

PARTE II – O TEXTO DEMONSTRATIVO

4 Caracterizando a demonstração

Como tenho por objetivo, nesta Tese, construir uma resposta para a questão – como foi se modificando a demonstração em geometria plana elementar em livros-texto usados no ensino brasileiro a partir do século XIX – a proposta se atém ao texto demonstrativo em uma esfera específica, a do ensino-aprendizagem.

A literatura contemporânea mostra que a demonstração escolar enquanto objeto de pesquisa se particulariza, gerando investigações sobre a escrita e a leitura de demonstrações, o funcionamento do raciocínio dedutivo, entre outras¹. Porém, no conjunto dessas pesquisas é recorrente a ênfase na necessidade de se ter em conta uma característica do trabalho com demonstração – o texto demonstrativo é uma construção discursiva que obedece ao desenvolvimento próprio da prova matemática. Consequentemente, a análise dos livros-texto a ser empreendida, vai exigir a investigação de como se configura e funciona uma *demarche* textual característica nas demonstrações geométricas. Problemática que retoma questões básicas já sugeridas pelo percurso histórico e sintetizadas na passagem *do mostrar ao demonstrar*, conforme apresentado na Parte I desta Tese.

O Capítulo 4, *Caracterizando a demonstração*, trata de aspectos relativos ao formato discursivo de expor a prova em geometria plana, sujeito ao funcionamento específico do raciocínio dedutivo.

4.1 Demonstração matemática enquanto processo de prova

De um modo geral a geometria plana é a área em que tem início o ensino-aprendizagem da demonstração nos livros-texto. Segundo Balacheff² (1987), é importante explorar aspectos do raciocínio dedutivo no sentido de entender o funcionamento do texto demonstrativo, considerando a *passagem das provas pragmáticas às provas intelectuais*. (grifos meus)

1 Barbin e outros, 2001; Douaire e Hubert, 1999; Freudenthal, 1994; Barbin, 1989; Rouche, 1989; Arsac, 1987; Balacheff, 1987; Dormolen, 1977.

2 Essa parte do texto tem por base Balacheff, 1987: *Procesus de preuve et situations de validation*.

Esse autor atenta para a necessidade de se esclarecer o uso de termos que às vezes ganham o mesmo significado, mas que devem ser distinguidos quando se discute procedimentos de prova. São eles, *explicação*, *prova*, *raciocínio* e *demonstração*. (grifos meus)

Chamamos *explicação* um discurso visando tornar inteligível o caráter de verdade de uma proposição ou de um resultado, assumido por um locutor. As razões expostas podem ser discutidas, refutadas ou aceitas.

Chamamos *prova* uma explicação aceita por uma dada comunidade em um dado momento. Essa decisão pode ser o objeto de um debate cuja significação é a exigência de determinar um sistema de validação comum aos interlocutores.

Reservamos a palavra *raciocínio* para designar a atividade intelectual, a maior parte do tempo não explícita, de manipulação de informações para, a partir de dados, produzir novas informações.

No sentido da comunidade matemática, apenas podem ser aceitas como prova as explicações que adotam uma forma particular. Elas constituem uma série de enunciados organizados segundo regras determinadas. Um enunciado é conhecido como sendo verdadeiro ou é deduzido daqueles que o precedem, com a ajuda de uma regra de dedução tomada em um conjunto de regras bem definido. Nós chamamos essas provas *demonstrações*. (Balacheff, idem, p. 147-148)

A demonstração matemática, dessa forma, é uma produção social admitida em seu caráter público e categórico. Público, aqui, engloba o uso de um léxico e de regras de raciocínio comuns explicitados discursivamente, em torno dos quais há consenso quanto ao uso e o significado. Imbricado nisso, o caráter categórico significa que a demonstração está prescrita segundo as regras do silogismo. Esse quadro de inter-relações torna-se importante para o entendimento de como o texto demonstrativo funciona.

O breve desenvolvimento a seguir gira em torno de aspectos chave para se entender o funcionamento de uma demonstração, visando estabelecer características básicas desse tipo de prova enquanto uma construção discursiva particular.

Uma das finalidades de um processo de prova é estabelecer a ausência de contradição, problema que não se reduz à complexidade da lógica, pois “uma contradição não existe em si, mas sempre se refere a um sistema cognitivo” (Balacheff, idem, p. 149). Ainda segundo Balacheff, tomar consciência de uma contradição levanta o problema de se fazer uma escolha entre duas proposições, uma afirmação e sua negação. Isso implica disponibilizar uma afirmação passível de ser negada e, assim, a ação de escolher surge “como suscetível de uma reflexão

e até de um discurso” (idem, p. 150). Pois, o engajamento sobre a afirmação implica operar com um controle prévio da situação, a escolha deve ser feita segundo um referencial. Esse aspecto a priori, presente na demonstração matemática, torna-se um dos pontos chave no funcionamento dos processos de prova, pois o ato de eleger uma proposição advém da necessidade de validar uma afirmativa.

O procedimento da validação, necessário ao funcionamento de uma prova, nem sempre é exigido. Um exemplo são as situações de ensino-aprendizagem de como executar algoritmos ou implementar regras práticas, sem provar a validade dessas estratégias. E, assim, “essas ações constituem as esferas da prática” (idem, p. 152). Em uma situação de validação o objetivo é produzir uma prova, ou seja, estabelecer a verdade ou a falsidade de um enunciado.

Em situações de decisão como essa, são ativadas operações intelectuais próprias ao raciocínio hipotético-dedutivo. No entanto, as operações desse tipo de raciocínio, “um sistema legítimo e fiável de produção de informação as quais podem ser implementadas sem que, no entanto, uma prova seja produzida” (Balacheff, idem, p. 153). E, nesse caso, a distinção – ferramenta, objeto – vai mostrar que no funcionamento demonstrativo há um conjunto de saberes que pode ser operado de dois modos diferentes (Douady, cf. Balacheff, idem, p. 153; cf. Machado e outros, 1999, p. 116).

Existe uma organização própria à demonstração e, dependendo do modo como se faz uso disso, esta organização “está no funcionamento do assunto como uma *ferramenta* e não como um *objeto*” (Balacheff, idem, p. 153). Ou seja, quando o objetivo é conhecer como se dá a organização do raciocínio dedutivo, há o engajamento numa atividade intelectual em que o funcionamento desse tipo de raciocínio é tomado como *objeto* do conhecimento. Mas, ao implementar tal funcionamento para estabelecer uma prova ou resolver um problema, seu estatuto passa a ser o de *ferramenta*, pela aplicação funcional e utilitária a que está submetido no conjunto da atividade intelectual. E quando se trata do ensino-aprendizagem, torna-se importante atentar ao fato de que esses dois âmbitos operacionais estão em jogo e devem ser levados em conta. Entender o funcionamento da demonstração exige conhecer os passos dedutivos a que ela obedece, mas quando a tarefa é demonstrar um teorema, é preciso também aplicar esse conhecimento.

Dessa forma, no âmbito do ensino-aprendizagem da geometria, é preciso reconhecer a imposição de uma ruptura, uma mudança no estatuto epistemológico dos objetos matemáticos. A geometria prática, aquela em que se traçam figuras dá lugar à geometria dedutiva em que se deve provar as propriedades das figuras. O sujeito-prático, orientado pela matriz do saber-fazer, cujo critério é o da eficácia, cede lugar ao sujeito-teórico, cuja atividade é orientada por um conhecimento que se ocupa em justificar, em que o critério é o rigor. Isso, porque “o rigor como um fim em si é estranho à prática, ele é uma preocupação do saber” (Balacheff, *idem*, p. 156). A produção de uma prova tem por base a análise das possíveis contradições, e “uma prova rigorosa e definitiva é uma prova que não será refutada. E até, para alguns, uma prova que não seja refutável” (*idem*).

O aspecto da decisão é central no funcionamento da prova demonstrativa, uma vez que, aí, reside o caráter necessário que lhe é peculiar. No caso da demonstração matemática, “a tomada de uma decisão se legitima por afirmar o seu caráter necessário, e assim se distingue de outras decisões *possíveis* por causa da adequação ou da validade” (Balacheff, *idem*, p. 156, grifos do autor). Essa distinção é central, quando se considera a passagem das provas pragmáticas às provas intelectuais e, em síntese,

A prova pragmática está tomada hipoteticamente pela singularidade do evento que a constitui, falta-lhe aceitar o caráter genérico. Ela é ainda tributária de um contingente material: ferramentas imprecisas, falta de funcionamento.

A prova intelectual mobiliza uma significação contra uma outra, um julgamento contra um outro, uma racionalidade contra uma outra. (Balacheff, *idem*, p. 157)

Enquanto a prova pragmática está fundada sobre a ação efetiva e implementada a partir de representações dos objetos matemáticos, as provas intelectuais, contrariamente, são separadas da ação e se inscrevem com o uso da linguagem discursiva exprimindo os objetos, suas propriedades e relações.

No que diz respeito ao uso escolar, de modo geral a demonstração está associada à idéia de desenvolver uma prova, ou seja, um encaminhamento centrado no agir de quem resolve o problema e, portanto, deve operar segundo as regras do raciocínio dedutivo. Para isso, torna-se necessário reconhecer a matemática enquanto um campo teórico ou, dito de outro modo, o trabalho com demonstrações exige operações intelectuais específicas e formulações peculiares,

caracterizando um caso em que o próprio conhecimento torna-se objeto da reflexão e do discurso.

4.2 Uso específico para a linguagem

Para construir o texto de uma demonstração, o uso da linguagem cotidiana não é suficiente. A passagem da linguagem cotidiana para a linguagem funcional torna-se uma exigência com respeito à forma de enunciar os objetos matemáticos. A ‘*descontextualização*’³, significa retirar o objeto do “lugar efetivo da realização das ações, de modo que ele aceda à classe dos objetos independentemente de circunstâncias anexas ou episódicas ligadas à aparição deles” (Balacheff, idem, p. 159). A outra, a *despersonalização*, quer dizer separar ação e sujeito que a realiza, pois com respeito à ação o sujeito é aquele “de quem esta deve ser independente” (idem). E a ‘*destemporalização*’ indica que as operações estão liberadas das datas e do seu período de duração. “Esse processo é fundamental na passagem do universo das ações ao das relações e operações” (idem). Além disso, o texto demonstrativo expõe as afirmativas ou proposições de modo organizado, obedecendo a um conjunto de regras bem determinadas, que exigem também um uso específico da linguagem.

Observar o funcionamento da demonstração leva ao reconhecimento de uma sequência de passos que conduzem das proposições de entrada, dadas como premissas ou como hipóteses, à proposição da conclusão. Assim, as proposições têm um lugar destinado previamente a elas no funcionamento dedutivo. Com isso, não basta considerar apenas o conteúdo de cada proposição, é preciso entender que uma mesma proposição pode ser conclusão em um teorema e ser hipótese em um outro.

Duval (1991, p. 235) alerta para a necessidade de se diferenciar conteúdo e estatuto operatório das proposições, no funcionamento do raciocínio dedutivo implementado nas demonstrações: existe um estatuto operatório fixando três possibilidades para as proposições, quando se considera um *passo* do

3 As palavras *décontextualisation* e *détemporalisation* constam no texto original e são referidas por mim como *descontextualização* e *destemporalização*, embora não constem tais termos no Novo Dicionário Aurélio, 1ª edição, 7ª reimpressão, s.d., nem no Dicionário Houaiss, Editora Objetiva, 2001.

funcionamento dedutivo, a saber, proposição de entrada, regra de inferência ou proposição de conclusão, conforme mostra o esquema abaixo.

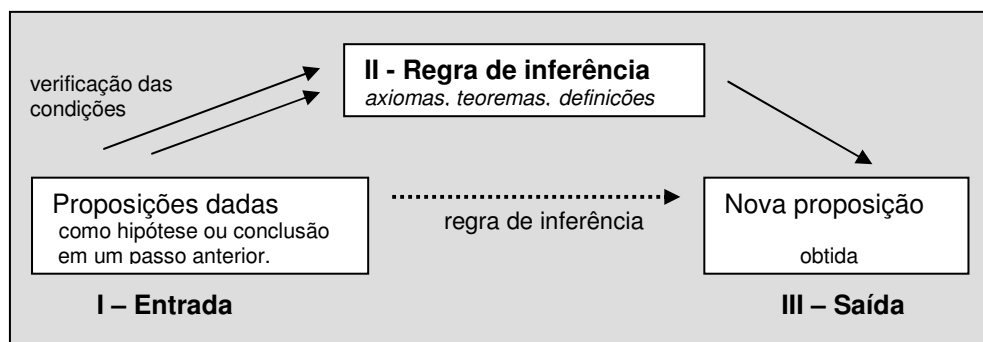


Fig. 1 Funcionamento ternário de um passo dedutivo

Muito frequentemente o raciocínio dedutivo não se limita a uma única inferência, mas a um encadeamento de inferências. Existe uma condição para que se realize essa passagem, ou seja, “para que dois passos da dedução se encadeiem em um mesmo raciocínio, é preciso que a conclusão do primeiro passo seja a condição de aplicação da regra de inferência do segundo” (Duval, *idem*, p. 239). Com isso, o autor chama a atenção para dois níveis de organização a serem considerados no texto, quando se observa o desenvolvimento do raciocínio dedutivo. O primeiro trata de um passo da dedução em que o uso dos conectores que indicam as inferências lógicas, marca o estatuto operatório das proposições. O segundo indica a retomada das proposições no encadeamento entre dois passos dedutivos sem que, entretanto, o uso do termo de ligação tenha valor lógico. São expressões referindo explicitamente uma proposição de entrada que foi conclusão no passo antecedente. Os passos dedutivos são marcados textualmente pelas conjunções.

Considerar a demonstração enquanto um processo de prova exigiu atentar para o funcionamento e organização da demonstração matemática que, no geral, requer um estatuto particular do conhecimento. Implica pontos chave como a natureza do conhecimento, a validação do conhecimento que repousa sobre um tipo específico de raciocínio, o silogismo, e a formulação do conhecimento que leva a um uso específico da linguagem. A comunidade científica disponibiliza e faz uso desses conhecimentos, constituindo-os e os reconhecendo como uma teoria que fundamenta o rigor matemático.

4.3 Demonstração matemática e argumentação

Nem sempre se demonstra como em matemática, ao contrário, antes de tudo, se argumenta e, considerando o aspecto do convencimento, a demonstração matemática está inserida no campo da argumentação.

Em Aristóteles todo silogismo é um discurso. No *Organon*, ele trata de dois tipos de silogismo, o analítico e o dialético. O silogismo analítico consta nos *Analíticos Primeiros* e *Analíticos Segundos*, conferindo ao autor o título de pai da lógica formal. Mas em três livros do *Organon*, Aristóteles estuda os raciocínios dialéticos, ou seja, *Tópicos*, *Retórica*, e *Refutações sofísticas*, o que o torna o pai da argumentação. No silogismo científico, a verdade é uma propriedade das proposições, independente da opinião das pessoas, os raciocínios demonstrativos são impessoais. Mas um raciocínio dialético pressupõe premissas que são constituídas por opiniões geralmente aceitas.

König (2002) diz que, conforme a definição aristotélica, a dialética é um método que habilita a raciocinar sobre todo problema proposto, a partir de premissas aceitas, plausíveis. E que é difícil o entendimento do *Tópicos* como também da *Retórica*, porque Aristóteles não estabeleceu claramente a diferença entre premissas *εἰχός* (plausíveis) e *ἐνδοξος* (aceitas), sendo também possível substituir uma pela outra (p. 117-118). Com isso, resulta que “1) Aristóteles define o silogismo retórico, portando a entimema como um silogismo *ἐξ εἰχότων* e que, 2) ele define o silogismo dialético como um silogismo *ἐξ ἐνδοξων*” (p. 118).

Historicamente a argumentação enquanto a arte de convencer cai em descrédito em favor da argumentação demonstrativa.

Em um quadro geral, durante a Idade Média, a retórica fica reduzida ao estudo das figuras de estilo, ligando-se à eloquência, e forma juntamente com a gramática e a dialética o *trivium*, componente curricular das universidades da época. Mas, originalmente, em Aristóteles ela cobria três campos, a saber, uma teoria da argumentação que constitui o eixo da sua articulação com a lógica demonstrativa e com a filosofia, uma teoria da elocução e uma teoria da composição do discurso. Há, portanto, uma redução na abrangência da retórica, ela fica reduzida a uma de suas partes.

A arte do debate, com a filosofia medieval que favorecia as controvérsias sob uma influência forte do cristianismo, buscava conciliar a razão e a fé, sendo a razão identificada com a filosofia aristotélica e estudada em textos religiosos. Os debates se efetuavam em quadro previamente definido, sem riscos. A instauração do espírito de controvérsia não acontece na Idade Média, mas sim na modernidade (Gil, 1986, p. 27).

Por ocasião do Renascimento, o desenvolvimento da ciência também contribui para a desvalorização dos estudos retóricos. Por exemplo, Pascal em, *A arte de persuadir*, enfatiza as regras da demonstração geométrica face às da argumentação retórica porque seria difícil conciliar a diversidade de posições pessoais, dizendo “eu não sei se há um meio de dar as regras firmes para conciliar o discurso com a inconstância dos nossos caprichos” (cf. Douaire, Hubert, 1999, p. 31). O trabalho de Galileu também exemplifica a argumentação científica baseada em um método de pesquisa que busca o rigor e, nesse embate, as reações das autoridades religiosas do século XVII mostram as limitações características da argumentação e da retórica dessa época (sobre isso ver Gil, obra citada).

Descartes tem uma atuação importante no descrédito da argumentação, ao estabelecer o critério da evidência e da certeza como a única garantia da verdade, ou seja, sujeitando a filosofia à exigência matemática. A partir de Descartes, a argumentação não é um objeto de estudo privilegiado pela filosofia moderna e, no século XIX, a lógica que desde Aristóteles era objeto de estudo da filosofia, migra para o campo da matemática, constituindo o ramo da lógica formal. Com isso os modos habituais de pensar e de argumentar são desvalorizados, “a idéia de uma lógica ‘natural’, não matemática, é abandonada e a argumentação que se ancorava na lógica sem a limitar, não tem mais espaço teórico para existir” (Douaire, Hubert, idem, p. 32).

Contemporaneamente, a argumentação se revitalizou a partir dos anos 50 do último século, com os trabalhos de Toulmin e Perelman. Para Toulmin, quanto mais a lógica se formaliza, menos ela é capaz de avaliar as argumentações reais. Perelman pesquisa sobre as condições da adesão de um auditório e afirma que, se apenas a demonstração formal é racional, então todos os debates e valores cairiam na irracionalidade, nada se oporia à violência, sendo preciso, então, novamente tornar legítimo o plausível, as provas convincentes e não somente as provas

coercitivas, porque o lugar do domínio dos debates humanos deve ser também o lugar da razão (Douaire, Hubert, p. 33).

Mas, o retorno da argumentação deve ser entendido fora do campo do pensamento puro, e sim em correlação com sua significação política, porque Perelman se preocupou com os valores morais e com modos de fundamentá-los, trazendo propostas alternativas no contexto da Segunda Guerra Mundial.

Mesmo tendo sofrido modificações ao longo da história, a demonstração conservou três características: o caráter a priori, que permite fazer a economia da experiência; o caráter necessário, que supõe o respeito a leis rígidas e o caráter universal, pois os objetos sobre os quais o raciocínio se baseia têm um estatuto de abstração (Arsac, 1987). Com os gregos antigos, a demonstração tinha por objetivo não permitir qualquer objeção em cada uma das suas etapas. A partir do século XVII, com os lógicos de Port-Royal, como Arnauld, critica-se os geômetras da antiguidade por suas demonstrações sintéticas que não revelavam como uma propriedade tinha sido descoberta. Sob o ideário cartesiano, os filósofos destacaram que o objetivo da demonstração é, antes, esclarecer porque um enunciado é verdadeiro, que convencer. Nesse caso, o procedimento analítico, ou seja, partir do que é procurado até chegar às propriedades conhecidas se distingue da síntese, que expõe o encadeamento lógico (Douaire, Hubert, idem). No plano didático, uma característica marcante é que, consta nos livros, um conjunto de conteúdos cuja exposição elimina os problemas que estão na origem do desenvolvimento dos conhecimentos.

Mais recentemente, desde os anos 60, os trabalhos com a demonstração no campo didático têm se multiplicado em direções básicas: uma delas é a distinção entre argumentação e demonstração, enfatizando aspectos como língua formal e natural, regras dessa linguagem, natureza axiomática das premissas, encadeamento dos procedimentos utilizados; outra, são trabalhos na área da sócio-psicologia sobre a persuasão, a relação entre argumentação e raciocínio (Douaire, Hubert, idem, p. 35-36).

A atividade da demonstração escolar possui características específicas, diferenciando-se do trabalho de um especialista. Enquanto objeto do ensino, principalmente, ela está desvinculada da necessidade de validação. Nesse sentido, Arsac (1996) enfatiza que o ensino-aprendizagem da demonstração deve ser precedido do trabalho com provas, de modo geral, com a argumentação que se usa

habitualmente, para que o caráter necessário da validação matemática seja uma questão que se ponha aos alunos, não uma exigência do professor. Além disso, comumente esse objetivo está ausente do ensino, salvo se houver de fato um problema a ser superado e, então, o nível de rigor das justificativas deve ser estabelecido entre professor e aluno. Ou seja, o que se toma ou não, como axioma nos assuntos estudados. Esse autor ressalta que demonstrar marca uma mudança no estatuto da atividade matemática, “o aluno torna-se um teórico enquanto ele era um prático” (Arsac, 1987, p. 307).

Pesquisadores atuais, nessa área, admitem ser um grande desafio tratar didaticamente essa atividade matemática. A tendência aponta no sentido de que a demonstração surja em um contexto mais amplo, o da argumentação, que inclui também as provas pragmáticas. Estas subentendem a prática de modos habituais de pensar e argumentar, podendo ser tomadas como favoráveis no sentido de que mostram a validação de enunciados e a prática do consenso.