, a prova do teorema é algébrica, sem marcar as etapas do desenvolvimento dedutivo *hipótese*, *tese*, *demonstração* e sem referências que justifiquem os passos dedutivos da prova.

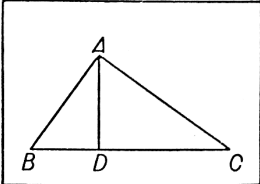
77. **Teorema de Pitágoras.** — *Em qualquer triângulo retângulo o quadrado da hipotenusa é igual à soma dos quadrados dos catetos.*

Consideremos o triângulo retângulo ABC, figura ao lado.

Traçando a altura, AD, relativa à hipotenusa, temos, de acordo com a proposição anterior,

$$\overline{AB}^2 = BC \cdot BD$$

$$\overline{AC}^2 = BC \cdot CD.$$



Somando ordenadamente essas igualdades, encontramos

$$\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = BC \cdot BD + BC \cdot CD$$

$$\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = BC (BD + CD).$$

Mas, notando que  $BD + CD = BC$ ,

segue-se que

$$\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = BC \cdot BC$$

$$\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = \overline{BC}^2.$$

Fig. 64 Teorema de Pitágoras, Maeder, p. 106

Logo em seguida, uma nota destaca que os triângulos retângulos que podem ser expressos por números inteiros são denominados *triângulos pitagóricos* e que “de acordo com o terceiro caso da semelhança, os triângulos cujos lados são proporcionais aos números 3, 4 e 5 são retângulos e semelhantes entre si” (p. 107).

O registro, acima, apresenta o terceiro caso de semelhança, indicando que o assunto foi estudado antes e, de fato, consta do programa da 3ª série. No entanto, a abordagem do autor deixa de articular essas informações.

Por exemplo, constam do livro da 3ª Série os temas semelhança de figuras e projeção de segmentos sem que estes estejam listados no programa, o índice de conteúdos indica o *Capítulo VIII: Figuras geométricas*, contendo o subtítulo *Geometria dedutiva*.

Mas, Maeder exemplifica a abordagem em que à falta de justificativa nas demonstrações se soma a exposição do assunto em que conceitos fundamentais para a prova do teorema não são discutidos. No caso do teorema de Pitágoras, a semelhança dos dois triângulos deixa de ser explorada conceitualmente com respeito à proporcionalidade dos lados correspondentes.

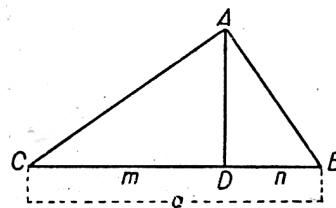
Por sua vez, a abordagem enfatiza a figura do triângulo retângulo e as letras associadas aos catetos, à hipotenusa, à altura e às projeções dos catetos sobre a hipotenusa, como confirma o último item da parte expositiva, *Fórmulas*, que antecede os exercícios resolvidos e propostos.

80. Fórmulas. – Designando por  $a$  a hipotenusa, por  $b$  e  $c$  os catetos do triângulo retângulo  $ABC$ , por  $h$  a altura relativa à hipotenusa, por  $m$  e  $n$  as projeções dos catetos sobre a hipotenusa, as propriedades estabelecidas nos parágrafos precedentes podem ser expressas pelas relações seguintes:

I.  $h^2 = mn$

II.  $b^2 = am$ ,  $c^2 = na$

III.  $a^2 = b^2 + c^2$ .



(p. 107-108)

Ou seja, as fórmulas algébricas que traduzem as propriedades da figura geométrica servem para a resolução das questões propostas. Os exercícios propostos apresentam questões que propõem o cálculo numérico e a “expressão” ou fórmula de uma variável dependente.

Calcular a altura de um triângulo retângulo determina sobre a hipotenusa os segmentos  $M = 36$  e  $n = 64$ . Calcular os catetos do triângulo.

Exprimir um dos catetos de um triângulo retângulo em função de um dos catetos e da altura que parte do vértice do ângulo reto. (p. 112)

A prova do teorema de Pitágoras pela equivalência de áreas consta no *Capítulo XVII – Relações métricas entre áreas*. Abaixo, o desenvolvimento do tema também mostra que a semelhança dos dois triângulos é estabelecida sem que a proporcionalidade dos quadrados dos lados homólogos não esteja na base da exposição do assunto, uma vez que a proporcionalidade entre as áreas é considerada como a igualdade de duas divisões feitas ordenadamente.

**208. Áreas de triângulos semelhantes.** — *As áreas de dois triângulos semelhantes estão entre si como os quadrados de dois lados homólogos.*

Consideremos os triângulos semelhantes ABC e A'B'C', vistos na figura a seguir.

Designando, respectivamente, por  $b$  e  $b'$ ,  $h$  e  $h'$ ,  $S$  e  $S'$ , as bases, alturas e áreas desses triângulos, temos, de acordo com o estabelecido no parágrafo 188,

$$S = \frac{bh}{2} \quad \text{e} \quad S' = \frac{b'h'}{2}.$$

Dividindo ordenadamente as expressões acima, obtemos

$$\frac{S}{S'} = \frac{bh}{b'h'}. \quad (1)$$

Por outro lado, sendo semelhantes os triângulos, temos

$$\frac{b}{b'} = \frac{h}{h'}.$$

Substituindo, na expressão (1)

$$\frac{h}{h'} \quad \text{por} \quad \frac{b}{b'},$$

chega-se a que

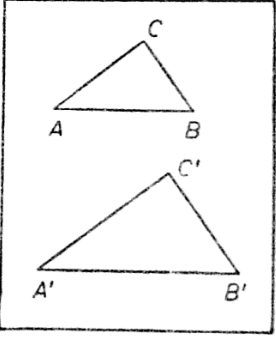
$$\frac{S}{S'} = \frac{b^2}{b'^2}.$$


Fig. 65 Teorema, Maeder, p. 219

A referência número 188, acima, estabelece “A área do triângulo. – A área de um triângulo tem por medida o semiproducto dos números que exprimem a medida de sua base e de sua altura” (p. 190).

No entanto, observe que a prova do teorema de Pitágoras é feita com base na equivalência de áreas e não na semelhança de figuras, sem haver qualquer esclarecimento sobre esse ponto importante e, com isso, a demonstração fica deslocada por estar fora do contexto conceitual em foco.

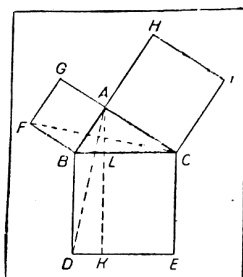
Supostamente o livro pode estar seguindo a tradição de apresentar a prova clássica dos *Elementos* de Euclides que, como disse Roxo (1931) tem resistido ao longo do tempo. Vale também lembrar Ottoni (s.d., 1ª. ed. 1826), autor que apresentou essa demonstração, ressaltando que assim foi feito apenas por causa do aspecto metodológico.

**212. Teorema de Pitágoras.** — O quadrado construído sobre a hipotenusa de um triângulo retângulo é equivalente à soma dos quadrados construídos sobre os catetos.

Seja o triângulo retângulo ABC, figura á página seguinte.

Sobre cada um dos lados do triângulo, construíamos um quadrado, e, a partir do vértice do ângulo reto, A, tracemos AK, perpendicular à hipotenusa, BC. Tracemos, depois, os segmentos AD e CF.

Tendo o triângulo ABD a mesma base, BD, e a mesma altura, BL, que o retângulo BDKL, é equivalente à metade desse retângulo.



Analogamente, chega-se a que o triângulo CBF é equivalente à metade do quadrado ABFG.

Mas, nos triângulos ABD e CBF, temos

$$BC = BD,$$

como lados do quadrado BDEC,

$$BF = BA,$$

como lados do quadrado ABFG,

$$\angle FBC = \angle ABD,$$

como soma de ângulos iguais, um reto e outro comum, ABC.

São, pois, iguais esses triângulos. Logo, o quadrado ABFG, é equivalente ao retângulo BDKL.

Ademais, demonstra-se facilmente, e de modo análogo, que o quadrado ACIH é equivalente ao retângulo LKEC.

Consequentemente, o quadrado BDEC, composto dos retângulos BDKL e LKEC, é equivalente à soma dos quadrados ABFG e ACIH.

Fig. 66 Teorema de Pitágoras, Maeder, p. 221-222

Foi mencionado um pouco acima, estar incluído no livro da 3ª Série, de Maeder, o subtítulo *Geometria dedutiva*, como parte do *Capítulo VIII: Figuras geométricas*. Embora o item *geometria dedutiva* pontue temas como proposições fundamentais, axiomas, postulados, definições, teoremas, o objetivo do livro não é o estudo da geometria dedutiva, no sentido do ensino-aprendizagem da demonstração em que as proposições sejam consideradas em seu caráter geométrico e em correlação umas com as outras. As questões propostas revelam isso, pelo caráter numérico que apresentam.

Em Maeder tem-se um exemplo de que o estudo dedutivo da geometria vai deixando de ser o objetivo do ensino-aprendizagem em favor do uso das fórmulas e dos exercícios numéricos. A demonstração deixa de ser um alvo do estudo no livro de matemática. Contraditoriamente, esse fato vai de encontro à principal característica que originalmente o *livro de matemática* apresentou em relação aos *elementos de geometria*, propor estratégias para o ensino-aprendizagem de como demonstrar.

Esse fato indica, por outro lado, que a partir dos procedimentos algébricos presentes no *livro de matemática* o tema demonstração pode ser investigado e que, certamente, esse percurso vai levar às proposições geométricas.

No entanto o *livro de matemática* que nos anos 50 registrou elementos que atestam a ausência da abordagem dedutiva em geometria, uma característica dos livros atuais, mostrou outra vez uma contradição. Nos anos 60, o autor Sangiorgi apresenta o estudo da geometria dedutiva, trata didaticamente o assunto ao propor ferramentas para o ensino-aprendizagem da demonstração, aproximando-se com isso do marco inovador que caracterizou o livro escolar de matemática com respeito ao tema demonstração, o livro de Roxo de 1931. Com isso, Maeder traz um trabalho atípico, considerando o que lhe é anterior o e que lhe sucede, no que diz respeito ao ensino-aprendizagem da demonstração.

#### **8.4 Matemática – Curso Moderno de Sangiorgi**

Os anos 60 se caracterizam pelo Movimento da Matemática Moderna, orientação no sentido de modernizar os conteúdos da matemática elementar de modo a aproximá-los de produções teóricas mais recentes. A proposta de ensinar os conteúdos da escola elementar tendo como eixo central a idéia de estrutura marcou os livros dessa época, sendo que em fins dos anos 90 marcas dessas orientações já questionadas desde a década de 80, praticamente desaparecem dos livros-texto.

Uma coleção típica lançada na época, *Matemática: Curso Moderno, de Osvaldo Sangiorgi*, em quatro volumes, se dirigiu ao então ensino ginasial. Dois exemplares de que se faz uso nesse trabalho são os volumes 3º e o 4º, de 1969.

No *Prefácio* do volume 4, o autor faz referência a se conhecer “as belas estruturas da Matemática Moderna”, anunciando uma proposta de abordagem dos conteúdos como já ocorria em outros países. Diz que o conceito moderno de função é o dominante, integrando a geometria e a álgebra, que a “*semelhança* comanda o estudo da Geometria, iniciado axiomáticamente na 3ª série”, e que “o estudo das razões trigonométricas visa a ensinar as novas técnicas de medir e que são de uso corrente”. Também consta do *Apêndice*, anuncia o autor, um tratamento axiomático das áreas de regiões planas.



Os assuntos estudados no 4º volume se distribuem por três capítulos, *Números reais: práticas com números irracionais, Funções e Semelhança*, subdivididos em partes.

O capítulo *Semelhança*, apresenta os assuntos dando-lhes um tratamento dedutivo. Traz as demonstrações dos teoremas, mostrando o encadeamento das proposições com as respectivas justificativas. Pode-se supor a demonstração como mais um modo de se estudar o conteúdo, pois a base teórica em que se assentam as proposições que justificam a prova, já foi explorada antes. Para isso, o autor apresenta o assunto com explicações, exemplos, ilustrações, exercícios, o recurso de dialogar com o leitor, respondendo, enviando o leitor a estudos feitos em outros capítulos ou em outro volume da coleção.

Um ponto indiscutível que esse livro levanta é o uso da linguagem simbólica. Novamente aparece a necessidade do balanço entre como referir os objetos geométricos e matemáticos de modo preciso e não truncar a comunicação com os que não estão familiarizados com a linguagem matemática, que se torna necessário no caso do estudo da geometria. O autor se dedica a introduzir a simbologia no contexto teórico que lhe dá significado, expondo como se lê cada símbolo e se ocupa em fixar esses conhecimentos, pela repetição ao longo da apresentação dos assuntos ou com exercícios específicos.

O símbolo remete ao contexto em que um assunto é discutido e tem o caráter de compactar informações, ou seja, definições, relações, operações. Tendo, portanto, um caráter conceitual e operacional.

Por exemplo, ele explora o conceito de semelhança entre figuras geométricas partindo da noção de que elas têm a mesma forma, mas nem sempre têm o mesmo tamanho, depois explora a noção de lados correspondentes proporcionais e ângulos correspondentes congruentes, o que se encontra de modo geral em outros livros.

Por exemplo, quando a semelhança é expressa pelas relações proporcionais, gerando as equações ou fórmulas das relações métricas do triângulo retângulo, a correspondência entre lados e ângulos é indicada com o uso da igualdade. A matemática elementar trata a semelhança entre triângulos, por esse método, usando as igualdades que indicam a proporcionalidade entre medidas, ou seja, entre valores numéricos. Note bem, aqui acontece mudança conceitual e mudança na escrita.

E como já foi visto anteriormente, a mudança do método da equivalência de áreas para a prova com base na semelhança, na demonstração do teorema de Pitágoras, justamente mostra essa passagem conceitual modificando a escrita do texto.

O livro apresenta estudos de geometria dedutiva em conexão com conteúdos já estudados em itens anteriores ou em outras séries. Ao longo do texto a seção, *Observação e Lembrete Amigo*, corta a sequência dos teoremas, provocando que se tenha atenção com particularidades do assunto, também pelos informes históricos que apresenta. Além disso, Sangiorgi insere tipos diferentes de exercícios como *Teste de atenção*, *Exercícios de aplicação*, *Exercícios exploratórios*, *Problemas* e os *Teoremas* que devem ser demonstrados.

A demonstração do teorema de Pitágoras que consta, de modo geral, do estudo das *Relações métricas no triângulo retângulo*, no livro de Sangiorgi não foge a essa regra. O livro de Sangiorgi anuncia, *Com vistas ao Teorema de Pitágoras*.

**T.10 Teorema de Pitágoras (\*)**  
**Se um triângulo é retângulo, então o quadrado da medida da hipotenusa é igual à soma dos quadrados das medidas dos catetos.**

**NOTA:** Comumente, o Teorema de Pitágoras é enunciado: Num triângulo retângulo o quadrado da hipotenusa é igual à soma dos quadrados dos catetos.

H {  $\triangle ABC \mid \hat{B}$  é reto  
 T {  $b^2 = a^2 + c^2$

**DEMONSTRAÇÃO:**

Já sabemos que:

$$c^2 = bm \quad (1.^a \text{ Relação})$$

$$a^2 = bn \quad (2.^a \text{ Relação})$$

$$c^2 + a^2 = bm + bn \quad (\text{somando membro a membro})$$

ou  $c^2 + a^2 = b(m+n)$  (propriedade distributiva)

ou  $c^2 + a^2 = b \cdot b$  (porque:  $m+n=b$ )

ou  $c^2 + a^2 = b^2$  c.q.d.

Fig. 67 Teorema de Pitágoras, Sangiorgi, p. 185.

O teorema de Pitágoras é uma das conseqüências do Teorema 9, (T.9, indicação usada no livro), “a altura de um triângulo retângulo, relativa à hipotenusa, divide-o em dois triângulos retângulos, ambos semelhantes a ele” (p.183). As conseqüências do teorema da semelhança de triângulos são as relações métricas,  $c^2 = b.m$ ,  $a^2 = b.n$ ,  $h^2 = m.n$ ,  $a.c = b.h$ , que têm por base a proporcionalidade dos triângulos e o triângulo retângulo é uma conseqüência das duas primeiras.

Note que Sangiorgi apresenta o enunciado na forma *se ... então*. A redação da demonstração é esquematizada no padrão *hipótese, tese, demonstração* e também o texto dispõe bidimensionalmente uma sucessão de linhas com as afirmações e outra com as justificativas correspondentes.

E, ainda dentro do estilo apregoadado por Hérigone, no séc. XVII, a redação se caracteriza pelo uso da linguagem algébrica e pela ausência dos conectores lógicos. As justificativas se baseiam em técnicas operatórias, no caso, as propriedades das operações algébricas. Esse elemento é novo em relação ao que se viu antes. E o autor vai mostrar como essas operações são justificadas.

O encaminhamento para se chegar até às relações métricas do triângulo retângulo que são as proposições de entrada na prova do teorema de Pitágoras, tem como base a semelhança de triângulos.

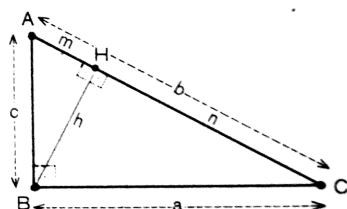
### Relações métricas no triângulo retângulo

Com vistas ao Teorema de Pitágoras

Considere o triângulo retângulo  $ABC$ , onde:

$\overline{BH}$  é a altura relativa à hipotenusa  $\overline{AC}$ , isto é,  $\overline{BH} \perp \overline{AC}$ ;

$\overline{AH}$  e  $\overline{HC}$  são os segmentos determinados pela altura  $\overline{BH}$  sobre a hipotenusa  $\overline{AC}$ .



**DEMONSTRAÇÃO:**

A altura  $\overline{BH}$  relativa à hipotenusa  $\overline{AC}$  determina os dois triângulos retângulos:  $AHB$  e  $BHC$  (ver figura da pág. 182).

Consideremos o triângulo  $AHB$  (um dos “pequenos”...) e o triângulo  $ABC$  (... o “grande”), onde:

1.  $\hat{A} \cong \hat{A}$  (propriedade reflexiva da congruência)
2.  $\hat{H} \cong \hat{B}$  (ângulos retos)
3.  $\triangle AHB \sim \triangle ABC$  (por causa de 1, 2 e o 1.º caso de semelhança: A-A)

O mesmo ocorre com os triângulos retângulos  $ABC$  (... “o grande”) e  $BHC$  (... é o outro “pequeno”), pois:

1.  $\hat{C} \cong \hat{C}$  (propriedade reflexiva da congruência)
2.  $\hat{B} \cong \hat{H}$  (ângulos retos)
3.  $\triangle ABC \sim \triangle BHC$  (por causa de 1, 2 e o 1.º caso de semelhança: A-A)

Logo:

$$\underline{\triangle AHB \sim \triangle ABC \sim \triangle BHC} \quad (\text{propriedade transitiva da semelhança})$$

c.q.d.

Fig. 68 Teorema, Sangiorgi, p. 183

Essa demonstração apresenta justificativas baseadas nas propriedades da semelhança de triângulos, em que os ângulos correspondentes são congruentes e os lados homólogos são proporcionais.

E como consequência da semelhança dos dois triângulos, se chega às relações métricas do triângulo retângulo expressas algebricamente, aquelas que foram usadas na prova do teorema de Pitágoras acima, como a seguir.

De fato, pelo T.9 temos:

$$\triangle AHB \sim \triangle ABC \implies \frac{AH}{AB} = \frac{HB}{BC} = \frac{AB}{AC} \text{ ou } \frac{m}{c} = \frac{h}{a} = \frac{c}{b}$$

Portanto:  $\frac{m}{c} = \frac{c}{b}$  e  $\frac{h}{a} = \frac{c}{b}$

ou  $\boxed{c^2 = b \cdot m} \quad (1.ª) \quad \boxed{a \cdot c = b \cdot h} \quad (4.ª)$

Fig. 69 Semelhança, Sangiorgi, p. 184

Sangiorgi apresenta as outras duas relações métricas do triângulo retângulo e ainda ressalta que se chega à interpretação métrica da semelhança de triângulos pelas relações proporcionais.

Essas relações podem ser enunciadas lembrando-se o conceito de *média proporcional*. Da 2.<sup>a</sup> série você sabe que numa *proporção contínua* (ex.:  $\frac{2}{4} = \frac{4}{8}$ ) o meio comum é denominado *média proporcional* ou *média geométrica* dos extremos (no ex.:  $4^2 = 2 \times 8$ ).

Dêsse modo as relações métricas no triângulo retângulo passam a ter a seguinte redação:

|                                                                              |                   |                                                                                                                                                  |
|------------------------------------------------------------------------------|-------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| (1. <sup>a</sup> ) $c^2 = b \cdot m$<br>(2. <sup>a</sup> ) $a^2 = b \cdot n$ | $\Leftrightarrow$ | A medida de cada cateto é média proporcional entre as medidas da hipotenusa e a de um dos segmentos determinados sobre a hipotenusa pela altura. |
| (3. <sup>a</sup> ) $h^2 = m \cdot n$                                         | $\Leftrightarrow$ | A medida da altura, relativa à hipotenusa, é média proporcional entre as medidas dos segmentos que ela determina sobre a hipotenusa.             |
| (4. <sup>a</sup> ) $a \cdot c = b \cdot h$                                   | $\Leftrightarrow$ | O produto das medidas dos catetos é igual ao produto das medidas da hipotenusa pela medida da altura relativa à hipotenusa.                      |

Fig. 70 Explicação, Sangiorgi, p. 184

Nesse mesmo capítulo, o livro tratou, no item *Razão e proporção de segmentos*, os casos de semelhança de triângulos, ressaltando que tanto a semelhança quanto a congruência são relações de equivalência porque obedecem às propriedades reflexiva, simétrica e transitiva e advertiu sobre distinguir esses dois conceitos.

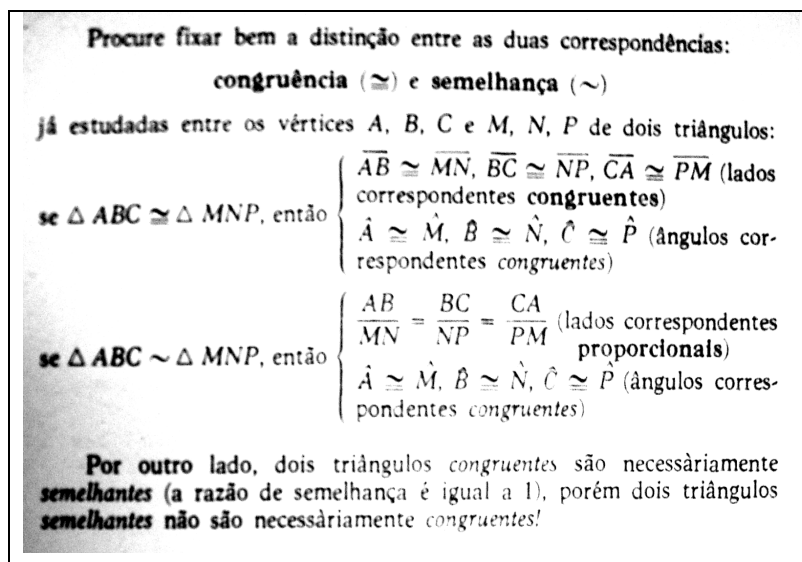


Fig. 71 Explicação, Sangiorgi, p. 155

Em nenhum outro livro a prova do teorema de Pitágoras foi apresentada em um contexto teórico que permitisse discussões conceituais mostrando a passagem do modelo geométrico euclidiano, que geometrizou a matemática, para o modelo métrico que algebrizou a geometria e, conseqüentemente, a matemática.

O teorema de Pitágoras “demonstrado por intermédio das áreas”, como anuncia o autor é antecedido pela apresentação do conceito de região poligonal e dos *Postulados* sobre áreas:

- P1. A área de um triângulo é igual à metade do produto da medida de qualquer um de seus lados pela medida da altura correspondente.
- P2. Se dois triângulos são congruentes, então as respectivas regiões triangulares têm a mesma área.
- P3. A área de uma região poligonal é a soma das áreas das regiões triangulares que a compõem. (p. 234-235)

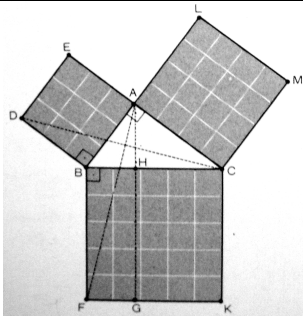
A demonstração do teorema de Pitágoras é o último dos quatro itens discutidos pelo autor no “tratamento axiomático das áreas das regiões planas”, parte inserida no *Apêndice*.

#### 4.º) Com relação ao Teorema de Pitágoras:

O Teorema de Pitágoras — que você já demonstrou ao estudar as relações métricas nos triângulos retângulos — foi enunciado por Euclides, célebre geômetra da Antiguidade, da seguinte maneira:

“O quadrado construído sobre a hipotenusa de um triângulo retângulo é igual à soma dos quadrados construídos sobre os catetos”

e demonstrado, por intermédio das áreas, assim:



Na figura, temos:  $\begin{cases} \vec{AH} \perp \vec{BC} \text{ e } \vec{AG} \parallel \vec{BF} \\ \triangle ABF \sim \triangle DBC \text{ (por qu\^e?)} \end{cases}$

e, como:  $A_{\triangle ABF} = \frac{1}{2} A_{\square BFGH} \text{ (por qu\^e?)}$

e  $A_{\triangle DBC} = \frac{1}{2} A_{\square BAED} \text{ (por qu\^e?)}$

segue-se que:  $A_{\square BFGH} = A_{\square BAED}$

Da mesma forma, prova-se que:

$$A_{\square HGKC} = A_{\square ACML}$$

Sendo:  $A_{\square BFKC} = A_{\square BFGH} + A_{\square HGKC} \quad (P3)$

vem:  $A_{\square BFKC} = A_{\square BAED} + A_{\square ACML}$

c.q.d.

Fig. 72 Teorema de Pitágoras, *Sangiorgi*, p. 239-240

Esse modo de redigir a demonstração esquematiza o desenvolvimento dedutivo da prova, deixando à vista seus passos dedutivos: mostrar que a área do triângulo é a metade da área do retângulo construído sobre a hipotenusa e da área do quadrado sobre o cateto correspondente (P. 1), portanto a área do retângulo é igual à área do quadrado; e como o quadrado construído sobre a hipotenusa é a soma dos dois retângulos que equivalem aos quadrados, chega-se à conclusão da prova.

Mostra também o equivalente geométrico, por exemplo, para a expressão algébrica da área do triângulo,  $A_{\text{Triângulo}} = \frac{1}{2} b.n. = \frac{1}{2} A_{\text{Retângulo}}$ , onde  $b$  e  $n$  são os lados do retângulo. Mas, no livro-texto, a ênfase recai usualmente no uso de fórmulas para resolver cálculos numéricos de modo que o equivalente geométrico

passa a ser trabalhado em função disso. Novamente, volta-se à questão da mudança conceitual, deixa-se a interpretação geométrica pelo seu equivalente algébrico e numérico.

Sem querer esgotar esse ponto, fica apenas a constatação de que o entendimento do rumo que a demonstração da geometria plana tomou passa centralmente por aí. E também se constata que para entender os caminhos ou *descaminhos* (considerando um consenso geral de que é preciso resgatar o estudo da geometria na escola elementar), é preciso pesquisar historicamente o desenvolvimento da geometria em conexão com o de áreas como a aritmética e a álgebra. É justamente essa correlação que se encontra no livro de Sangiorgi como em nenhum dos demais da base documental.

Voltando à demonstração acima, no modo como o autor a apresenta, há indícios de que o objetivo do estudo dedutivo da geometria é o ensino-aprendizagem, com isso a demonstração ganha um caráter didático, escolar. Observe o detalhe de deixar, pela interrogação, o pedido de resposta para dois passos justificativos da prova. Com Sangiorgi é possível concluir que demonstrar em geometria plana exige um conhecimento contextualizado da matemática, teoricamente contextualizado. É uma forma específica de operar com a teoria, por causa do desenvolvimento dedutivo da prova, que implica em um modo de raciocinar e de exposição, que exige ser praticado. Esse aspecto será explorado a seguir.

### **8.5 Estratégia didática para o ensino-aprendizagem da demonstração em livros-texto**

Em Hérigone (1634) aparece o que se pode considerar como uma evidência de estratégia didática para o ensino-aprendizagem da demonstração, a esquematização do texto, que, posteriormente, consta dos livros de matemática usados no ensino brasileiro no século XX. A esquematização do texto demonstrativo em duas colunas possibilitada por uma escrita concisa que faz uso de notações, expõe as etapas da redação euclidiana, ou seja, *hipótese, o que é pedido ou tese, preparação, demonstração e conclusão*.

Hérigone enfatiza como vantagens da esquematização do texto demonstrativo, favorecer o ensino-aprendizagem porque o texto conciso estaria



“aliviando a memória” do aprendiz, o que sugere como pressuposto o ensino-aprendizagem com base na repetição do conteúdo que se apresentava pronto no livro. Por outro lado, se percebe que a função do livro é abordar o assunto valorizando o caráter matemático, porque a esquematização também atenderia a um tratamento mais rigoroso da prova. Com a entrada das questões a resolver, já no final do século XIX, esse quadro se modifica, em parte, pelo pressuposto de que compete ao estudante realizar parte do trabalho com o conteúdo. Mas se constata que a natureza das questões presentes nos *elementos de geometria* é de caráter conteudista.

Apenas quando a atividade é o ensino-aprendizagem de como fazer uma demonstração, o procedimento dedutivo que preside o encadeamento das proposições em uma demonstração passa a ser um assunto contemplado pelo livro.

Nesse sentido, o dispositivo da esquematização surge como um recurso notável por expor as proposições e as respectivas justificativas dos passos dedutivos. Assim, o primeiro grupo de obras analisadas, os *elementos de geometria*, reúne livros-texto com estrutura dedutiva que não se ocupam com o ensino-aprendizagem da demonstração e tem a função de transmitir os conteúdos da geometria dedutiva. A didatização do tema se apresenta no *livro de matemática*, com o curso de matemática de Euclides Roxo, em 1931, e reaparece nos anos 60 com Sangiorgi.

Os livros mostram que a demonstração enquanto objeto de ensino-aprendizagem é um procedimento matemático particular, envolvendo uma redação própria que se estrutura a partir do raciocínio dedutivo e que requer conhecer as propriedades dos objetos geométricos para que novos conhecimentos sejam validados.

A grande mudança presente no *livro de matemática* pode ser resumida da seguinte maneira: o pressuposto de que saber geometria e estar apto para provar os teoremas, são coisas distintas (Herbst, 2002, p. 289).

Como essa afirmativa está explicitada no livro de Roxo e de Sangiorgi? Essa investigação vai mostrar um discurso didático sobre o ensino da geometria dedutiva, marcadamente referenciado em questões gerais levantadas por ocasião do movimento de modernização da matemática escolar, iniciado por volta do

início do século XX, que resultou na instituição do ainda existente ICMI (International Commission on Mathematical Instruction).

No prefácio do *Curso de Mathematica, 3ª série, Geometria*, de 1931, Roxo destaca que o livro foi elaborado conforme as diretrizes metodológicas baixadas pelo Ministério da Educação para todos os colégios secundários do Brasil, procurando dar continuidade ao que foi iniciado com os dois primeiros volumes publicados a partir de 1929. Ele ressalta,

O ensino se fará, assim, pela solicitação constante da atividade do aluno (methodo heurístico), de quem se procurará fazer um descobridor e não um receptor passivo de conhecimentos.

E completa dizendo que o ensino da geometria que, nos dois primeiros anos, começou com um curso intuitivo e experimental, agora é feito pela exposição formal. Finalizando, Roxo diz que poderia ter reduzido o número de teoremas demonstrados, aceitando sem provas muitos fatos, como foi feito nos livros anteriores. Mas receou parecer “demasiado inovador”, deixando a critério do professor essa decisão.

As idéias de Roxo sobre o ensino-aprendizagem da matemática têm forte base no movimento reformista acima mencionado. Em seu livro da 3ª série, de 1931, ele diz que continua a obedecer à orientação já seguida nos livros das duas séries anteriores. No primeiro volume da coleção, de 1929, Roxo apresenta um prefácio, em cinco folhas, mostrando as questões educacionais que preocupavam quem ensinava matemática. Ele transcreve trechos completos de um pronunciamento de Poincaré, de 1904, que em idéias gerais revela espanto com o fato de que a lógica, a base do nosso entendimento, esteja fora do alcance da maioria das pessoas. Sendo preocupante, em particular, a situação do aluno e do professor e sugerindo ser a história da ciência um guia para professor e aluno passarem por etapas já trilhadas por seus pais. Segundo Poincaré,

O principal objetivo do ensino de matemática é desenvolver algumas faculdades do espírito e, entre elas, a intuição não é a menos preciosa. É por ela que o mundo matemático fica em contato com o mundo real, e quando os matemáticos puros podiam ultrapassá-la sempre precisavam ter recursos para preencher o abismo entre o símbolo e a realidade. O prático sempre tem necessidade disso e para um geômetra puro deve haver cem práticos. (p. 6)

Também citando Klein, Roxo destaca que a tradição do ensino compartimentalizado da matemática em três grandes áreas, geometria, álgebra e aritmética, deve ser substituído pelo ensino integrado dessas áreas, sob o ponto de

vista de que a ciência é um todo indiviso. Devendo ser priorizada “a compreensão mais intuitiva do espaço, e em primeira linha e antes de tudo, *o desenvolvimento da idéia de função*, refundindo nella nossas representações do espaço e do numero” (p. 7). E, ainda, reforça, “as duas vozes mais que autorizadas” às quais se juntaram a de outros matemáticos repercutiram em quase todos os países do mundo, integrando uma grande corrente pela renovação pedagógica que, pode ser resumida em três grandes tendências:

1) enfatizar o aspecto psicológico, ou seja, o ensino não deve estar centrado no conteúdo, mas, antes, atender o aluno. Essa diferenciação necessária se associa com a faixa etária e, assim, se deve “começar sempre pela intuição viva e concreta e só pouco a pouco trazer ao primeiro plano os elementos logicos e adoptar, de preferencia, o methodo genetico, que permite uma penetração lenta das noções” (p. 7);

2) enfatizar as aplicações do conteúdo ensinado ao conjunto das outras disciplinas, isto é, em lugar do ensino “puramente formalistico” é preciso que o ensino seja mais “vivo e productivo” (idem);

3) subordinar o ensino da matemática à finalidade da escola moderna, quer dizer, “tornar os individuos moral e intellectualmente aptos a cooperarem na obra da civilização hodierna, essencialmente orientada para o successo pratico” (p. 7-8).

Essas três tendências e suas interações mútuas formam um quadro de características também complementares:

a) a fusão da aritmética, álgebra e geometria, incluindo a trigonometria;

b) a introdução “precocce” da noção de função que, para Klein, seria “o âmago do moderno movimento de reforma” (p. 7) e deveria ser apresentada sob a forma geométrica, sendo expressa por representações gráficas. Roxo, também reforça a importância do estudo das funções citando, Tannery, cuja transcrição torna-se relevante por mostrar que a demonstração, a geometria dedutiva, tem um lugar central nessas discussões:

Sabe-se um pouco o que é a matemática, sua extraordinária extensão, a natureza dos problemas que ela apresenta e resolve, agora, quando se sabe o que é uma função, como se estuda uma função dada, como seguem suas variações, como se representa seu passo por uma curva, como a álgebra e a geometria se ajudam mutuamente, como o número e o espaço se esclarecem um ao outro, como se determina uma tangente, uma área, um volume, como se chegou a criar novas funções, novas curvas, para estudar suas propriedades. São essas noções e esses

métodos de que se têm necessidade para ler os livros técnicos em que a matemática intervém. Eles são indispensáveis para quem quer compreender qualquer coisa no movimento científico que se acelera, nas aplicações das ciências que se multiplicam e que dia-a-dia tendem a modificar mais profundamente nosso modo de pensar e de viver.

Eles são simples e fáceis quando reduzidos ao que têm de essencial, bem mais fáceis que as demonstrações que não se teme dar aos alunos, que são longas e complicadas, que têm um ponto de alcance além do que eles comprovam. Elas devem, eu creio, entrar mais e mais no ensino elementar para o abreviar e fortificar (p. 9).

c) o abandono, em parte, da didática rígida de Euclides, introduzindo a idéia da mobilidade de cada figura;

d) a introdução, desde cedo, da noção de coordenadas da geometria analítica, em vez de “sobrepor-se como uma nova construção á parte, ao estudo já concluído da Geometria Elementar” (idem);

e) a introdução de noções de cálculo diferencial e integral, com base em métodos geométricos, “portanto intuitivos” (idem);

f) o maior desenvolvimento do ensino do desenho projetivo e da perspectiva, em conexão como o estudo da geometria elementar;

g) a introdução de recursos de laboratório como réguas graduadas, compassos, instrumentos de medir ângulos, papel milimetrado, balanças, termômetros, alavancas, planímetros, polias, aparelhos de demonstração, figuras e sólidos de vidro, de fios de seda, etc. Esses recursos aliados ao “método heurístico” permitem a experimentação auxiliando na “self-discovery”, contribuindo para dar “vivacidade e interesse ao ensino e um certo apoio concreto e, talvez, um tanto divertido, ao raciocínio do adolescente”, para o aluno “galgar o mais suavemente possível, a íngreme rampa da abstracção mathematica” (p. 10);

h) finalmente, o princípio do método histórico no desenvolvimento da matemática, que preside todos os precedentes e é pouco reconhecido e respeitado: “O educador deve fazer passar o aluno por onde tem passado seus pais, porém rapidamente e sem pular etapa. A esse respeito, a história da ciência deve ser nossa primeira guia” (p. 10).

Roxo cita reformas do ensino da matemática em países como o Japão, Rússia e Argentina que, já em 1915, com Jorge Duclot, aderira ao movimento. E relata que surgiram vários compêndios sugerindo soluções para os problemas didáticos em discussão, principalmente na Alemanha e Estados Unidos, desde o

início do século XX. Cita George Myers que dirigiu um grupo de professores, na Universidade de Chicago, desde 1903 e Breslich, quem escreveu definitivamente o compêndio que ao longo de 25 anos foi revisto por esse grupo e que Roxo diz ter sido seguido com grande sucesso por outros autores. E, essa foi a opção que ele fez também. Sendo que complementou o estudo da planimetria, “não deixando no abandono a intuição do espaço a três dimensões” como havia ressaltado Klein.

Ressalta também que, para a parte introdutória às formas espaciais, “aproveitamos muita coisa dos excellentes compendios do Prof. Behrendisen, da Universidade de Göttingen, ‘Lesebücher der Mathematik nach modernen Grundsätzen’” (p. 12). Diz que escreve um livro visando facilitar o ensino pelo método heurístico “em que se procura, tanto quanto possível, evitar o dogmatismo e levar, por meio de perguntas adequadas, o proprio estudante a descobrir os factos e a enunciar as regras e definições” (p. 12).

Pelo que se viu com as obras de Roxo, é notável a atualidade das questões didáticas de então. Além da crítica ao modelo euclidiano de matemática que se consolida em nível internacional também através dos novos livros de matemática, sendo que o caso brasileiro fica bem exemplificado com as obras desse autor. Ou seja, a crítica aos *Elementos* de Euclides, ao longo dos tempos, se incorporou tanto no desenvolvimento da matemática quanto no discurso didático sendo, portanto, um modo promissor para se pesquisar a constituição da matemática escolar.

Roxo e Sangiorgi abordam a geometria dedutiva de modo semelhante, como já se afirmou, porque se ocupam com ensinar como se faz uma demonstração. Um modo de verificar isso é pela observação dos tópicos específicos que os livros dos dois apresentam, bastando considerar o livro de Sangiorgi da 3ª e da 4ª séries e o de Roxo, da 3ª série.

Roxo apresenta os itens: A geometria dedutiva; Conjunto de proposições fundamentaes que constitue base intuitiva à Geometria deductiva: axiomas e postulados, postulado da invariabilidade, postulado da recta, axioma da divisibilidade; Os theoremas: theorema, demonstração, exemplo de demonstração; Reducção ao absurdo. Demonstração de reciprocas; Condição necessária e sufficient; Demonstração lógica.

Sangiorgi apresenta os itens: Explorando demonstrações... práticas demonstrativas; Construção lógica da geometria; Necessidade de um processo

dedutivo; Postulados e teoremas da geometria em estudo: que é postulado? que é teorema?; Primeiros teoremas, forma “se-então”; Como enfrentar uma demonstração logicamente: um plano de demonstração, demonstração esquematizada; Teorema recíproco de outro teorema; Método indireto para se demonstrar um teorema.

Uma outra evidência é o texto demonstrativo que, em ambos, ganha um caráter didático pelo recurso de interrogar o leitor, deixando a ele a tarefa de completar as passagens incompletas da marcha dedutiva.

Olhando, agora, com maior detalhe, o 3º volume do *Matemática – Curso Moderno*, de Sangiorgi, há dois capítulos dedicados ao estudo da geometria em que se pode observar a presença de um *inter-texto* que reúne um material didático para o ensino-aprendizagem de como fazer uma demonstração.

A começar pelo *Prefácio* em que o autor fala ao aluno o valor de se estudar a geometria, dizendo “as figuras geométricas – suas velhas conhecidas desde os primeiros anos da escola – quando tratadas ‘racionalmente’, constituem ótimo estímulo para a dedução de certas propriedades comuns a elas e que jamais poderiam ser aceitas se apenas as observássemos”.

Será apresentado um dos esquemas que o livro traz para caracterizar a cadeia dedutiva de uma demonstração, mas é importante saber que a demonstração sob o enfoque didático, é tratada ao longo do texto.

A última parte do 3º Capítulo se intitula *Explorando demonstrações...* e propõe logo, no início, o que o autor chama *Práticas demonstrativas*. Há exercícios que visam encaminhar o aluno de modo que ele chegue a formular propriedades dos objetos geométricos (p177- 195). A segunda parte do 4º Capítulo, *Construção lógica da geometria*, aborda o tema *Insuficiência das medidas e das observações para “provar” que uma afirmação é verdadeira*, seguindo-se os itens, *Necessidade um processo dedutivo* e *Postulados e teoremas da geometria em estudo, Que é postulado, Que é teorema?*

Após isso, há uma síntese com o enunciado dos dez postulados da geometria euclidiana. Antes de apresentá-los o autor diz,

Pode-se agora reunir, sob forma de postulados, as situações encontradas em exercícios *práticos*, principalmente as nascidas nos exercícios *exploratórios*. Tais *postulados* serão utilizados para justificar as demonstrações dos *teoremas*.



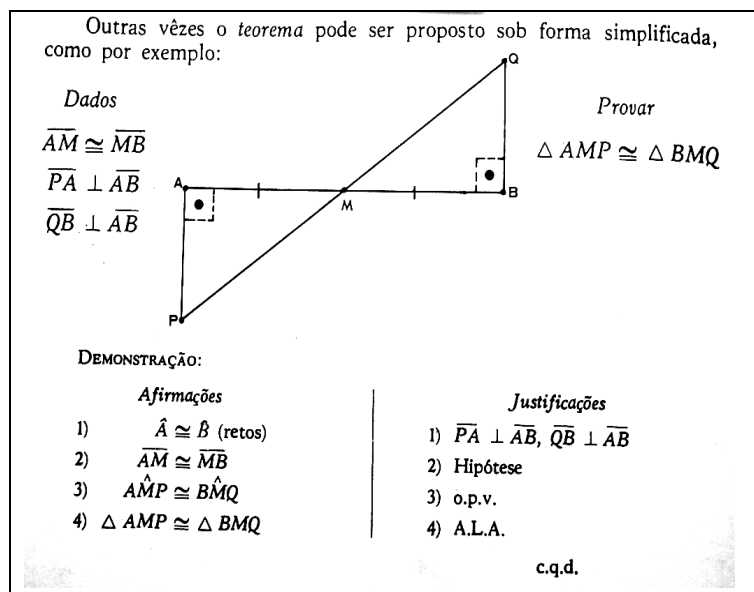


Fig. 74 Demonstração, Sangiorgi, p. 242

E para exemplificar ainda o caráter didático na obra de Sangiorgi, segue-se como é encaminhada a esquematização de um teorema.

11. Como “enfrentar” um teorema com êxito

Não há regras rígidas para se demonstrar um teorema. Pode-se, todavia, PARTINDO dos fatos dados na *hipótese* e empregando os conhecimentos advindos das *definições*, dos *postulados* e de *teoremas* já conhecidos, CHEGAR aos fatos apontados na *tese*.

Essa “caminhada” pode ser facilitada por construções auxiliares, e procurando:

- 1) escrever o teorema sob a forma “se-então” (caso ainda não esteja);
- 2) desenhar uma figura que represente os fatos contidos na hipótese e na tese (o uso de letras facilitará essa representação).

NOTA: Posteriormente, quando pela prática a hipótese e a tese forem facilmente identificadas, poderemos dispensar a forma “se-então” para os teoremas.

Fig. 75 Explicação, Sangiorgi, p. 239

Depois ele apresenta um exemplo-modelo. O enunciado em sua versão *se ... então*, também está esquematizado na forma *hipótese, tese, demonstração*.



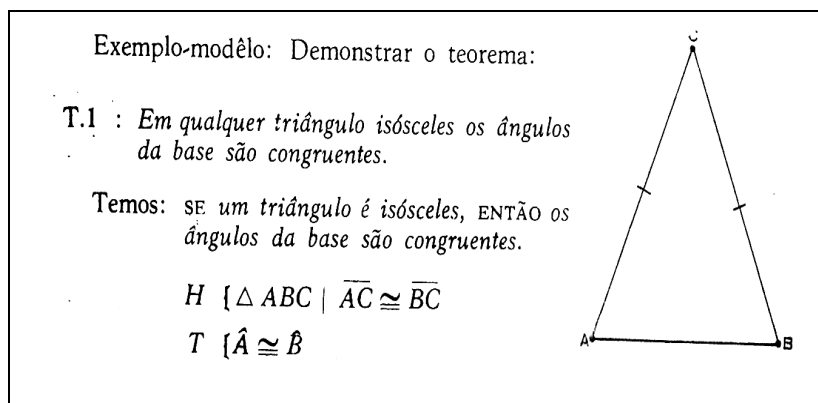


Fig. 76 Exemplo, Sangiorgi, p. 239

A seguir é exposto o plano da demonstração, atentando para o que se deve fazer com respeito à figura. O autor visa deixar claro que para escrever a demonstração é preciso traçar linhas, marcar ângulos, triângulos, etc, sobre uma figura, etapa que originalmente foi denominada *construção* no modelo demonstrativo euclidiano. Mas tudo isso deve ser feito em função do enunciado e das proposições que vão ser usadas no desenvolvimento da prova. Portanto, conhecimento teórico é exigido.

**Um plano de demonstração:** Para *provar* que os ângulos  $\hat{A}$  e  $\hat{B}$  são congruentes, basta provar que esses ângulos participam de figuras congruentes (triângulos, por exemplo; você já sabe reconhecer facilmente se são congruentes).

Nestas condições, traça-se *algum segmento*, de propriedades conhecidas, que decompõe o  $\triangle ABC$  em dois novos triângulos. Tal segmento poderá ser:

- a bissetriz relativa ao ângulo  $\hat{C}$
- ou a mediana relativa à base  $\overline{AB}$
- ou a altura relativa à base  $\overline{AB}$

Fig. 77 Explicação, Sangiorgi, p. 239

O que se observa é que, para demonstrar, é absolutamente necessário ter conhecimento do assunto em um caráter conceitual contextualizado, de modo que os conteúdos estejam contextualizados teoricamente, explorando-se o ambiente teórico onde o enunciado do teorema ganha significação. Isso remete ao ensino-aprendizagem em que os objetos geométricos estejam relacionados com figuras, as relações, operações, propriedades e definições que os caracterizam. No

exemplo acima, tem-se a seqüência, ângulos congruentes – figuras congruentes – triângulo isósceles – traçado de linhas – dois triângulos congruentes. Note que, no exemplo em discussão, traçado do segmento implica conhecer os segmentos característicos do triângulo: bissetriz, mediana e altura. E o autor explora isso.

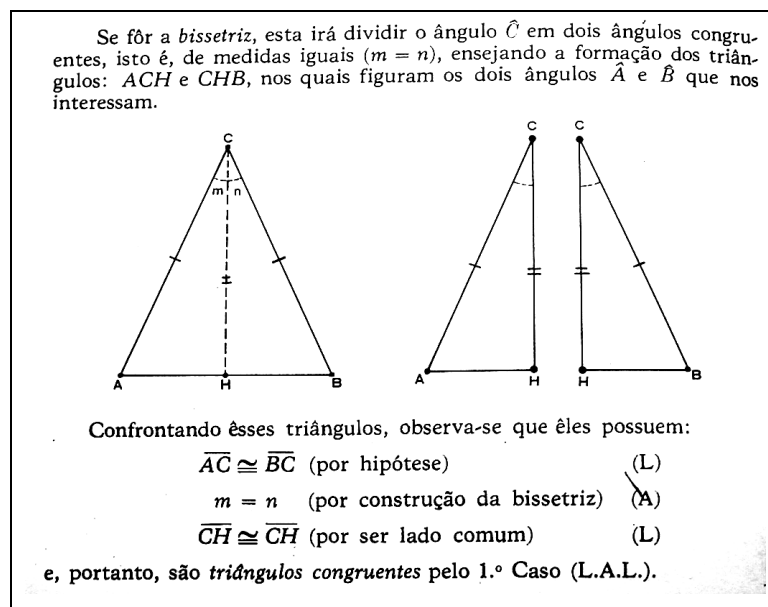


Fig. 78 Explicação, Sangiorgi, p. 239

O conhecimento exigido aqui, tem um caráter particular. Pois é preciso conhecer uma série de definições, de proposições, ou de fórmulas que as enunciem, e tomá-las em relação umas com as outras e em uma dada ordem necessária. E essa ordem e as proposições que entram na prova também não são fixas, elas dependem de todas as escolhas teóricas feitas. Por exemplo, se a escolha feita fosse traçar a altura relativa à base  $\overline{AB}$  a justificativa seria outra e autor explica,

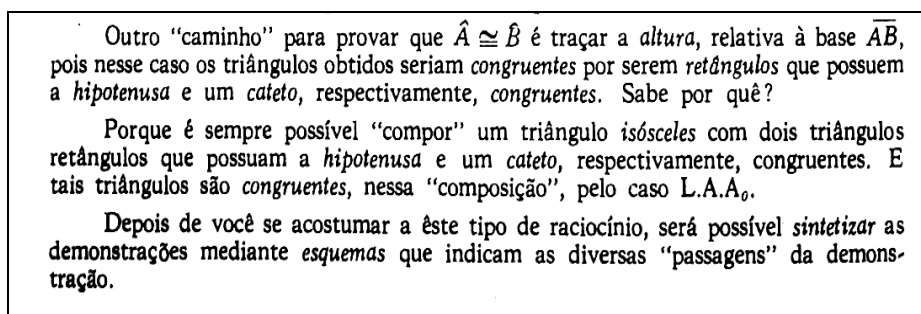


Fig. 79 Explicação, Sangiorgi, p. 240

Mas nesse caso, o resultado de um problema numérico não se alteraria justamente porque no triângulo retângulo, a mediana, a bissetriz e a altura coincidem e são representadas na figura pelo mesmo segmento  $\overline{CH}$ . Esse fato importante, suscita a reflexão sobre particularidades da abordagem métrica no estudo da geometria dedutiva.

Sangiorgi alerta para o fato de que não há receita que se possa seguir quando se trata de demonstrar. Ele apresenta a seguinte prova para o *Exemplo-modelo*, que vem sendo discutido.

Exemplo-modelo: Demonstrar o teorema:

**T.1** : *Em qualquer triângulo isósceles os ângulos da base são congruentes.*

**Temos:** SE um triângulo é isósceles, ENTÃO os ângulos da base são congruentes.

$H \{ \triangle ABC \mid \overline{AC} \cong \overline{BC} \}$   
 $T \{ \hat{A} \cong \hat{B} \}$

$H \{ \triangle ABC \mid \overline{AC} \cong \overline{BC} \}$   
 $T \{ \hat{A} \cong \hat{B} \}$

**DEMONSTRAÇÃO:**

| Afirmações                                                     | Justificações                                                                                                                                                                                                      |
|----------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 1) $\overline{CH}$ é bissetriz de $\hat{C}$ , ou seja, $m = n$ | 1) Todo ângulo admite uma bissetriz e, portanto, pode-se construir $\overline{CH}$ .                                                                                                                               |
| 2) $\triangle ACH \cong \triangle BCH$                         | 2) Caso L.A.L. $\left\{ \begin{array}{l} \overline{AC} \cong \overline{BC} \text{ (p/hipótese)} \\ m = n \text{ (p/construção)} \\ \overline{CH} \cong \overline{CH} \text{ (lado comum)} \end{array} \right. (*)$ |
| 3) $\hat{A} \cong \hat{B}$                                     | 3) Ângulos que se correspondem em triângulos congruentes                                                                                                                                                           |

c.q.d.

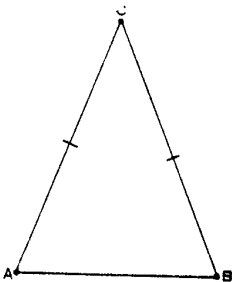


Fig. 80 Demonstração, Sangiorgi, p. 241

Observe que o texto da demonstração, acima, está esquematizado em duas colunas, expondo as afirmativas que embasam a prova com as respectivas justificativas. E, finalmente, antes de apresentar o esquema do Exemplo-modelo o autor explica como ele funciona, destacando que os passos dedutivos podem mobilizar construções geométricas, relações de equivalências, implicações.

Pode-se, também, efetuar a *demonstração* do teorema por meio de esquemas desenhados(\*\*), coloridos de preferência, onde figuram uma série de *deduções* através de *construções* ( $\rightarrow$ ), de *equivalências* ( $\Leftrightarrow$ ) e de *implicações* ( $\Rightarrow$ ), que permitem sair da hipótese e chegar à tese.

Assim, por exemplo, voltando ao teorema:

“SE um triângulo é isósceles, ENTÃO os ângulos da base são congruentes”

sua demonstração será esquematizada da seguinte maneira:

Fig.81 Explicação, Sangiorgi, p.241

O esquema dedutivo do teorema é como a seguir,

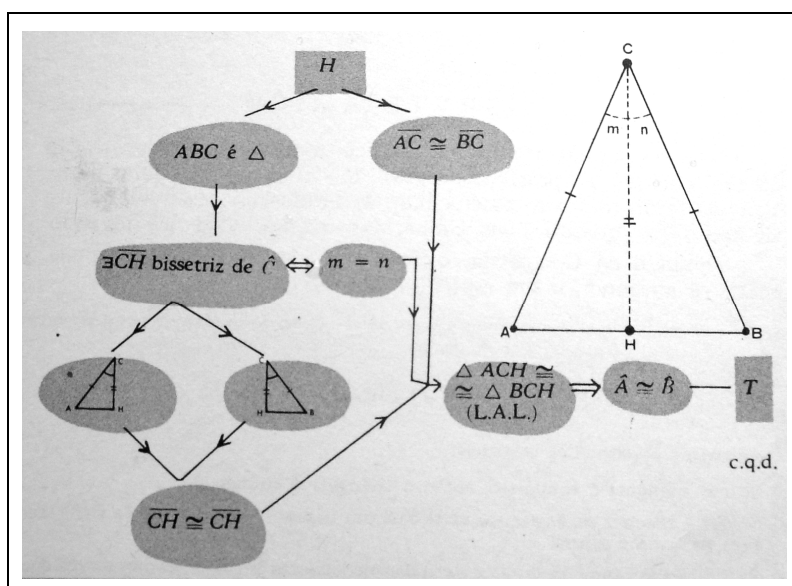


Fig. 82 Esquema, Sangiorgi, p. 241

Esse não é o único esquema de demonstração no livro e o autor, em nota de rodapé, referência a Lucienne Félix, pedagoga francesa que adota o procedimento de esquematizar os passos dedutivos da prova da demonstração.

O exemplo de texto demonstrativo didático em Sangiorgi e em Roxo tem a característica marcante de deixar em aberto passos dedutivos que o estudante deve completar, sendo que anteriormente esses conteúdos solicitados foram discutidos e constam do capítulo.

Veja primeiro o exemplo de Roxo.

**263. Theorema.** — *Toda paralela a um dos lados de um triângulo forma com os outros dois lados um triângulo semelhante ao primeiro.*

**Hypothese:** o  $\triangle ABC$  e a recta  $DE \parallel$  ao lado  $BC$  (fig. 195).

**These:**  $\triangle ADE \sim \triangle ABC$ .

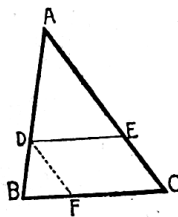


Fig. 195

**Marcha:** Mostra-se que os dois  $\triangle$  têm os  $\angle$  iguaes e os lados homologos proporcionaes.

**Demonstração:**

- |                                                                   |                                                                               |
|-------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------|
| (1) O $\angle A$ é commum aos dois $\triangle$ .                  |                                                                               |
| (2) $\angle D = \angle B$ ; $\angle E = \angle C$ .               | (2) Correspondentes das $\parallel$ s $DE$ e $BC$ com as trans. $AB$ e $AC$ . |
| (3) $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$                               | (3) Theor. 252.                                                               |
| (4) Trace $DF \parallel AC$ ; $DEFC$ é um $\square$ e $FC = DE$ . | (4) Porque ?                                                                  |
| (5) $\frac{FC}{BC} = \frac{AD}{AB}$                               | (5) Sendo $DF \parallel AC$ divide os outros dois lados na mesma razão.       |
| (6) $\therefore \frac{DE}{BC} = \frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$    | (6) Substituindo $FC$ por seu igual $DE$ .                                    |

**Conclusão:** os  $\triangle ADE$  e  $ABC$  têm os  $\angle$  iguaes e os lados homologos proporcionaes e são semelhantes.

Fig. 83 Teorema, Roxo, p. 291-192

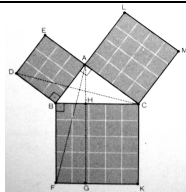
O exemplo de Sangiorgi mostra que esse autor também procede da mesma forma.

4.º) Com relação ao Teorema de Pitágoras:

O Teorema de Pitágoras — que você já demonstrou ao estudar as relações métricas nos triângulos retângulos — foi enunciado por Euclides, célebre geômetra da Antiguidade, da seguinte maneira:

“O quadrado construído sobre a hipotenusa de um triângulo retângulo é igual à soma dos quadrados construídos sobre os catetos”

e demonstrado, por intermédio das áreas, assim:



Observe que os dois textos não estão completos, deixando lugar para que o estudante justifique tais afirmativas. Também estão esquematizados, pelo uso da linguagem concisa da álgebra, nesse sentido, exemplificando a proposta de Hérigone, mas por outro lado se distanciando no que se refere ao pressuposto da atividade do aluno, mostrando que a função do livro passa a ser ensinar como se demonstra em vez de apresentar o texto completo que deve ser memorizado.

É preciso atentar para a abordagem dos conteúdos da geometria plana, nesses dois livros de matemática, pela ênfase nas propriedades, relações e operações que caracterizam um objeto geométrico, com o que se conclui que demonstrar exige um conhecimento contextualizado da matemática, teoricamente contextualizado. Por causa do desenvolvimento dedutivo da prova, demonstração é uma forma específica de operar com a teoria, uma maneira específica de raciocinar e de expor os conteúdos, que exige ser praticada.