7 A Demonstração no ensino brasileiro: os *elementos de geometria*

Os livros tipo *elementos de geometria* a serem analisados são obras representativas entre as que foram usadas no ensino brasileiro e são os seguintes,

Elementos de Geometria pelo Marquês de Paranaguá, Rio de Janeiro, Typographia Austral, 1838;

Elementos de Geometria e Trigonometria Rectilinea compilados por C. B. Ottoni, 9ª edição da Editora Francisco Alves, Rio de Janeiro, sem data (1ª ed. 1853);

Curso de Geometria por Timotheo Pereira, 2ª edição da Livraria Francisco Alves, Rio de Janeiro 1898;

Elementos de Geometria por André Perez y Marin e Carlos F. de Paula, 3ª edição da Companhia Melhoramentos de São Paulo, sem data (1ª ed. 1912);

Elementos de geometria, livro da série de publicações F.I.C. editado em Paris no ano de 1930; versão para o português de Eugenio de Barros Raja Gabaglia.

Estes são livros que foram usados no ensino brasileiro e que abordam dedutivamente a geometria plana elementar[1]. Mas, quando olhados mais particularmente mostram que não é apenas o texto demonstrativo que sofre modificações, os livros do tipo *elementos de geometria*, estruturados dentro da tradição demonstrativa euclidiana, teorema-problema, também se modificam e se diferenciam, trazendo elementos novos que compõem o buscado quadro de modificações ocorridas na demonstração.

7.1 *Elementos de geometria* de Paranaguá

Francisco Villela Barbosa (1769-1846), o primeiro Marquês de Paranaguá, nasceu no Rio de Janeiro, formou-se em matemática pela universidade de Coimbra. Teve atuação acadêmica e política em Portugal, mas voltou ao Brasil,

1 Ver Valente, 1999.

em 1822, onde construiu carreira semelhante. Seu livro tem edições em 1817, 1819 e 1837 pela Academia Real de Ciências de Lisboa, sendo editado no Brasil nos anos de 1838, versão usada neste trabalho, e em 1846 (Carvalho, 2008).

O *Prólogo* do livro de Paranaguá traz o contexto em que o livro foi publicado, justificando também esse lançamento. Segundo ele, depois de Euclides muitas geometrias foram escritas e adotadas nas escolas portuguesas, sendo o livro de Bézout usado principalmente nas escolas militares. Mas este tem sido alvo de críticas e "por isso alguns professores, assim das nossas scholas, como das de França, tem publicado suplementos, e notas a Bézout, e até reformado alguns dos seus compêndios. Entretanto o de geometria exige sem duvida mais do que todos rigorosa reforma (*)[2]".

O autor segue com o discurso didático sob o qual é preciso não deixar que os *discípulos* tenham como evidentes proposições que devem ser demonstradas. Por isso, ele lançou um livro com uma melhor ordem, buscando expor as *doutrinas* com método e clareza, apesar da dificuldade e impossibilidade de fornecer ao *mestre* todas as demonstrações e diz que se baseou na obra de Bézout[3]. (grifos meus)

Paranaguá refere um aspecto que ganha importância no conjunto das análises que vêm sendo construídas até aqui, mencionar a tensão teoria-prática como recorrente na abordagem dos conteúdos. Ele pondera a atitude de alguns que julgam a geometria um estudo que "forma o espírito da mocidade", que é "a verdadeira fonte do saber" enquanto para outros, "o que pode ter aplicação imediata aos usos mechanicos da vida, julgam para isso mais do que sufficientes os enunciados das Proposições". Ainda citando o Padre Manoel de Campos[4], reafirma que assim os verdadeiros matemáticos, ou seja, "Ingenheiros, Pilotos, e Architectos" têm uma formação artificial desprovida do valor do bem público.

As justificativas acima remetem ao já visto na primeira parte desta Tese. Note que ficam explícitas duas funções para a geometria, que são determinantes de dois modos distintos de se estudar e de se fazer uso do conhecimento geométrico: a geometria dedutiva, enquanto fonte do saber intelectual e meio de

[2] O asterisco indica a referência à Lacroix, *Essai sur l´enseignement*, 1805.

3 Valente, 1999, discorre sobre as obras de Paranaguá e Bézout e relações existente entre as duas.

4 Em 1735, Manoel de Campos fez a primeira versão de Euclides para o português, intitulada *Geometria Plana e Sólida, segundo a ordem de Euclides*, Carvalho, 2008.

formar o espírito e a geometria enquanto enunciados, cujos resultados podem ser usados diretamente em aplicações práticas sem necessidade de demonstração, mas com possíveis prejuízos intelectuais e morais.

Citando novamente Lacroix, o autor brasileiro levanta a questão da generalidade, e nesse sentido, prossegue com o que se constatou a partir de Legendre. Ele diz ter buscado o quanto lhe foi possível, no contexto da sua obra, “conservar a analogia entre as suas partes”, entre a geometria plana e a do espaço, ou seja, “proposições há, que vão transcriptas de uma Secção ás outras, com a única differença de mudar as palavras *linha* em *área*, e *área* em *volume*”.

Em Euclides, a prova do teorema de Pitágoras que consta no Livro I, tendo como base a equivalência de áreas é um caso particular da Proposição 31, do Livro VI, cuja fundamentação é a semelhança de triângulos. Com isso, Paranaguá apresenta o teorema de Pitágoras como um caso particular, da seguinte proposição,

194. THEOR. *Si se construirem tres figuras similhantes sobre os tres lados de um triangulo rectangulo, cada uma sobre cada um; a área da figura formada sobre a hypothenusa será egual á somma das áreas das figuras formadas sobre os outros dous lados.*

Seja (fig. 101) o triangulo rectangulo ABC, e o angulo recto em A. Denotem S, S', S'' as áreas das figuras similhantes construidas sobre os lados do triangulo. Digo que $S=S'+S''$.

Demonstr. Do ponto A abaixe-se sobre a hypothenusa a perpendicular AD. Represente T a área do triangulo ABC; T' a do triangulo ABD; e T'' a do triangulo ADC. Por serem similhantes estes triangulos (134); será $T : T' : T'' :: \overline{BC}^2 : \overline{AB}^2 : \overline{AC}^2$ (184). Mas tambem pela similhança das figuras é $S : S' : S'' :: \overline{BC}^2 : \overline{AB}^2 : \overline{AC}^2$ (185); logo $S : S' : S'' :: T : T' : T''$; e por conseguinte $S : S'+S'' :: T : T'+T''$. Mas é evidentemente $T=T'+T''$. Logo tambem $S=S'+S''$. (*)

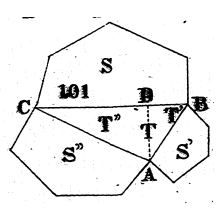


fig. 101

Fig.12 Teorema de Pitágoras, Paranaguá, p. 88

A nota ressalta,

> (*) É um caso particular deste Theorema aquella celebre proposição do quadrado da hypothenusa, a qual vem demonstrada em particular em algumas Geometrias; isto é, que a área do quadrado formado sobre a hypothenusa é egual á somma das áreas dos quadrados formados sobre os outros dous lados.

Fig. 13 Nota, Paranaguá, p. 88

A Proposição 194, acima, consta da *Segunda Secção*, no item *Da avaliação das áreas e da sua medida*. O título também anuncia um afastamento radical em relação ao modelo euclidiano, que não trata as grandezas geométricas sob o enfoque da medida.

A base da prova do teorema de Pitágoras em Paranaguá é a semelhança de figuras, verificada a partir da proporcionalidade entre áreas. Note que a estrutura da redação da demonstração mantém elementos do padrão euclidiano. Constam o *enunciado*, a *hipótese*, a *construção* e a *explicação*, sendo que a *demonstração* ganha destaque por vir nomeada, como acontece em Hérigone. A etapa da conclusão se desfaz totalmente do procedimento característico em Euclides, a repetição do que é para ser provado em sua formulação mais geral. O texto fica reduzido, com o uso da expressão algébrica indicando a proporcionalidade entre os objetos geométricos que substitui a linguagem discursiva. O texto apresenta as referências das proposições que embasam a prova.

Paranaguá não menciona a proporcionalidade dos lados que determina a semelhança dos triângulos como em Legendre. Isso mostra que a prova se desenvolve em outro contexto teórico. Ele usa a Proposição 101 que é o problema de construção, "De um ponto dado fóra de um circulo, tirar uma tangente á circunferência desse circulo" (p.39). Outra referência é a de número 134, um escólio que diz que a perpendicular tirada do vértice do ângulo reto de um triângulo retângulo sobre a hipotenusa, divide o triângulo em outros dois triângulos semelhantes entre si e o ângulo total (p. 54).

A geometria dedutiva em Paranaguá, embora dentro do padrão teorema-problema, apresenta temas ligados à aritmética, na tradição de Legendre. A razão euclidiana que compara duas grandezas de mesma espécie está associada a números que exprimem a medida das grandezas. Segundo o livro, medir a área de uma figura é determinar quantas vezes esta contém outra conhecida, a qual se considera como unidade (p. 82). A expressão abreviada de qualquer medida permite dizer que a área de um paralelogramo é avaliada pela multiplicação da base pela altura, no sentido de que se multiplica número por número.

O autor exemplifica da seguinte maneira: se *A* e *B* são, respectivamente, a altura e a base do paralelogramo cuja área se pretende avaliar, e sendo a altura *a* e a base *b* do outro paralelogramo tomado como medida ou unidade de área, esse cálculo pode ser feito, já que é possível saber quantas vezes a unidade de medida está contida no outro paralelogramo. Observe a explicação abaixo,

deste. Com effeito por ser $P : p :: B \times A : b \times a$, será $\frac{P}{p} = \frac{B}{b} \times \frac{A}{a}$: o que faz ver, que para avaliarmos a área de qualquer parallelogrammo P devemos, depois de examinar quantas vezes na sua base B se contêm a base b da unidade de área, e quantas na altura A se contêm a altura a, multiplicar esses dous quocientes, e o producto nos mostrará o numero de vezes, que a área escolhida para medida se contêm na do parallelogrammo, que se tracta de avaliar.

Como porém a medida commum das áreas, e a mais simples, é um *quadrado* conhecido, por ex. um pé quadrado, uma braça quadrada, &c. ; no caso de que por p escolhamos qualquer dessas medidas, v. gr. um pé quadrado (1^{pp}); então $\frac{P}{p} = \frac{B}{b} \times \frac{A}{a}$ se torna em $\frac{P}{1^{pp}} = \frac{B}{1^{p}} \times \frac{A}{1^{p}}$; ou $P = B \times A$: expressão abbreviada, e donde vem dizer-se geralmente:

Fig. 14 Explicação, Paranaguá, p. 83

É notável que um fato tão cotidiano como medir esteja no centro do encaminhamento que a matemática tomou, ou seja, a geometrização das grandezas, questão já discutida na Parte I desta Tese. Daqui por diante, os livros-texto vão mostrar que a proporcionalidade entre grandezas passa cada vez mais a ser vista como a expressão de proporcionalidade entre valores numéricos, associando grandeza e sua respectiva medida.

7.2 *Elementos de geometria* de Ottoni

Os *Elementos de Geometria e Trigonometria Rectilinea* compilados por Ottoni teve sua primeira edição em 1853. Foi indicado, no Colégio Pedro II, para o ensino de geometria no período 1856-1881. Conforme Valente (1999), Ottoni é uma referência importante na história da matemática escolar no Brasil, tendo feito compilações de álgebra, aritmética e geometria e o compêndio de geometria é supostamente o livro com vida mais longa. Em 1898, o livro de Timotheo Pereira substitui os *Elementos de Geometria* de Ottoni que, ao longo de anos, foi adotado no Colégio Pedro II[5]. A demonstração do teorema de Pitágoras é dada da seguinte forma por Ottoni,

4° Theorema

143. *Em todo o triangulo rectangulo o quadrado da hypothenusa é igual á somma dos quadrados dos outros dous lados.*

Entendem-se estas linhas avaliadas numericamente. Com effeito, sendo (n. 142)

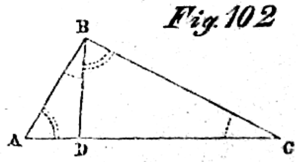
$AB^2 = AC \times AD$, $BC^2 = AC \times CD$ segue-se $AB^2 + BC^2 = AC \times AD + AC \times CD = AC\ (AD + CD) = AC \times AC = AC^2$.

Fig. 15 Teorema de Pitágoras, Ottoni, p. 141

Observe a Proposição 142 referenciada como base da prova acima,

3° Theorema

Fig. 102



142. *Se do vertice do angulo recto* B *de um triangulo rectangulo se abaixa uma perpendicular* BD *sobre a hypothenusa:*

5 Valente (1999) menciona a publicação de Ottoni de 1855, *Juízo Crítico sobre o Compendio de Geometria*, crítica ao livro de Paranaguá, depois que seu livro foi substituído pelo deste autor.

1.º *O triangulo fica dividido em dous, semelhantes entre si e ao total.*

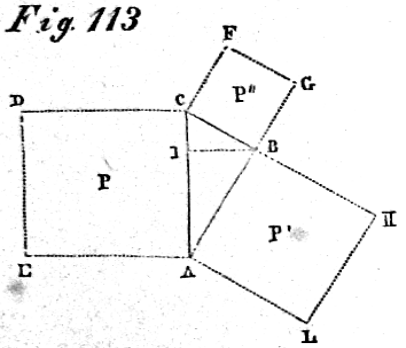
2.º *A perpendicular é a meia proporcional entre os segmentos da hypothenusa.*

3.º *Cada lado do angulo recto é meia proporcional entre a hypothenusa inteira e o segmento correspondente.*

Fig.16 Teorema, Ottoni, p. 139

A Proposição 158 que apresenta o teorema de Pitágoras, com a demonstração em que se emprega a equivalência de área, como nos livros já analisados até agora. Ottoni explica que apresenta essa prova do teorema de Pitágoras apenas por causa do método.

Fig. 113



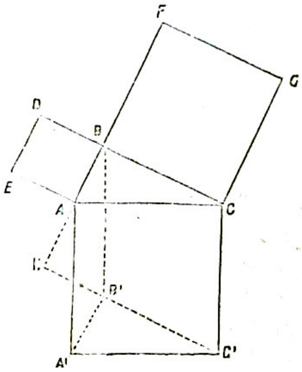
3º Theorema

158. *O quadrado construido sobre a hypothenusa* AC *de um triangulo rectangulo* ABC *tem area igual á somma das areas dos quadrados construidos sobre os outros lados* AB, BC.

Por nos parecer conveniente sob o ponto de vista do methodo apresentamos aqui uma das demonstrações geometricas do presente theorema, que nos pareceu a mais simples.

Seja (fig. 113 a) o triangulo ABC rectangulo em B : sobre os lados do angulo recto e hypothenusa construam-se os respectivos quadrados.

Do ponto B baixe-se a perpendicular BB' sobre AC e faça-se BB' = C' = AA'; trace-se A'B' e B'C' : o triangulo A'B'C' será igual a ABC por terem elles os tres lados iguaes.



Se do polygono ABCC'A' se tiram os triangulos ABC e A'B'C', alter nativamente, os respectivos restos serão, o quadrado construido sobr a hypothenusa ou a somma dos parallelogrammos A'B'BA e B'C'C que têm por base os lados do angulo recto; portanto a área do qua drado é igual à somma das áreas destes parallelogrammos : mas, pro longando AB até encontrar o prolongamento B'H de B'C' o triangul BHB' será rectangulo em H e igual ao triangulo ABC por ser BB' = AC por construcção e iguaes os angulos adjacentes a estes lados e por tanto HB' altura do parallelogrammo A'B'BA será igual a AB, altur do quadrado ABDE e base commum : assim o parallelogrammo e quadrado são equivalentes, o que se demonstraria do mesmo mod para o parallelogrammo B'C'CB e o quadrado BCGF; logo sendo A'C'CA = A'B'BA + B'C'CB será tambem

A'C'CA = ABDE + BCGF.

Fig. 17 Teorema de Pitágoras, Ottoni, p. 152-153

Nesse contexto, surgem as perguntas: Qual das duas proposições não corresponde ao teorema de Pitágoras? Elas são equivalentes? O próprio autor responde se referindo ao teorema 143, como consta um pouco acima,

> Este theorema não differe do do n. 143 senão em que o actual se refere ás áreas dos quadrados como grandezas geométricas, quando o outro é relativo aos quadrados ou segundas potencias dos valores numéricos da hypothenusa e dos lados. Porém, como as segundas potencias AB^2, BC^2, AC^2, são a medida das áreas dos quadrados ABHL, BCFG, ACDE, póde-se concluir ACDE = ABHL + BCFG, ficando demonstrado o theorema do qual derivam importantes corollarios. (p. 152-153)

O texto de Ottoni torna explícito qual encaminhamento vai sendo priorizado na demonstração do teorema de Pitágoras, indicando que a barreira entre número e grandeza, característica da matemática grega antiga, vai sendo vencida. Com isso, os números, concebidos como números reais enquanto medida das grandezas, passam a fornecer provas alternativas para as propriedades das figuras geométricas planas. Com respeito ao teorema de Pitágoras, o que ao longo de séculos foi concebido como o quadrado construído sobre o lado do triângulo, passa a ser equivalente ao valor numérico atribuído como medida ao lado do triângulo, elevado à segunda potência. Ou seja, quadrado de lado a pode ser representado numericamente por a^2 ou vice-versa.

Considerando a estrutura da redação do teorema 143, tem-se um caso típico de demonstração sem o uso da linguagem discursiva, ou seja, a prova algébrica, que se justifica porque as linhas, os lados do triângulo são considerados numericamente.

No texto da prova consta o enunciado e o aspecto central da metodologia usada, o caráter numérico atribuído aos lados da figura, informação seguida pela referência à Proposição 142. O que se nota no encaminhamento das provas algébricas é a concisão do texto e a possibilidade de operar com igualdades algébricas gerais. Nesse sentido, Ramus e Arnauld, com suas críticas ao modelo matemático euclidiano, defendiam as alternativas possíveis ao modelo geométrico euclidiano de grandezas.

O método de prova em Ottoni, a saber, o uso das relações proporcionais e as linhas consideradas numericamente, permitiram as seguintes operações,

AC : AB :: AB : AD que resulta em $AB^2 = AC \times AD$

AC : BC :: BC : CD que resulta em $BC^2 = AC \times CD$

segue-se que

$AB^2 + BC^2 = AC \times AD + AC \times CD = AC\,(AD + CD) = AC \times AC = AC^2$

O contexto algébrico dessa prova indica a possibilidade de operar com independência em relação a formas geométricas, logo, em relação a uma figura ou a uma grandeza específica, o que significa um caráter mais geral. As propriedades das figuras geométricas planas vão sendo expressas algebricamente e, assim, as grandezas perdem sua especificidade no contexto das identidades e relações do simbolismo algébrico que permite novos tipos de operações e de abstrações. O estudo das mudanças ocorridas na demonstração da geometria plana elementar está se mostrando um meio de entender como o livro-texto e a matemática escolar vai se afastando do modelo geométrico e tornando-se cada vez mais algebrizada e aritmetizada.

7.3 *Curso de geometria* de Timotheo Pereira

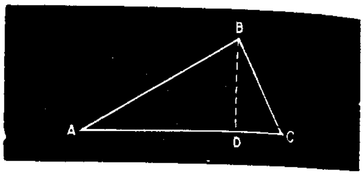
O *Curso de Geometria* de Timotheo Pereira, 2ª de edição de 1898, foi o livro indicado para substituir o de Ottoni, no Colégio Pedro II, conforme o *Programma de ensino para o anno de 1898* (Beltrame, idem, p.192).

A demonstração do teorema de Pitágoras, pela semelhança, consta do *Livro Segundo*, *Da extensão em um plano*, no item *Outros theoremas e propriedades dos triângulos*, que sucede o estudo dos polígonos semelhantes. Ilustra bem o tratamento aritmético das grandezas, ou seja, operar com objetos geométricos aos quais estão associados o valor numérico que expressa suas respectivas medidas.

206. THEOREMA: *Em todo triangulo rectangulo, o quadrado da hypothenusa é igual a somma dos quadrados dos cathetos**.*

Seja ABC um triangulo rectangulo em B, vamos provar que o quadrado do numero que exprime o comprimento do lado AC é igual á somma dos quadrados dos numeros que exprimem os comprimentos dos dous lados.

These : $AC^2 = AB^2 + BC^2$



Baixemos do vertice do angulo recto uma perpendicular sobre a hypothenusa seja BD esta perpendicular : Ora acabamos de ver no theorema anterior (3º) que quando do vertice do angulo recto de um triangulo rectangulo se baixa uma perpendicular sobre a hypothenusa, cada lado do angulo recto é meia proporcional entre a hypothenusa inteira e a sua projecção sobre ella; logo temos

$\frac{AC}{AB} = \frac{AB}{DA}$ para o lado AB

e $\frac{AC}{BC} = \frac{BC}{DC}$ para o lado BC

e como o producto dos extremos é igual ao dos meios resulta

$AC \times DA = AB^2$ para a primeira proporção.

e $AC \times DC = BC^2$ para a segunda proporção.

Sommando membro a membro estas duas igualdades, resulta, pondo AC em evidencia,

$$AC\,(DA + DC) = AB^2 + BC^2$$

porém vemos na figura que $DA + DC = AC$ logo substituindo fica

$$AC \times AC = AB^2 + AC^2$$

ou

$$AC^2 = AB^2 + AC^2$$

** Este enunciado suppõe as linhas avaliadas numericamente e então elle equivale ao seguinte : Em todo triangulo rectangulo, o quadrado do *numero* que exprime o comprimento da hypothenusa, é igual á somma dos quadrados dos *numeros* que exprimem os comprimentos dos dous cathetos. O enunciado do texto tem a vantagem de ser mais laconico e nós o empregaremos, porem *sempre* com o sentido que lhe dâmos n'esta nota a menos que não advirtamos do contrario

Fig. 18 Teorema de Pitágoras, Timotheo Pereira, p.151-152

A estrutura da redação, acima, destaca o *enunciado* e a *tese* do teorema. O segundo parágrafo reúne a *exposição* e a *hipótese*. A *explicação*, etapa em que se escreve a conclusão do teorema vem designada como tese e aparece em destaque. Esse procedimento consta em outros livros mais recentes. O autor reescreve a proposição que fundamenta a prova, sem citar qualquer referência. A conclusão se completa apenas com a repetição da tese. Observa-se também que a proporcionalidade entre os lados dos triângulos, indicada algebricamente, permite chegar à conclusão final do teorema com o uso de propriedades operacionais das proporções. Há uma característica marcante no uso da linguagem, em Thimoteo: por exemplo, em Legendre consta, abaixe-se do ângulo reto sobre a hipotenusa a perpendicular, enquanto Timotheo escreve, baixemos do ângulo recto uma perpendicular sobre a hipotenusa. Barbin (2001, p. 92) se refere a esta última maneira de expressar como "o uso performático do verbo".

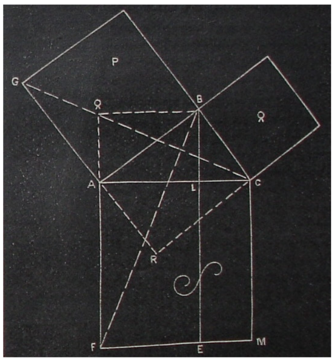
A outra demonstração do teorema de Pitágoras, pela equivalência de áreas, consta do item *Avaliação e comparação das áreas*, do *Livro Segundo*. Note que não há nenhuma referência nos dois textos demonstrativos de Timotheo Pereira, ao contrário do que se viu até agora e o enunciado abaixo vai afirmar, a área do quadrado construído sobre a hipotenusa e não o quadrado da hipotenusa, como mencionado na proposição anterior.

277. THEOREMA : *A area do quadrado construido sobre a hypothenusa de um triangulo rectangulo é equivalente a somma das areas dos quadrados construidos sobre os cathetos.*

Este theorema não é mais do que a expressão geometrica do numero 206; vamos porém demonstral-o directamente

Seja ABC um triangulo rectangulo, construamos um quadrado sobre a hypothenusa como lado chamaremos S a area d'este quadrado; construamos sobre cada um dos cathetos, como lados, dous quadrados cujas areas chamaremos P e Q, trata-se de demonstrar que a area do quadrado S é equivalente a somma das areas P e Q.

Baixemos do ponto B uma perpendicular sobre AC, e prolonguemol-a até encontrar FM seja BLE, fica o quadrado AM decomposto em dous rectangulos ALEF e LCMF; vamos provar que estes dous rectangulos são respectivamente equivalentes aos quadrados P e Q.



tes aos quadrados P e Q.
Liguemos o ponto B ao ponto F e o ponto G ao ponto C; os dous triangu-
los GAC e BAF são iguaes porque têm dous lados respectivamente iguaes e
igual o angulo por elles formado, a saber o lado AC igual a AF como lados
de um quadrado, o lado AG igual a AB tambem como lados de um quadra-
do, o angulo GAC igual ao angulo BAF porque estes angulos constão cada
um de um angulo recto e de uma parte commum a saber

$$\wedge\ GAC = \wedge\ GAB + \wedge\ BAC = 1r + \wedge\ BAC$$
e
$$\wedge\ BAF = \wedge\ CAF + \wedge\ BAC = 1r + \wedge\ BAC$$

logo os dous triangulos são iguaes.
Comparando o triangulo GAC com o quadrado P, e tomando para base
commum o lado GA, a altura do triangulo será CR que é igual a AB como
partes de parallelas comprehendidas entre parallelas; logo o quadrado P e
o triangulo GAC têm a mesma base e a mesma altura, ora sabemos que
a area do triangulo n'estas condições é equivalente a metade da area do
quadrado P.
Comparando o triangulo BAF com o rectangulo AE; tomando para base
commum o lado AF, a altura do triangulo será BQ que é igual á altura LA
do rectangulo AE; logo este e o triangulo BAF têm a mesma base e a mes-
ma altura e como consequencia, a area do triangulo é equivalente á metade
da do rectangulo AE, mas os dous triangulos GAC e BAF são iguaes logo
a metade da area do quadrado P será equivalente a metade da area do rec-
tangulo AE, ora é claro que as metades das areas sendo equivalentes as
proprias areas o serão e portanto a area do quadrado P é equivalente a area
do rectangulo AE.
Do mesmo modo se prova que a area do quadrado Q é equivalente a do
rectangulo LM.
Ora a area dos dous rectangulos AE e LM é equivalente á somma das
areas dos dous quadrados P e Q e como a area dos dous rectangulos é
o mesmo que a do quadrado S, ficará sendo esta equivalente a somma das
areas dos quadrados P e Q.

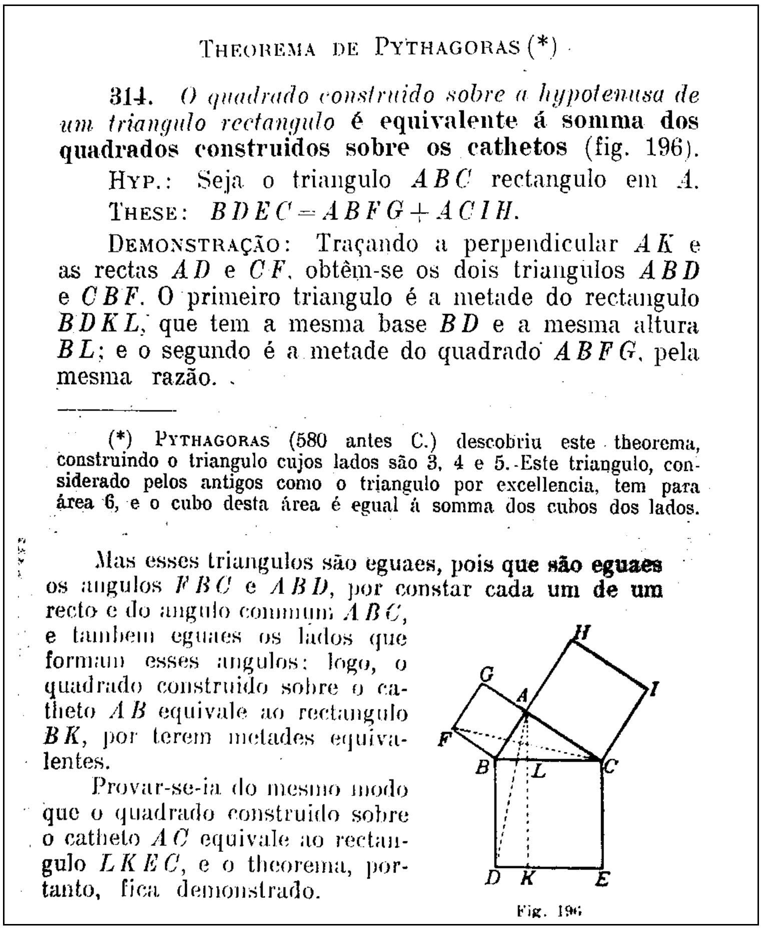
Fig. 19 Teorema de Pitágoras, Timotheo Pereira, p.207-208

Os *elementos de geometria* analisados até agora, são livros que trazem os teoremas e problemas indexados, viabilizando referenciar as proposições que fundamentam a prova, mas no caso da obra de Timotheo, em relação às anteriores, ela se particulariza por trazer uma lista de *Exercícios numéricos*, ao final de cada Seção. O próprio nome deixa claro que tipo de atividade o livro propõe ao estudante, como exemplifica o exercício número 8: "pede-se a área de um triangulo regular cujo lado é 30 ^{m}" (p. 221). A presença do exercício já indica que o livro escolar de geometria dedutiva também sofre modificações em sua estrutura, mostrando como as definições e proposições da geometria plana passam a ter aplicações em cálculos numéricos.

7.4. *Elementos de geometria* de Perez y Marin e Paula

Os autores Perez y Marin e Paula foram catedráticos do Ginásio do Estado, em Campinas. O exemplar usado nesta pesquisa é uma terceira edição, não datada, que contém apenas um prefácio à primeira edição, de 1912. A obra indica pontos de aproximação com o livro lançado por Roxo no final dos anos 20 e será analisada antes de todas as outras. No quadro geral das obras analisadas, esse livro-texto intercala a estrutura dedutiva, teorema-problema e outros fatores que inovam o texto escolar, como as notas explicativas e históricas, os exercícios, estes, como já se mostrou, aparecem pela primeira vez em Timotheo Pereira.

O livro-texto de Perez y Marin agrupa os conteúdos em dois grandes temas, Geometria plana e Geometria no espaço, cada um deles apresentando três partes que se subdividem em capítulos. O desenvolvimento da prova do teorema de Pitágoras, pelo método da equivalência de áreas, consta no *Capítulo Terceiro*, *Comparação de Áreas*, da *Terceira Parte* dos estudos de geometria plana.


THEOREMA DE PYTHAGORAS (*)

314. *O quadrado construido sobre a hypotenusa de um triangulo rectangulo* **é equivalente á somma dos quadrados construidos sobre os cathetos** (fig. 196).

HYP.: Seja o triangulo ABC rectangulo em A.

THESE: $BDEC = ABFG + ACIH$.

DEMONSTRAÇÃO: Traçando a perpendicular AK e as rectas AD e CF, obtêm-se os dois triangulos ABD e CBF. O primeiro triangulo é a metade do rectangulo $BDKL$, que tem a mesma base BD e a mesma altura BL; e o segundo é a metade do quadrado $ABFG$, pela mesma razão.

(*) PYTHAGORAS (580 antes C.) descobriu este theorema, construindo o triangulo cujos lados são 3, 4 e 5. Este triangulo, considerado pelos antigos como o triangulo por excellencia, tem para área 6, e o cubo desta área é egual á somma dos cubos dos lados.

Mas esses triangulos são eguaes, pois **que são eguaes** os angulos FBC e ABD, por constar cada **um de um** recto e do angulo commum ABC, e tambem eguaes os lados que formam esses angulos: logo, o quadrado construido sobre o catheto AB equivale ao rectangulo BK, por terem metades equivalentes.

Provar-se-ia do mesmo modo que o quadrado construido sobre o catheto AC equivale ao rectangulo $LKEC$, e o theorema, portanto, fica demonstrado.

Fig. 196

Fig. 20 Teorema de Pitágoras, Perez y Marin e Paula, p. 170.

Em relação aos outros livros analisados, a estrutura da redação tem um caráter mais esquematizado. Em Paranaguá se destaca apenas a etapa

Demonstração, em Timotheo Pereira a etapa *These*, enquanto em Perez y Marin e Paula constam as três etapas *Hypothese*, *These* e *Demonstração*, característica que aparece em livros bem mais recentes, dos anos 90. Mas, no *Elementos de Geometria*, F. I. C., 1933, a redação do texto não é esquematizada, mostrando que o período final do século XIX e primeiras décadas do século XX foi, de fato, um tempo de mudanças no livro-texto de geometria pela convivência do novo e do antigo.

A nota histórica inserida no texto do teorema provoca o leitor para um teste numérico, o que se repete com certa freqüência ao longo de cada capítulo, mantendo o caráter episódico de associar nomes, fatos e datas.

Após o teorema de Pitágoras, consta o corolário "se sobre os três lados de um triangulo rectangulo, considerados como lados homólogos, se constroem três figuras semelhantes, a figura construída sobre a hypotenusa é equivalente á somma das outras duas construidas sobre os cathetos" (p. 171), que é um caso mais geral exemplificado pelos autores com as *Lunnulas de Hypocrates*, sem no entanto ter sido explicitado esse aspecto.

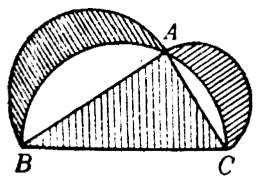


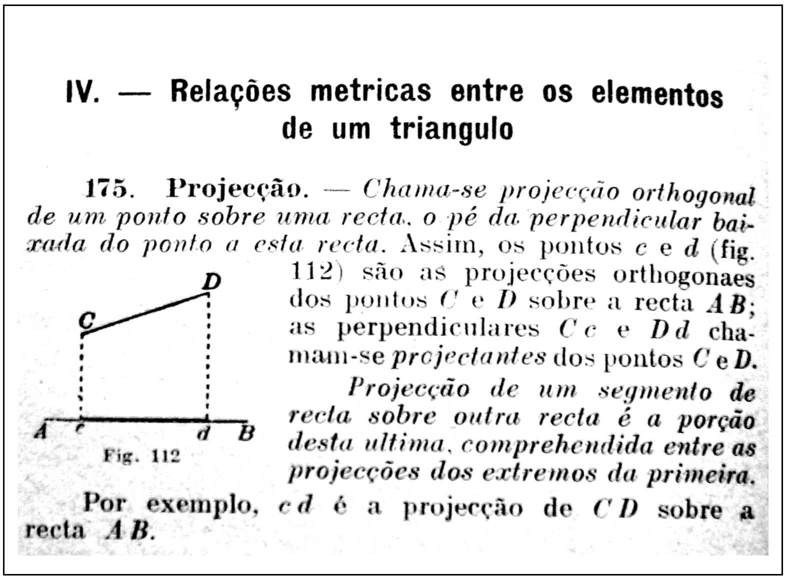
Fig. 197

316. Lunulas de Hyppocrates (*). — Na fig. 197 o semicirculo construido sobre a hypotenusa será equivalente á somma dos construidos sobre os cathetos. Mas, si do primeiro se subtraem os dois segmentos, fica a área do triangulo ABC; e, subtrahindo os mesmos segmentos dos outros dois semi-circulos, ficam as lunulas; logo, a área do triangulo é egual á somma das áreas das duas lunulas.

(*) HIPPOCRATES de Chios (— V sec.), que não se deve confundir com o celebre medico de egual nome, deu a primeira quadratura de uma figura curvilinea.

Fig. 21 Lúnulas de Hipócrates, Perez y Marin e Paula, p. 171

Como nos outros livros de autores brasileiros já analisados, Perez y Marin e Paula apresentam mais uma prova do teorema de Pitágoras, incluída na parte relativa aos estudos da geometria plana, *Capítulo Terceiro*, *Linhas proporcionaes e semelhança dos polygonos*, que está subdividido em várias partes. No item, *Relações métricas entre os elementos de um triangulo*, consta a prova do teorema de Pitágoras pelo método da semelhança quando o autor apresenta o conceito de projeção ortogonal.



IV. — Relações metricas entre os elementos de um triangulo

175. Projecção. — *Chama-se projecção orthogonal de um ponto sobre uma recta, o pé da perpendicular baixada do ponto a esta recta.* Assim, os pontos *c* e *d* (fig. 112) são as projecções orthogonaes dos pontos *C* e *D* sobre a recta *AB*; as perpendiculares *Cc* e *Dd* chamam-se *projectantes* dos pontos *C* e *D*.

Fig. 112

Projecção de um segmento de recta sobre outra recta é a porção desta ultima, comprehendida entre as projecções dos extremos da primeira.

Por exemplo, *cd* é a projecção de *CD* sobre a recta *AB*.

Fig. 22 Projeção ortogonal, Perez y Marin e Paula, p. 90

Logo depois, segue-se a proposição,

> Se do vértice do ângulo recto de um triangulo rectangulo se baixa uma perpendicular á hypotenusa verifica-se:
>
> 1º O triangulo proposto fica dividido em dois triângulos semelhantes entre si, e semelhantes ao total.
> 2º A perpendicular é media proporcional entre os dois segmentos que ella determina sobre a hyupotenusa.
> 3º Cada catheto é media proporcional entre sua projecção sobre a hypotenusa e a hypotenusa inteira.
> 4º O quadrado da hypotenusa é igual á soma dos quadrados dos cathetos.
> 5º Os quadrados dos três lados são proporcionaes ás projecções dos mesmos lados sobre a hypotenusa (fig. 113). (p. 90-91)

O caso número 5 é um elemento novo na abordagem das relações métricas do triângulo retângulo e será encontrada também em livros como F. I. C. e Roxo. O caso número 4, o teorema de Pitágoras é demonstrado como a seguir, Com effeito: 1.º O triangulo ACD é rectangulo como o proposto, e o angulo C é commum aos dois triangulos; logo, são equiangulos e, por conseguinte, semelhantes. Analogamente se demonstra a semelhança dos triangulos ABD e ABC.

Os dois triangulos parciaes são, pois, semelhantes ao total e, portanto, semelhantes entre si.

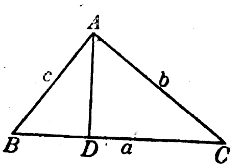


Fig. 113

2.º Da semelhança dos triangulos parciaes, temos:

$$\frac{DC}{AD} = \frac{AD}{BD}, \text{ donde } \overline{AD}^2 = DC \times BD.$$

3.º A semelhança do triangulo proposto com cada um dos parciaes dá:

$$\left.\begin{aligned} \frac{BC}{AC} &= \frac{AC}{DC} \\ \frac{BC}{AB} &= \frac{AB}{BD} \end{aligned}\right| \text{ donde } \left|\begin{aligned} \overline{AC}^2 &= BC \times DC \\ \overline{AB}^2 &= BC \times BD. \end{aligned}\right.$$

4.º Sommando as duas ultimas egualdades, vem:

$\overline{AC}^2 + \overline{AB}^2 = BC\,(DC + BD)$; mas, $BD + DC = BC$; logo:

$$\overline{AC}^2 + \overline{AB}^2 = \overline{BC}^2, \text{ isto é, } a^2 = b^2 + c^2.$$

5.º Das egualdades:

$\overline{AC}^2 = BC \times DC$; $\overline{AB}^2 = BC \times BD$, e $\overline{BC}^2 = BC \times BC$, tira-se:

$$\frac{\overline{AC}^2}{CD} = \frac{\overline{AB}^2}{BD} = \frac{\overline{BC}^2}{BC}, \text{ como se queria demonstrar.}$$

Fig. 23 Teorema de Pitágoras, Perez y Marin e Paula, p. 91-92

Como se pode notar na demonstração acima, com respeito ao padrão euclidiano, o desenvolvimento se baseia no método da semelhança, mas tem um caráter algébrico e se modifica também por não haver referência às proposições que embasam as conclusões que também deixam de ser marcadas discursivamente e a redação da prova não está esquematizada no modelo tese, hipótese, demonstração. A escrita com equações vai englobar esse discurso no sentido de que as propriedades das figuras geométricas passam a ser associadas a fórmulas.

Quando relações como, *ser igual a*, ou operações como *adicionar*, que relacionam os objetos geométricos, são expressas não discursivamente mas com o uso dos símbolos algébricos, a prova torna-se mais independente da figura na medida em que se opera com as igualdades da equação. Conceitualmente, isso significa que se opera com grandezas e com relações entre grandezas em um sentido mais geral, estas podem ser ou numéricas ou geométricas.

7.5. *Elementos de Geometria* F.I.C.

A série de livros da coleção F. I. C. surgiu nas escolas da congregação *Frères de l'Instruction Chrétienne*, e segundo Carvalho (2008) essa obra tem origem em 1660, na tradição de geometrias que resultaram da releitura dos *Elementos* de Euclides[6]. No período 1923-1931, essa obra é indicada no Colégio Pedro II (Beltrame, 2000). A obra está marcada pela estrutura dedutiva teorema-problema, cada livro tem início com as definições ao que se segue a série de proposições acompanhadas das respectivas provas. Embora o exemplar da base documental date de 1933, ele será analisado antes do livro de Roxo, de 1931. Isso, porque, o livro de Roxo é uma obra inovadora em relação aos tradicionais *elementos de geometria*, dos quais a geometria F.I.C. é uma referência por excelência. Por outro lado, esse fato mostra a convivência de tipos variados de livros, considerando que a geometria F.I.C. teve edição brasileira até os anos 50, pelo que eu sei, 13ª ed. de 1953.

A geometria F.I.C. mostra que o padrão dedutivo teorema-problema presente nos *elementos de geometria* está ainda mais mesclado com fatores novos, como tipos variados de questões propostas e o formulário, itens que a indexação numérica que percorre todo o livro registra. O livro se caracteriza por trazer problemas que são aplicações práticas dos teoremas como ressalta Carvalho (2008) e Valente (1999), confirmando uma tendência que já aparece em Perez y Marin e Paula. Os itens aumentam em quantidade e variedade.

A prova do teorema de Pitágoras com o uso da semelhança de figuras, consta no *Livro III*: *Figuras semelhantes*, no item, *VI – Relações numericas das linhas nos triângulos*.

Preliminarmente, o livro apresenta as definições que associam segmento de reta e medida numérica,

> 245. Chama-se *quadrado* de uma linha o quadrado do numero que exprime o comprimento d'essa linha.

---

6 Ver: Valente, 1999.

Chama-se *somma*, *differença*, *producto*, *quociente* ou *razão* de duas linhas, a somma, a differença, o producto, o quociente ou razão, dos números que exprimem os comprimentos d'essas linhas com relação á mesma unidade. (p. 103)

A definição de projeção repete o que já se viu com Perez y Marin e Paula, se não fosse o item que vem logo em seguida, uma pequena observação sobre o estudo das relações numéricas e o uso das "fórmulas" algébricas[7].

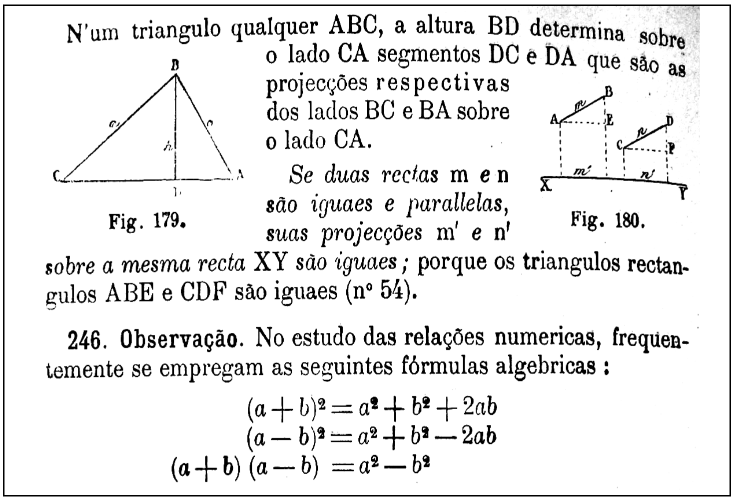

N'um triangulo qualquer ABC, a altura BD determina sobre o lado CA segmentos DC e DA que são as projecções respectivas dos lados BC e BA sobre o lado CA.

Fig. 179.

Se duas rectas m *e* n *são iguaes e parallelas, suas projecções* m' *e* n' *sobre a mesma recta* XY *são iguaes;* porque os triangulos rectangulos ABE e CDF são iguaes (nº 54).

Fig. 180.

246. Observação. No estudo das relações numericas, frequentemente se empregam as seguintes fórmulas algebricas:

$$(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$$
$$(a-b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab$$
$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

Fig. 24 Observação, *Elementos de Geometria*, F.I.C., p. 104

A referência (*nº 54*) leva à seguinte proposição, "dois triângulos rectangulos são iguaes quando têm a hypotenusa igual e um ângulo agudo igual" (p. 14).

A prova do teorema de Pitágoras é encaminhada a partir do conceito de média proporcional entre segmentos que, no caso do triângulo retângulo, estabelece a relação entre altura e projeção dos lados que formam o ângulo reto sobre a hipotenusa.

7 Note que o livro designa por fórmula algébrica o que corresponde à identidade algébrica Essa imprecisão de linguagem encontra-se nos *elementos de geometria*.

Theorema.

247. *N'um triangulo rectangulo :*

1° *Cada lado do angulo recto é media proporcional entre sua projecção sobre a hypotenusa e a hypotenusa inteira;*

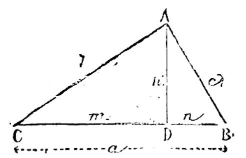


Fig. 181.

2° *A altura é media proporcional entre os dois segmentos que ella determina sobre a hypotenusa.*

Seja ABC um triangulo rectangulo, e seja AD a perpendicular abaixada do vertice do angulo recto sobre a hypothenusa

1.° Os triangulos rectangulos CAB e CDA são semelhantes por terem um angulo agudo commum C (n° 224); podemos pois dizer (n° 220)

a, hypotenusa do primeiro triangulo, está para b, hypotenusa do segundo, como b, opposto ao angulo B no primeiro triangulo, está para m, seu homologo no segundo :

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{m}$$

Assim tambem, os triangulos CAB e ADB são semelhantes, e dão :

$$\frac{a}{c} = \frac{c}{n}$$

2.° Os triangulos CDA e ADB, semelhantes cada um a CAB, são semelhantes entre si, e dão a proporção

$$\frac{m}{h} = \frac{h}{n}$$

Logo...

Fig. 25 Teorema, *Elementos de Geometria*, F. I. C., p. 105

As referências (*nº 224*) e (*nº 220*) estabelecem a justificativa da prova, ou seja, a semelhança dos dois triângulos.

> 220. Chamam-se polygonos semelhantes os que têm os ângulos respectivamente iguaes, e os lados homologos proporcionaes. (p. 92).
>
> 224. Dois triângulos retângulos são semelhantes quando têm um angulo agudo igual. (p. 94)

É importante ressaltar que, posteriormente, no livro dos anos 50, o autor Maeder faz uso do conceito de semelhança de dois triângulos retângulos, sem que a proporcionalidade dos lados homólogos seja referida. Nesse aspecto, a abordagem da geometria F. I. C. e a de Maeder têm uma correlação direta, indicativa de que o estudo dedutivo da geometria deixa de ser alvo do ensino-aprendizagem, pela ausência das justificativas que concluem os passos dedutivos da demonstração.

Voltando ao teorema, chega-se à expressão do que se conhece hoje como relações métricas no triângulo, como mostra o *Escholio I*, e que serão as proposições de entrada para a demonstração do teorema de Pitágoras, apresentada no *Escholio II*.

Observe, abaixo, que as justificativas estão baseadas em operações com proporções, no primeiro escólio e em operações algébricas, no segundo escólio.

248. Escholio I. *Em todo triangulo rectangulo,*

O quadrado d'um lado do angulo recto é igual á sua projecção sobre a hypotenusa, multiplicada pela hypotenusa inteira;

O quadrado da altura é igual ao producto dos dois segmentos da hypotenusa.

Com effeito, das tres proporções acima, fazendo os productos dos meios e dos extremos, deduz-se :

$b^2 = am \qquad c^2 = an \qquad h^2 = mn$

Fig. 26 Escólio, *Elementos de Geometria*, F.I.C., p. 105

249. Escholio II. *O quadrado da hypotenusa d'um triangulo rectangulo é igual á somma dos quadrados dos lados do angulo recto.*

Com effeito, addicionando membro a membro as igualdades $b^2 = am$ e $c^2 = an$, obtem-se :

$$b^2 + c^2 = am + an$$
$$= a(m + n) = aa = a^2$$

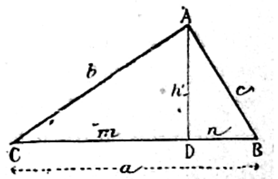


Fig. 27 Escólio, *Elementos de Geometria*, F.I.C., p. 105

A prova do teorema de Pitágoras é algébrica sem a marca das etapas da redação euclidiana, *hipótese*, *tese*, *demonstração* que se mantiveram ao longo do tempo nos livros-texto. O que se nota a partir da base documental, é que a redação das demonstrações varia. Por exemplo, o livro de Sangiorgi, dos anos 60, vai apresentar uma prova algébrica equivalente a essa, com o texto estruturado em duas colunas e esquematizado conforme as etapas acima.

A segunda prova do teorema de Pitágoras, com o uso do método da equivalência de áreas, consta no *Livro IV*, *Avaliação das superfícies*, item *II – Relações entre as superfícies*.

Uma série de teoremas antecede o teorema de Pitágoras e esclarecem sobre o encaminhamento dado ao estudo da avaliação das superfícies. O livro estabelece a área do retângulo, do triângulo, do trapézio e do setor circular. Em seguida, o item *II – Relações entre as superfícies*, apresenta três demonstrações referentes às identidades algébricas $(a + b)^2$, $(a - b)^2$ e $(a + b)(a - b)$, que são interpretadas geometricamente e esse ponto será retomado adiante.

Theorema de Pythagoras.

328. *O quadrado construido sobre a hypotenusa d'um triangulo rectangulo é igual á somma dos quadrados construidos sobre os catetos.*

Seja o triangulo rectangulo ABC; e sejam M, P e Q, os quadrados construidos sobre os tres lados. Tiremos ADF perpendicular a CB; tiremos tambem BH e AE, e consideremos os dois triangulos ACE e BCH.

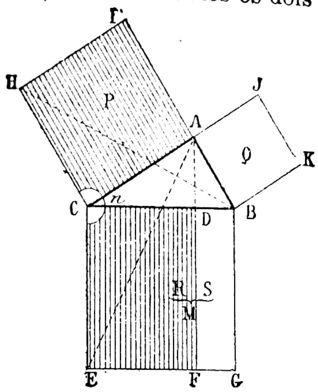


Fig. 241.

O angulo em C, quer n'um, quer n'outro d'esses triangulos, se compõe do angulo *n* augmentado d'um angulo recto, os lados CA e CE do primeiro triangulo são iguaes respectivamente a CH e CB do segundo, como lados dos quadrados P e M. Portanto estes triangulos são iguaes.

O primeiro triangulo ACE é a metade do rectangulo CEFD ou R, que tem a mesma base CE e a mesma altura CD; o segundo triangulo BCH é a metade do quadrado P, que tem a mesma base CH e a mesma altura CA*.

Portanto, o rectangulo R e o quadrado P são equivalentes, por terem metades iguaes. Da mesma maneira poderia provar-se que o rectangulo S é equivalente ao quadrado Q. Temos pois R + S ou M = P + Q.

Logo o *quadrado construido sobre a hypothenusa...*

Fig. 28 Teorema, *Elementos de Geometria*, F.I.C., p. 158-159

Note que a demonstração não está esquematizada e nem contém a estrutura justificativa com referência às proposições que fundamentam a prova. O asterisco (*) esclarece que no triângulo ACE e BHC a altura é a distância entre a reta que contém a base do triângulo e a outra que lhe é paralela.

Mas o modo como o livro explanou o assunto, relação entre áreas, trouxe um fato novo que foi apresentar a demonstração das identidades algébricas, mostrando que existe correlação entre elas e o teorema de Pitágoras, tema que será focalizado adiante. Esse procedimento aparece também em Roxo (1931).

7.6 Sínteses a partir dos *elementos de geometria*

As análises dos textos dos teoremas em *elementos de geometria* usados no ensino brasileiro, a partir do século XIX, reportaram às matrizes históricas que estruturam a concepção e a realização desta Tese, que são livros do tipo *elementos de geometria*, no padrão euclidiano teorema-problema. Constituiu-se, assim, um conjunto de observações que permite compor um quadro característico de ordem mais geral, revelador de estruturas sob as quais os conteúdos e o próprio livro usado no ensino brasileiro se organizam.

7.6.1 Identidade algébrica ou propriedade de objetos geométricos?

Os *Elementos de Geometria* F. I.C. apresentam uma passagem que reporta ao modelo euclidiano de operar com a grandeza segmento de reta que, por sua vez, equivale a operar com a medida numérica associada ao comprimento do segmento e que, também, são operações representadas em caráter mais geral pelas igualdades algébricas. E, ainda, indicam propriedades de objetos geométricos.

Os *Elementos de geometria* F.I.C. apresentam o item *Observação 246*, que se insere no estudo das *Relações numéricas das linhas nos triângulos*, subtítulo do *Capítulo II: Figuras semelhantes* e apresenta as seguintes "fórmulas" algébricas. Atente para a questão geométrico-algébrico, presente no texto original, abaixo: os símbolos a e b das "fórmulas algébricas" podem "representar linhas". É preciso considerar que o livro definiu, antes, que "chama-se quadrado de uma linha o quadrado do numero que exprime o comprimento d'essa linha" (p. 103). E também, o que hoje se define como identidade algébrica, está nomeado como fórmula e essa característica se apresenta, por exemplo, em Legendre.

246. Observação. No estudo das relações numericas, frequentemente se empregam as seguintes fórmulas algebricas :

$$(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$$
$$(a-b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab$$
$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

Os symbolos a e b podendo representar linhas, as fórmulas acima se enunciam como se segue :

1° *O quadrado da somma de duas linhas* é igual ao quadrado da primeira, mais o quadrado da segunda, mais duas vezes o producto d'essas duas linhas.

2° *O quadrado da differença de duas linhas* é igual ao quadrado da primeira, mais o quadrado da segunda, menos duas vezes o producto d'essas duas linhas.

3° *A somma de duas linhas, multiplicada pela differença*, é igual ao quadrado da primeira linha, menos o quadrado da segunda, isto é, igual á differença dos quadrados d'essas linhas.

Fig. 29 Fórmulas algébricas, *Elementos de Geometria*, F.I.C., p. 104

Abaixo, com o *Teorema 252* a geometria F.I.C. ilustra uma operação com a identidade algébrica (a - b)^2 = a^2 + b^2 – 2ab.

Theorema.

251. *N'um triangulo qualquer, o quadrado de um lado opposto a um angulo agudo é igual á somma dos quadrados dos outros dois lados, menos duas vezes o producto do segundo pela projecção do terceiro sobre o segundo.*

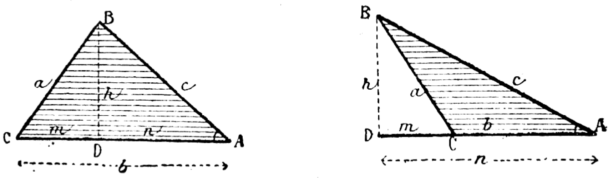


Fig. 183.

O angulo considerado A sendo agudo, temos

$$a^2 = h^2 + m^2$$

ora $\quad h^2 = c^2 - n^2$

e $\quad m^2 = (b-n)^2 = b^2 + n^2 - 2bn$

portanto $\quad a^2 = b^2 + c^2 - 2bn \qquad$ Logo o *quadrado...*

Fig. 30 Teorema, *Elementos de Geometria*, F.I.C., p. 106

A identidade (a - b)^2 = a^2 + b^2 – 2ab, acima, é uma justificativa na demonstração do teorema e expressa o lado oposto ao ângulo agudo em um triângulo qualquer: porque o quadrado da diferença descreve a relação métrica entre lado e projeção dos lados do triângulo qualquer, logo se refere à propriedades de objetos geométricos. Demonstração equivalente a essa consta do livro de Roxo (1931). Com isso, a abordagem do assunto nas duas obras se correlaciona.

As igualdades algébricas são provadas geometricamente. Por exemplo, a demonstração geométrica da identidade $(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$, consta do *Livro IV*: *Avaliação das superfícies*, da geometria F.I.C., como a seguir.

Theorema.

325. *O quadrado construido sobre a somma de duas linhas é igual á somma dos quadrados construidos sobre essas duas linhas, mais duas vezes o rectangulo construido com essas mesmas linhas* (nº 246):

$$(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$$

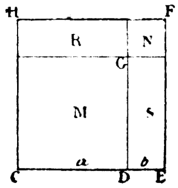


Fig. 238.

Sejam CD e DE, ou a e b, duas rectas quaesquer, e CF o quadrado construido sobre a somma d'essas linhas. No interior, formemos o quadrado M tendo a como lado, e prolonguemos os lados além do ponto G.

A figura total comprehende quatro partes, a saber : os quadrados M e N, cujos lados são respectivamente a e b, e os rectangulos R e S que têm por dimensões esses mesmos comprimentos.

Logo o quadrado construido sobre a somma...

Fig. 31 *Elementos de Geometria*, F.I.C., p. 158

Note bem, os *Elementos de geometria* F.I.C. apresentam a demonstração geométrica do que é conhecido hoje na escola elementar como produtos notáveis, um cálculo numérico, mas que no estudo da geometria dedutiva significa uma relação entre lados e suas projeções, considerando um triângulo qualquer. Ou seja, o livro-texto mostra diferentes significados para essa expressão.

Roxo (1931) estuda o triângulo retângulo como um caso particular dessa ralação, explorando o fato intuitivamente a partir da figura do triângulo acutângulo, retângulo e obtusângulo. Ottoni e Timotheo Pereira apresentam a demonstração geométrica dos produtos notáveis, quando apresentam o estudo da comparação de áreas. Mas, a demonstração geométrica dos produtos notáveis, que desaparece dos livros-texto, remonta às obras históricas de Legendre, Hérigone e Euclides.

A prova da identidade algébrica $(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$ nos *Éléments de Géométrie* de Legendre, 1ª edição de 1794, é a Proposição VIII do Livro III.

PROPOSITION VIII.

THÉORÊME.

Si une ligne AC *est divisée en deux parties* AB, BC, *le quarré fait sur la ligne entiere* AC *contiendra le quarré fait sur* AB, *plus le quarré fait sur* BC, *plus deux fois le rectangle compris sous les deux parties* AB *et* BC, *ce qu'on exprime ainsi*, $\overline{AC}^2$ *ou* $(AB + BC)^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 + 2AB \times BC$.

Construisez le quarré ACDE, prenez AF=AB, menez FG parallele à AC, et BH parallele à AE.

Le quarré ABCD est divisé en quatre parties : la premiere ABIF est le quarré fait sur AB, puisqu'on a pris AF=AB : la seconde IGDH est le quarré fait sur BC, car puisqu'on a AC=AE, et AB=AF, la différence AC—AB est égale à la différence AE—AF, c'est-à-dire que BC=EF. Mais à cause des paralleles IG=BC, et DG=EF ; donc HIGD est égal au quarré fait sur BC. Ces deux parties étant retranchées du quarré total, il reste les deux rectangles BCGI, EFIH, qui ont chacun pour mesure AB×BC. Donc le quarré fait sur AC, etc.

Scholie. Cette proposition revient à celle qu'on démontre en algebre pour la formation du quarré d'un binôme, et qui est ainsi exprimée : $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

Fig. 32 Teorema, Legendre, p. 67

Legendre conclui que a proposição corresponde a uma igualdade da álgebra. Nesse sentido, a geometria de Legendre é um marco no conjunto das obras que são reescritas dos *Elementos* de Euclides e que escrevem a história da matemática escolar.

Essa mesma proposição consta da versão em português dos *Elementos de Geometria* de Legendre, de 1809.

PROPOSIÇÃO VIII.

THEOREMA.

Se huma linha AC (fig. 106.) *for dividida em duas partes* AB, BC, *o quadrado feito ſobre a linha inteira* AC *conterá o quadrado feito ſobre huma parte* AB, *mais o quadrado feito ſobre a outra parte* BC, *mais duas vezes o rectangulo comprehendido debaixo das duas partes* AB, BC, *o que ſe exprime aſſim*, $\overline{AC}^2$ *ou* $(AB + BC)^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 + 2AB \times BC$.

Conſtrua-ſe o quadrado ACDE, tome-ſe AF = AB, tire-ſe FG parallela a AC, e BH parallela a AE.

O quadrado ABCD eſtá dividido em quatro partes: a primeira ABIF he o quadrado feito ſobre AB; porque tomámos AF = AB; a ſegunda IGDH he o quadrado feito ſobre BC; porque como temos AC = AE, e AB = AF, a differença AC — AB he igual á differença AE — AF, o que dá BC = EF. Mas por cauſa das parallelas IG = BC, e DG = EF; logo HIGD he igual ao quadrado feito ſobre BC. Tirando eſtas duas partes do quadrado total, ficão os dois rectangulos BCGI, EFIH, que tem cada hum por medida AB × BC. Logo o quadrado feito ſobre AC, &c.

Scholio. Eſta propoſição ſe reduz á que ſe demonſtra na algebra para formação do quadrado de hum binomio, e que ſe exprime aſſim: $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

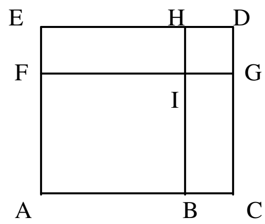


fig. 106

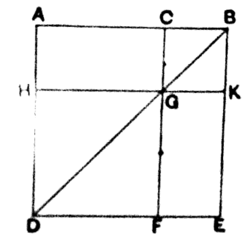
Fig. 33 Teorema, Legendre, p. 69-70

Esse teorema possuiu um equivalente nos *Elementos* de Euclides, a Proposição 4, do Livro II, mas com um desenvolvimento distinto do que se viu nas demonstrações acima. Neste ponto, é importante notar que a matemática escolar se algebriza e que associar as proposições do Livro II dos *Elementos* a enunciados geométricos de leis da aritmética, como a propriedade distributiva, ou a igualdades algébricas usuais nos dias de hoje, como os produtos notáveis, facilita o entendimento do procedimento geométrico característico dos *Elementos* de Euclides. Mueller diz que a interpretação algébrica tem numerosas vantagens, sendo a mais importante delas, a de tornar inteligível ao leitor moderno, partes da matemática grega que são tão complexas geometricamente, que o seu desenvolvimento puramente geométrico parece quase impossível (1981, p. 43), embora esse autor não admita que haja procedimento algébrico na geometria dos *Elementos*. Neste ponto, é importante registrar a polêmica sobre a existência ou não de uma álgebra geométrica na matemática grega antiga.

Tradicionalmente, essa questão surgiu com Nesselmann (1842) que reconheceu uma álgebra disfarçada nos procedimentos matemáticos antigos. Esse posicionamento foi seguido por Tannery (1882) e poucos anos depois por Zeuthen (1886) e logo se tornou popular. Em 1908, Heath segue essa tradição nos comentários ao texto dos *Elementos* de Euclides. Por volta de 1930 Neugebauer procurou também origens da álgebra na matemática babilônica e, van der Waerden, anos 50, Freudenthal (1977), Weil (1978), também se incluem nessa escola. Os autores Szabó (1969), Unguru (1975), Unguru e Rowe (1981), Grattan-Guinness (1996) posicionam-se contrariamente. Em resumo, o debate sobre a álgebra geométrica se baseia em dois pontos de vista que podem ser chamados como matemático e filológico (Artmann, idem; Grattan-Guinness, idem)[8].

O desenvolvimento da prova em Euclides obedece as etapas da redação e as referências às proposições que justificam os passos dedutivos da prova constam do texto.

PROPOSIÇÃO 4, LIVRO II



Se uma linha reta é cortada ao acaso, o quadrado sobre o todo é igual ao quadrado sobre os segmentos e duas vezes o retângulo contido pelos segmentos.

Seja a linha reta AB cortada ao acaso em C.
Eu digo que o quadrado sobre AB é igual aos quadrados sobre AC, CB e duas vezes o retângulo contido por AC, CB.
Pois seja o quadrado ADEB descrito sobre AB, [I, 46]
e seja traçada BD.
Por C, seja CF traçada paralela a AD ou EB, e por G seja HK traçada paralela a AB ou DE. [I, 31]
Então, como CF é paralela a AD, e BD cai sobre elas, o ângulo externo CGB é igual ao ângulo interno colateral ADB. [I, 29]
Mas o ângulo ADB é igual ao ângulo ABD, como o lado BA é também igual a AD. [I, 5]
Portanto o ângulo CGB é também igual ao ângulo GBC, assim como o lado

[8] Ver Artmann e Grattan-Guinness, obras citadas; Unguru e Rowe, 1981, *Does the quadratic equation have greek roots? A study of "geometric algebra", "application of areas", and related problems*, Libertas Mathematica, v. 1, 1981 e v. 2, 1982; Mueller, obra citada.

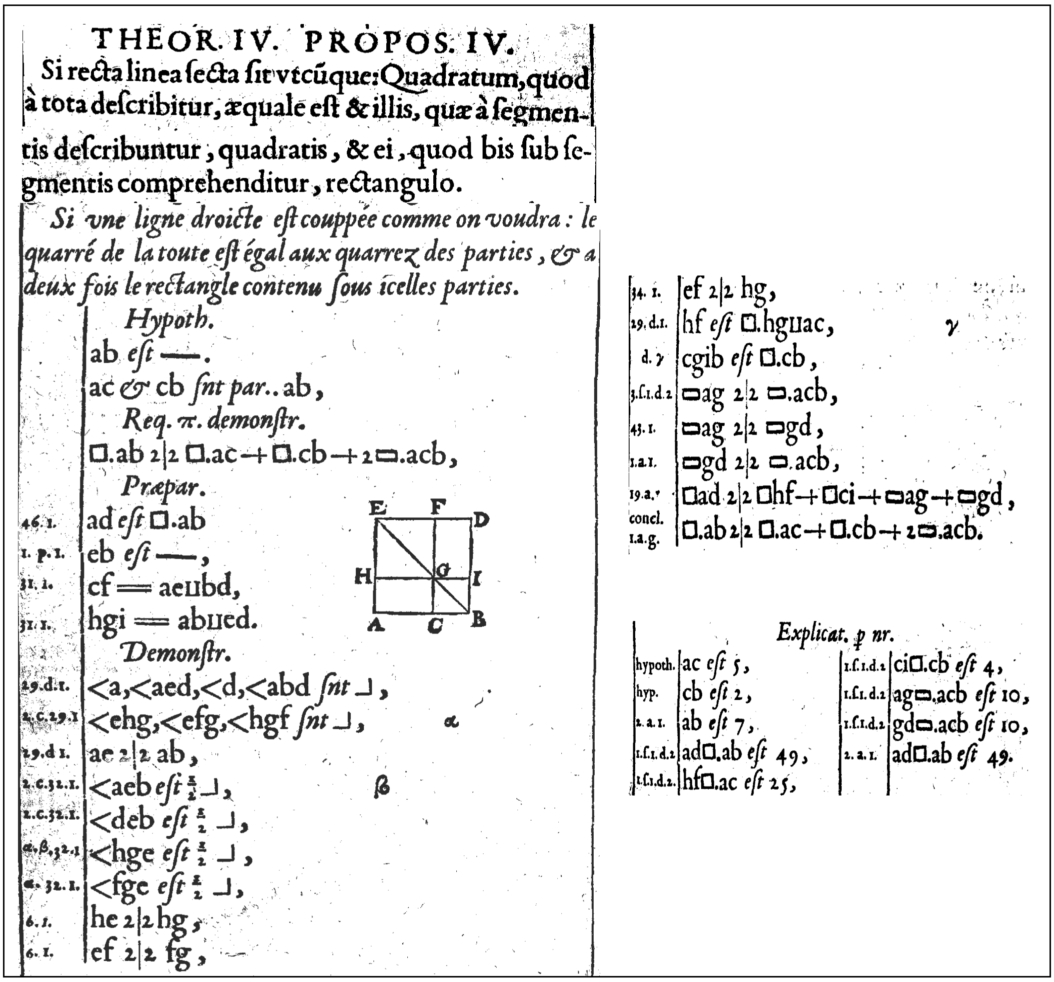
BC é também igual ao lado CG. [I, 6]
Mas CB é igual a GK e CG a KB. [I, 34]
Portanto, GK é também igual a KB,
portanto CGKB é eqüilátero.
Digo que é também retângulo.
Pois como CG é paralela a BK, os ângulos KBC, GCB são iguais a dois ângulos retos. [I, 29]
Mas o ângulo KBC é reto, portanto o ângulo BCG é também reto, assim como os ângulos opostos CGK, GKB são também retos. [I, 34]
Portanto CGKB é retângulo e foi provado que equilátero,
portanto é um quadrado e está descrito sobre CB.
Pela mesma razão HF é também um quadrado e está descrito sobre HG, isto é AC. [I, 34]
Portanto, os quadrados HF, KC são os quadrados sobre AC, CB.
E como AG é igual a GE, e AG é o retângulo AC, CB, pois GC é igual a CB, portanto GE é também, igual ao retângulo AC, CB.
Portanto AG, GE são iguais a duas vezes o retângulo AC, CB,
Mas os quadrados HF, CK são também os quadrados sobre AC, CB.
Portanto as quatro áreas HF, CK, AG, GE são iguais aos quadrados sobre AC, CB e duas vezes o retângulo contido por AC, CB.
Mas, HF, CK, AG, GE são o todo ADEB, que é o quadrado sobre AB.
Portanto o quadrado sobre AB é igual aos quadrados sobre AC, CB e duas vezes o retângulo contido por AC, CB.
Portanto, etc. Q. E. D

Fig. 34 Teorema, *Elementos* de Euclides, p. 388

Comparando o texto de Legendre com o de Euclides, as justificativas são diferentes e isso indica que a demonstração sofreu mudanças também. Observando a etapa *construção*, Legendre não traça a linha que vai bissectar a figura e com isso não desenvolve a prova com base na igualdade de ângulos, ao contrário do que mostra o texto euclidiano.

Em Euclides, as referências [I, 29], [I, 5],]I, 6], [I, 34] justificam geometricamente as igualdades. Por exemplo, a proposição [I, 29] afirma, “uma linha reta caindo sobre linhas retas paralelas determina ângulos alternos iguais, o ângulo externo é igual ao interno colateral, e os ângulos internos sobre o mesmo lado são iguais a dois ângulos retos” (p. 311). Nesse sentido, o texto de Hérigone, abaixo, está esquematizado e expõe as proposições de modo conciso. Note as igualdades dos ângulos justificando as igualdades dos lados dos retângulos.

Por exemplo, a afirmativa $\angle a$, $\angle aed$, $\angle d$, $\angle abd$ snt $\lrcorner$, ou seja, os ângulos são retos, se justifica pela referência [29, I], citada acima.


THEOR. IV. PROPOS. IV.

Si recta linea secta sit vtcũque: Quadratum, quod à tota describitur, æquale est & illis, quæ à segmentis describuntur, quadratis, & ei, quod bis sub segmentis comprehenditur, rectangulo.

Si vne ligne droicte est couppée comme on voudra: le quarré de la toute est égal aux quarrez des parties, & a deux fois le rectangle contenu sous icelles parties.

Hypoth.
ab *est* —.
ac & cb *snt par..* ab,
Req. π. demonstr.
□.ab 2|2 □.ac + □.cb + 2▭.acb,
Præpar.
46.1. ad *est* □.ab
1. p.1. eb *est* —,
31.1. cf = aeubd,
31.1. hgi = abued.
Demonstr.
29.d.1. <a,<aed,<d,<abd *snt* ⌟,
<ehg,<efg,<hgf *snt* ⌟,
ae 2|2 ab,
<aeb *est* ½ ⌟,
<deb *est* ½ ⌟,
<hge *est* ½ ⌟,
<fge *est* ½ ⌟,
6.1. he 2|2 hg,
6.1. ef 2|2 fg,
34.1. ef 2|2 hg,
hf *est* □.hguac,
cgib *est* □.cb,
▭ag 2|2 ▭.acb,
43.1. ▭ag 2|2 ▭gd,
▭gd 2|2 ▭.acb,
□ad 2|2 □hf + □ci + ▭ag + ▭gd,
concl. □.ab 2|2 □.ac + □.cb + 2▭.acb.

Explicat. p nr.
hypoth. ac *est* 5,
hyp. cb *est* 2,
ab *est* 7,
ad□.ab *est* 49,
hf□.ac *est* 25,
ci□.cb *est* 4,
ag▭.acb *est* 10,
gd▭.acb *est* 10,
ad□.ab *est* 49.

Fig. 35 Teorema, Hérigone, p. 67-66

Seguem algumas explicações da notação usada no teorema acima,

Req .π.. *demonstr.*: o exigido para demonstrar
Prepar.: preparação
est: é
snt: *são*
2/2: igual
—+ : mais
ac et *cb snt* par.. ab: ac e cb são partes de ab

ad est □. *ab*: ad é um quadrado sobre ab
cf ==== *ae*u*bd*: *cf* é paralela a ae ou *bd*
∠*aeb* 2/2 ⌟: ângulo aeb é a metade do ângulo reto

□ : quadrado
▱: paralelogramo

A demonstração de Hérigone e a de Euclides se equivalem, embora a escrita sofra mudanças, ao contrário do que ocorre no caso de Legendre, que indica a presença da álgebra sintetizando proposições geométricas e permitindo operar com os objetos geométricos, no caso, áreas, de um modo mais geral.

Observe que Legendre constrói a prova do teorema com base na decomposição do quadrado em outras figuras, revelando um procedimento inverso do que se apresenta nos *Elementos* porque, em Euclides, a construção de cada uma das figuras que compõem o quadrado total leva a concluir o teorema.

Essa mudança estrutural no desenvolvimento da demonstração exemplifica uma correlação já discutida na primeira parte da Tese. Ou seja, a partir do livro-texto se atesta a presença do procedimento por síntese, característico da geometria dedutiva euclidiana e, por análise, no caso de Legendre, que está associado aos procedimentos algébricos.

A correlação geometria-álgebra na demonstração vai mostrando que a geometria dos *Elementos* tem correspondentes algébricos e aritméticos que cobrem muitos dos assuntos estudados na matemática da escola elementar[9]. Sobre a demonstração de Euclides, acima, Boyer (1974) comenta que esse método de prova é “uma maneira prolixa de dizer” as equações e que as proposições do Livro II não desempenham qualquer papel em textos modernos. Porém, no tempo de Euclides tinham grande significado e “é fácil explicar essa discrepância – hoje temos álgebra simbólica e trigonometria, que substituíram os equivalentes geométricos da Grécia” (idem, p. 79).

7.6.2 Correlações entre demonstração, fórmula e questões propostas em *elementos de geometria*

Os *Elementos de geometria* F.I.C. é um livro que se caracteriza por trazer problemas que são aplicações práticas dos teoremas como ressalta Carvalho (2008) e Valente (1999). Mas, o que se constata, é que esse fato se estabelece a partir de estruturas complexas que organizam os conteúdos e o próprio livro.

Mas como trabalhar com o complexo? Estabeleça uma amostra, mas, uma ressalva parece se apresentar de modo necessário - a perspectiva histórica. Ela surge como uma exigência, pois falar de demonstração em geometria plana requer considerar o modelo euclidiano e, por sua vez, falar em demonstração escolar leva à obra de Legendre e, ainda, quando o livro propõe estratégias para o ensino de como demonstrar, uma matriz se encontra em Hérigone. Os níveis de análise padrão dedutivo e didatização dos conteúdos remetem ao livro-texto, em que é

9 Sobre esse assunto, ver Heath, 1956; Waerden, 1971; Aaboe, 2002.

necessário reconhecer correlações e estruturas que sustentam as evidências que se tomou como objeto de estudo.

Comparando os *Elementos* de Euclides e os *Elementos* de geometria F.I.C., por exemplo, a estrutura teorema-problema, o livro ser indexado, são evidências que os aproxima, mas a presença de exercícios e de fórmulas os diferencia, sendo características evidentes no segundo livro. Um modo de avançar na proposta de fazer um trabalho comparativo, foi observar um padrão que se repetisse, primeiro, no texto da demonstração. Isso é importante, porque a proposta, nesta pesquisa, foi partir de uma instância local, o texto de um teorema.

Uma evidência se apresenta, quando esse texto é euclidiano: índices referenciam as proposições que embasam a prova. Quando se observa o texto de uma demonstração em Euclides, proposições, definições, axiomas, postulados são referenciados, porque eles estão na base da estrutura dedutiva do teorema ou problema.

Os *elementos de geometria*, livros direcionados ao ensino da geometria dedutiva, seguindo o modelo euclidiano, são indexados e também reúnem um conjunto de teoremas e problemas. Só que nos *elementos de geometria*, os índices aumentam em quantidade e variedade quando se reúne um conjunto de obras.

Esse fato levou a duas evidências, a fórmula e as questões propostas, que se correlacionam e constituem uma estrutura explicativa sobre modos distintos de se apropriar de propriedades dos objetos geométricos, descritas pelas proposições da geometria dedutiva.

A geometria F.I.C. apresenta vários tipos de questões propostas. Partindo do exemplo, abaixo, alguns pontos serão discutidos.

Exemplo. *Qual é o lado do triangulo equilatero inscripto n'um circulo que tenha de área 20 centimetros quadrados?*

O lado c do triangulo equilatero inscripto é dado pela fórmula :

$$c = r\sqrt{3} \qquad (\text{n° } 277) \qquad (1)$$

Além d'isso $\pi r^2 = 20$; d'onde $r = \sqrt{\dfrac{20}{\pi}}$ (2)

Fig. 36 Questão proposta, *Elementos de Geometria*, F.I.C., p. 149

Primeiro, observe a presença das referências. As fórmulas que expressam a propriedade do triângulo e a área do círculo estão devidamente referenciadas pelos índices (n^o 227) (1) e (2). Essa evidência permite explorar a rede de justificativas, em que uma proposição leva a outras. Apresenta-se um funcionamento, característico, que preside a abordagem dos conteúdos no estudo da geometria dedutiva.

As referências (1) e (2), estabelecem,

> Escholio I. Expressão do lado do triangulo eqüilátero inscripto, em funcção do raio.
> O triangulo BAE, rectangulo em A (no 148, 2º), dá
>
> $AE2 = BE^2 - AB^2 = (2r^2) - r^2 = 4r^2 - r^2 = 3r^2$
> Logo
> $AE = r\sqrt{3} = r = 1,73205...)$ ς
>
> Escholio II. O apothema do triangulo eqüilátero é igual à metade do raio (...)
> (p. 118)

E, por sua vez, o (*nº 148, 2º*), referencia a proposição,

> Todo angulo inscripto n´um semi-circulo é recto; porque tem por medida a metade de uma semi-circunferencia, ou um quadrante. (p. 51)

A última proposição leva às referências (n^{os} 50, 51, 52) que remetem aos teoremas relativos aos "casos de igualdade entre triângulos" e assim, sucessivamente. Ou seja, uma instância local como o teorema, vai exigir a observação mais global do livro, levando a outras referências no próprio livro ou em outros volumes de uma mesma coleção.

Exceto nas obras históricas, em que a numeração recomeça a cada Livro ou capítulo, o texto dos outros *elementos de geometria* da base documental é marcado desde a introdução até o fim da obra com uma seqüência numérica única. Entre os livros usados no ensino brasileiro, em Paranaguá, a seqüência vai de 1 a 354; em Ottoni (s.d. 9ª; 1ª ed. 1853), de 1 a 280; em Timotheo Pereira (1898, 2ª. ed.; 1927, 11ª. ed.) de 1 a 639; em André y Marin e Paula (s.d., 3ª. ed.; 1ª. ed., 1912) de 1 a 677; em F.I.C. (1933, s. ed.), de 1 a 1124.

O livro como um todo, mostra a indexação correndo em várias instâncias. Por exemplo, quando são observados quais tipos de questões o livro propõe, onde elas estão alocadas. A presença de questões a resolver é uma característica que aparece em Timotheo Pereira. Os *elementos de geometria* de Paranaguá e Ottoni não propõem questões a serem resolvidas. Em F.I.C. a numeração do livro inclui as questões propostas e em Timotheo Pereira e em Perez y Marin e Paula essas questões são numeradas à parte.

Elejo os termos *questões a resolver, questões propostas* para referir expressões como *exercícios*, *problemas*, *problemas numéricos*, presentes nos *elementos de geometria* e mostrar que estas devem ser entendidas no contexto de cada obra e que, com isso, as obras se particularizam umas em relação às outras.

Os *Elementos de geometria* de Legendre, Paranaguá e Ottoni não apresentam questões a resolver e se enquadram entre o tipo de *elementos de geometria* mais tradicional.

Em Timotheo Pereira constam os *Exercícios numéricos*. Uma série com 51 questões encerra o *Segundo Livro – Da Extensão de Um Plano*, e ao final do Quarto Livro, a última parte da obra, duas listas reúnem *Exercicios Numericos sobre as areas dos polyedros*, 31 questões, e *Exercicios Numericos sobre os volumes dos polyedros*, 41 questões.

Em Perez y Marin e Paula, o desdobramento do padrão teorema-problema é mais variado e especialmente significativo porque preserva a palavra *problema* se referindo às construções geométricas com régua sem escala e compasso, mantendo o padrão euclidiano que diferencia problema de teorema. É característico, no livro, apresentar em cada capítulo a exposição do assunto seguida da listas de questões a resolver, que sob a denominação geral, *Exercícios*, se subdividem em até três tipos: *Theoremas a demonstrar*, *Problemas a resolver*, *Problemas numéricos*. A expressão *Problemas numéricos* refere questões do tipo,

> Calcular as medianas de um triangulo, cujos lados valem respectivamente 10m., 8m., e 9m. (p.99)

Em *Resolver os seguintes problemas*, o termo *problemas* se refere a questões de dois tipos. Abaixo, um exemplo mostra que se trabalha com igualdades algébricas, embora o livro não as mencione como fórmulas. Mas, quando associadas aos *problemas numéricos*, tem-se a estrutura que fundamenta as questões do tipo cálculo numérico. Aí está a origem dos formulários que, posteriormente, vão ser uma novidade nos *elementos de geometria*.

184. PROBLEMA. — *Calcular as medianas, as bissectrizes e as alturas de um triangulo em funcção de seus lados.*

1.º *Calculo das medianas* (fig. 118).

Temos no triangulo ABC (**180**):

$$a^2 + c^2 = 2m^2 + \frac{b^2}{2}, \text{ donde}$$

$$m = \frac{1}{2}\sqrt{2a^2+2c^2-b^2}.$$

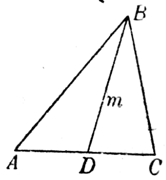


Fig. 118

De modo analogo

$$\begin{cases} m' = \frac{1}{2}\sqrt{2b^2+2c^2-a^2} \\ m'' = \frac{1}{2}\sqrt{2a^2+2b^2-c^2}. \end{cases}$$

Fig. 37problema, *Elementos de Geometria*, Perez y Marin e Paula, p. 96

Outro tipo de *problema* são as construções geométricas no padrão tradicional euclidiano,

159. PROBLEMA. — *Sobre uma recta dada, construir um triangulo semelhante a outro* (fig. 105).

Seja o triangulo ABC e $A'B'$ a recta dada: E' sufficiente formar os angulos A' e B', respectivamente eguaes a A e B, para se obter o triangulo pedido $A'B'C'$.

Si em logar de ser dado o lado $A'B'$, fosse a razão $\frac{m}{n}$ de semelhança, o lado $A'B'$ deveria satisfazer a relação $\frac{m}{n} = \frac{AB}{A'B'}$, e bastaria determinar a quarta proporcional ás tres rectas m, n e AB.

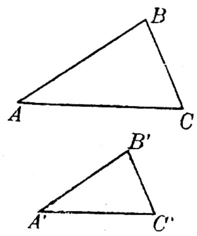


Fig. 105

(...)

Fig. 38. Problema, *Elementos de Geometria*, Perez y Marin e Paula, p. 83

A geometria F.I.C apresenta questões propostas ainda mais diversificadas. Os *Problemas numéricos* estão alocados na parte final da obra. A lista com essas questões está divida por subtítulos que as agrupam por livro e assunto. Por exemplo, Livro IV: *Polygonos e circulo*, *Círculos e polygonos inscriptos e circumscriptos* (174-181). São questões como,

> Qual é o lado d´um quadrado, se a diagonal e o lado têm em somma $5^m,80$? (p. 421).

Os outros tipos de questão constam após cada *Livro* e o título por assunto mostra fatos novos. A lista relativa ao Livro VI apresenta o item *Theoremas* englobando os subtítulos *Área das figuras*, *Relações deduzidas da consideração* *das áreas*. Em seguida, o termo *Problemas* reúne os subtítulos *Construcção das figuras*, *Divisão das figuras, Máxima e mínima*, *Figuras inscriptas ou circumscriptas*, *Procura das fórmulas* e, como último informe consta, “Os dados dos problemas numéricos estão reunidos e expostos no fim d´este livro” (p. 181).

Comparativamente, em relação ao livro anterior, de Perez y Marin e Paula, a correlação entre fórmula e problema numérico torna-se mais evidente na geometria F.I.C.

É relevante observar a categoria *problema*, nesse caso. Aqui, *problema* se refere à construção geométrica, dentro do padrão tradicional e também a trabalhar com o teórico de um modo específico, ou seja, reunir os teoremas dentro de uma categoria, *fórmula*, cuja função o livro explica.

A lista *Procura das fórmulas* apresenta questões como, “Exprimir o lado e a superfície do triângulo equilateral em funcção da altura” (p. 180). Cruzando essa informação com as orientações do livro sobre a resolução de *Problemas numéricos*, há indícios de como se estabelece o processo que vai das proposições demonstradas em geometria dedutiva às fórmulas e cálculos aritméticos.

Nesse sentido, o livro apresentou o teorema da área do triângulo e, logo, depois, o *Escholio*,

316. Escholio. A fórmula da área do triangulo é:

$$S = \frac{bh}{2}$$

Podemos deduzir d'esta fórmula diversas consequencias; **eis** aqui as mais empregadas:

I. **Área do triangulo equilatero.** Seja a o lado do triangulo equilatero.

O triangulo rectangulo ABD dá

$$AD^2 = AB^2 - BD^2$$

ou $$h^2 = a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 = a^2 - \frac{a^2}{4} = \frac{3a^2}{4}$$

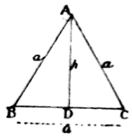


Fig. 229.

Logo $$h = \frac{a}{2}\sqrt{3} \qquad (1)$$

A área é igual a $$\frac{a}{2} \cdot h = \frac{a}{2} \cdot \frac{a}{2}\sqrt{3}$$

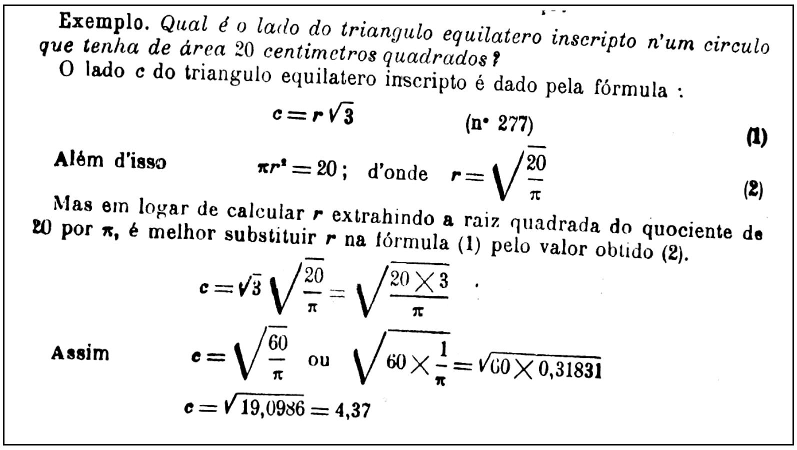
ou emfim $$S = \frac{a^2}{4}\sqrt{3} \qquad (2)$$

Fig. 39 Escólio, *Elementos de Geometria*, F.I.C., p. 153

Observe que a fórmula é um modo de “traduzir” as proposições, como mencionou Legendre. O procedimento de traduzir as proposições em fórmulas algébricas se correlaciona com os problemas numéricos, conforme o livro mostra. A seção *Problemas numéricos* consta no *Apêndice*, instruindo sobre a resolução,

> Em geometria, os problemas numéricos não são mais do que simples applicações do calculo arithmetico á formulas conhecidas.
> É importante ter em conta as seguintes observações:
> 1º Dispôr os calculos com muita ordem;
> 2º Empregar os logarithmos logo que as multiplicações e as divisões se tornam muito numerosas, e sobretudo quando se tem de extrahir raizes;
> 3º Transformar as fórmulas, afim de obter a expressão do valor da incógnita em funcção dos dados, em logar de fazer depender um serie de cálculos de um calculo approximado feito no começo. (p. 419)

As instruções são exemplificadas como a seguir,


Exemplo. *Qual é o lado do triangulo equilatero inscripto n'um circulo que tenha de área 20 centimetros quadrados?*

O lado c do triangulo equilatero inscripto é dado pela fórmula :

$$c = r\sqrt{3} \qquad (n^\circ\ 277) \qquad (1)$$

Além d'isso $\quad \pi r^2 = 20$; d'onde $r = \sqrt{\frac{20}{\pi}} \qquad (2)$

Mas em logar de calcular r extrahindo a raiz quadrada do quociente 20 por π, é melhor substituir r na fórmula (1) pelo valor obtido (2).

$$c = \sqrt{3}\sqrt{\frac{20}{\pi}} = \sqrt{\frac{20 \times 3}{\pi}}$$

Assim $\quad c = \sqrt{\frac{60}{\pi}}$ ou $\sqrt{60 \times \frac{1}{\pi}} = \sqrt{60 \times 0{,}31831}$

$$c = \sqrt{19{,}0986} = 4{,}37$$

Fig. 40 Questão a resolver, *Elementos de Geometria*, F.I.C., p. 419

Considerando que "os problemas numéricos não são mais do que simples applicações do calculo arithmetico á formulas conhecidas", se reconhece, aqui, um padrão característico em funcionamento, ou seja, a estrutura *fórmula – problema numérico – cálculo aritmético*.

Isso mostra a hierarquização que leva das definições e proposições teóricas aos problemas numéricos. O estatuto teórico da geometria dedutiva adquire um caráter instrumental, de ferramenta com que "simplesmente" são resolvidas as contas da aritmética elementar ligadas às atividades práticas, como o livro confere.

No final do *Apêndice* dos *Elementos de Geometria*, F.I.C., que é bem extenso, englobando 113 páginas em um livro que totaliza 442 páginas, se vê o seguinte registro,

> Os nossos *Elementos de Geometria*, tão abundantes em *questões theoricas*, não podem propôr senão um numero mui pequeno de *problemas praticos*; mas o nosso *Curso superior de Geometria*, para o Ensino primário, contém mais de mil *problemas numéricos*; além d´isso, elle termina por uma taboa muito útil que dá as cordas de 10 em 10 minutos. Assim estas duas obras, feitas pra corresponder a diversos usos, completam-se uma com a outra. (p. 420)

O livro menciona a complementaridade de dois estudos em geometria, o estudo dedutivo e estudo de caráter prático. Esta Tese, na busca por mudanças ocorridas no texto demonstrativo, mostrou que os *elementos de geometria* apresentam evidências dessa complementaridade. Mas o próprio livro sugere a pista de que a história continua – outro livro.

A categoria fórmula, encontrada pela primeira vez entre as obras da base documental, nos *Elementos de Geometria* de Legendre, pelo lugar que ocupa entre o geométrico, o algébrico e o aritmético, deve ser olhada com atenção nos livros. Os *elementos de geometria* mostram que a presença da fórmula além de gerar modificações na demonstração em geometria dedutiva se correlaciona com as aplicações práticas.

A próxima amostra a ser estudada reúne os *livros de matemática*, livros que se particularizam em relação aos *elementos de geometria* e que surgem, entre nós, por volta dos anos 30 do século passado. O desafio agora é desvendar algumas trilhas desse percurso.