3 Do *mostrar ao demonstrar*

O conceito de demonstração matemática foi sendo construído, ele é resultante do legado deixado pelo percurso cultural dos povos. As práticas matemáticas têm um momento de mudança marcante com os antigos gregos quando eles, como dizem Lelouard e outros (1989), operam a passagem do *mostrar para o demonstrar*. Os *Elementos* de Euclides, registro que nos chegou desse salto nas práticas matemáticas, é uma obra central para se entender pontos implicados nessa mudança. Dessa forma, o Capítulo 3 trata dos preceitos aristotélicos que caracterizam a demonstração geométrica. Consequentemente, surge a questão metodológica síntese-análise. Também surge como característica do encaminhamento demonstrativo cada vez mais se afastar do apoio da evidência visual em favor do tratamento discursivo. Nesse sentido, o uso da figura aparece como um ponto que merece atenção, sendo explorado a partir de textos matemáticos da China antiga, de Euclides e de Arquimedes.

3.1 Origens metodológicas

A demonstração matemática se fundamenta no pensamento de Aristóteles. Ela repousa sobre o raciocínio dedutivo, que é base do silogismo e fundamenta em suas origens o discurso científico, sendo os *Elementos* de Euclides um exemplo canônico de aplicação desse preceito. O modelo euclidiano sobreviveu milênios. Mas, a partir do Renascimento, a onda crítica que resulta em publicações que são verdadeiras releituras dessa obra, remete ao confronto entre o método sintético e o analítico.

No séc. XVII, é grande o interesse pelo método analítico e pela inovadora aplicação das equações algébricas à demonstração em geometria plana. Nesse percurso foi preciso distinguir duas linhas de trabalho “a análise, que consiste em descobrir a demonstração, e a síntese, que consiste em construir a demonstração sob a forma dedutiva” (Barbin, 1989, p. 129).

Aristóteles nasceu em 384 a.C., foi contemporâneo e mesmo aluno de Platão. Fundou o Liceu em 355, onde ensinou por 12 anos, após o que deixou Atenas e morreu em 322 a.C. Sua obra não é questionada quanto à autenticidade, embora se discuta a ordem de composição, que não corresponderia àquela tradicionalmente seguida pelos editores. *Os Analíticos Primeiros e Segundos* seriam os últimos livros compostos. Aristóteles analisa diferentes modos de raciocínio para descobrir quais princípios os regem. Estando esses princípios estabelecidos, ele privilegia a demonstração ou dedução que vai dos princípios às consequências, procedimento que caracteriza o método sintético (Lelouard e outros, 1989, p. 164). Desse modo, o pensamento científico em conformidade com a filosofia aristotélica admite um modelo lógico baseado em definições, postulados e axiomas.

O capítulo inicial de *Os Analíticos Primeiros* apresenta a definição[1] "o silogismo é um discurso em que, se algo é estabelecido por meio de proposições necessárias, se encontra (resulta) outra coisa do que aquilo é" (König, 2002, p. 80). Por exemplo, no silogismo – "Toda pessoa é mortal. Caio é uma pessoa, logo Caio é mortal" – tem-se como hipótese – "Toda pessoa é mortal e Caio é uma pessoa". E o discurso é construído de tal modo que da hipótese resulte algo necessário e diferente dela. No exemplo resulta – "Caio é mortal". As premissas são as primeiras proposições. Ou seja, a primeira premissa no exemplo é, "Toda pessoa é mortal", e a segunda, "Caio é uma pessoa". O que necessariamente resulta depois, "Caio é mortal", chama-se a sentença conclusiva. O exemplo mostra que em todo silogismo há três termos. O discurso se estabelece com duas premissas e uma conclusão. Aristóteles diz ser o silogismo um discurso em que se algo é estabelecido, outra coisa resulta disso como conclusão. A conclusão resulta de modo necessário.

As premissas são a necessidade, ou seja, é preciso afirmar algo sobre uma coisa. O que se toma para deduzir outra coisa são as premissas. Se a premissa é algo necessário, logo a conclusão também será. Quando a premissa é uma possibilidade, caso da prova retórica ou *entimema*, o que dela for deduzido também será uma possibilidade. Ou seja, aquilo, do qual se deduz outra coisa, são

[1] Desenvolvo o tema silogismo com base em König, J., *Einführung in das Studium des Aristoteles: an Hand eine Interpretation seiner Schrift über die Rhetorik*, 2002, p. 79- 105.

as premissas, os antecedentes. E a ciência deduz um necessário do necessário e nisso repousa a essência legítima da ciência, a essência da própria prova, da própria demonstração. Ao contrário, a partir do provável, a *entimema* conclui alguma coisa sobre o provável.

O necessário se diferencia. Por exemplo, a proposição “A pessoa é mortal.” é exata e em algum sentido deve ser o necessário. De fato, aqui, a discussão do necessário não é a mesma feita quando se tratou do silogismo, daquela necessidade da sentença conclusiva concisa que consta do silogismo. A pessoa é mortal porque ela é o que é em essência ou, é em sua essência que a pessoa fundamenta o que ela é. Mas se alguém diz, Carlos tem fome, isso significa que Carlos está de algum modo faminto. Indica um estado em que Carlos se encontra, porque não é da sua essência sempre ter fome. Esse não é um princípio geral. E quem quiser estabelecer, “Caio não é mortal”, vai cair em contradição.

O silogismo científico em Aristóteles tem seus elementos teóricos definidos nos *Analíticos Segundos.* Os axiomas constituem os princípios comuns a todos os raciocínios. A hipótese afirma a existência, enquanto as definições não se pronunciam sobre isso. As definições são indemonstráveis por causa da impossibilidade de se demonstrar a essência. Note que a verdade formal necessária nesse modo de demonstrar, se alia à verdade material das premissas e da conclusão. Logo, esse aporte ao material se inscreve na visão geral da Grécia antiga e da ciência em seus primórdios. O fato de nem tudo ser demonstrável, caso dos axiomas e definições, faz da intuição um auxiliar do rigor demonstrativo, caso presente em Euclides ao apresentar as noções comuns.

Os preceitos aristotélicos admitem o raciocínio por absurdo que parte de uma premissa falsa, e que Aristóteles chama de redução ao absurdo. Algumas características desse raciocínio são importantes por explicitarem como se opera com as premissas. Esse tipo de silogismo estabelece a lei do terceiro excluído, princípio segundo o qual não é possível afirmar e negar ao mesmo tempo um predicado de um sujeito. Apenas a afirmação ou a negação são possíveis. Logo, em todo raciocínio por absurdo não é o contrário, mas a contradição que se deve tomar por hipótese. Por exemplo, a prova euclidiana da incomensurabilidade da diagonal do quadrado com o lado, se baseia em que os números ímpares resultariam iguais aos números pares, admitindo a diagonal comensurável. Ao admitir a comensurabilidade da diagonal chega-se a uma contradição – número par é igual a número ímpar – o que é absurdo. Outro aspecto desse tipo de silogismo, é que se prova hipoteticamente porque uma conclusão falsa decorre da proposição contraditória “a diagonal é comensurável”. A hipótese não é contraditória, em si, ela é contraditória por causa de outra proposição, o teorema de Pitágoras, cuja verdade é demonstrada (Lelouard e outros, 1989, p. 168). Pascal vai comentar esse fato sutil pois, aqui, ser hipotética significa que ela convence o espírito de que as coisas não poderiam ser diferentes. A raiz quadrada de dois não é um inteiro natural, mas o que ela é realmente a demonstração não estabelece. Assim, esse tipo de raciocínio não teria a clareza do outro tipo em que se parte de uma premissa verdadeira (idem).

Mas, como já dito, a intuição tem lugar na demonstração geométrica porque os princípios desta ligam-se às coisas. Explorar essa relação nos leva a tratar de outro tipo de raciocínio, a indução, que, conforme Aristóteles, segue um movimento contrário ao do pensamento dedutivo. Esse pensador define indução como a passagem do particular ao universal e, assim, contrapõe o raciocínio por indução ao raciocínio por dedução. A indução em sua marcha inversa é a fase da pesquisa dos princípios e dos porquês. Tem-se ainda que a ordem do conhecimento por dedução não está conforme a ordem da natureza. Os princípios universais, as causas anteriores, por natureza não nos são sempre perceptíveis e o que é mais conhecido e perceptível para nós são sempre as causas particulares, mais próximas das sensações. Daí, o silogismo científico, o instrumento ideal da ciência, não seria suficiente, pois uma pesquisa prévia dos princípios com o uso da indução, é indispensável. A indução em Aristóteles procura uma lei explicativa universal, começa com a experiência e tem o seguinte desenvolvimento: “passa do fato à lei” (Lelouard e outros, 1989, p. 172), sendo esse um ponto problemático do modelo de rigor. Aristóteles descobre e reconhece os limites das suas exigências de rigor e se vê forçado a dar lugar, nesse sistema, à intuição, porque a pesquisa dos princípios universais supõe a indução, que é possível somente pela sensação.

Segundo Aristóteles, fica estabelecido que os princípios não são inatos, são adquiridos, o que refuta a hipótese platônica, como exposto no famoso exemplo do diálogo com o escravo Meno. Logo, se os princípios são adquiridos isso seria ou por conhecimentos anteriores, o que não vale porque eles são os primeiros conhecimentos, ou por aptidão e esse é o caso. É pela posse de uma percepção sensível que se adquire memórias de uma experiência e isso vai permitir a abstração de uma noção. Na origem de todo conhecimento está a indução produzida pelo acúmulo de sensações, repetidas e memorizadas. Mas quando Aristóteles diz ser a dedução o raciocínio característico da ciência, conclui-se que os resultados expostos prevalecem sobre a pesquisa, o que será alvo de críticas no Renascimento.

Por causa da forma sintética, obras como os *Elementos* de Euclides não revelam os métodos de descoberta, de invenção, de pesquisa, não apresentam o papel interativo entre análise e síntese. Mesmo assim, o livro de Euclides significou a construção teórica matemática nunca antes realizada. Significou o grande salto na passagem do *mostrar ao demonstrar* (Lelouard e outros, 1989, p. 155).

Os textos que nos chegaram e que contêm com mais detalhes a análise e a síntese, são os *Prolegomenos* da coleção matemática de Pappus, fim do séc. III da nossa era. Na concepção de Pappus, a análise é um procedimento para descobrir a prova e, em relação à prova demonstrativa, ela segue um movimento inverso. Uma primeira significação para a análise-síntese na matemática grega antiga, refere-se às operações aritméticas. Síntese indica somar e análise, passar de uma unidade a outra inferior. Assim, se procede na contagem em graus, decompondo-os em minutos e segundos. O mesmo acontece com a soma 1/3 + 1/4 que se reduz a frações com denominador 12 para depois serem somadas (idem, p. 174). E os autores comentam como a partir disso, a matemática grega antiga foi encaminhada,

> Pode-se pensar que os geômetras gregos chegaram, assim, a chamar por "análise" a operação que consiste em reconhecer os elementos de uma demonstração, e por "síntese" a construção dessa demonstração pela combinação de seus elementos na ordem fornecida pela análise. Pode-se então conceber que as operações concretas deram lugar não a operações aritméticas, mas que elas foram transferidas a operações mais gerais – modos de raciocínio, modos de demonstração. (Lelouard e outros, 1989, p. 174)

Conforme Schubring (1996), as definições de método sintético e analítico ganharam um "caráter técnico". Dentro de um "senso comum" (grifos do autor) o método sintético acabou sendo identificado àquele dos *Elementos* de Euclides, com a geometria elementar e com operações sobre figuras, e a análise com a álgebra e com operações aritméticas. Essas idéias serviriam depois ao desenvolvimento das críticas aos *Elementos* de Euclides, iniciadas com Ramus na França renascentista (idem, p. 32). Com a Revolução Francesa, a controvérsia síntese-análise ganha importância por fornecer subsídios aos modelos de escolarização elementar que se instauram. A *Encyclopédie*, obra importante do pensamento ocidental moderno, traz um artigo de D´Alambert, *Elementos das ciências,* em que ele se mostra favorável ao uso do método analítico na composição do livro-texto, "pois este remete das conseqüências conhecidas aos princípios desconhecidos e quem generaliza aqueles, chega a descobrir estes" (D´Alambert, cf. Schubring, idem, p.33). Adequar-se também ao ensino, significou um desdobramento novo para o método analítico que, até então vinha sendo indicado para a descoberta, para a invenção.

Com o visto até aqui, o desenvolvimento da demonstração implica a interação entre pragmático e teórico. Esse aspecto pode ainda ser explorado sob o seguinte encaminhamento – a evidência visual necessariamente deve ser superada à medida que a questão matemática torna-se mais complexa. E essa condição permite avançar no percurso do intuitivo ao discursivo subentendido no desenvolvimento da demonstração.

3.2 Exemplificando a passagem *do mostrar ao demonstrar*

Rouche (1989) apresenta resultados de uma pesquisa sobre os modos de entendimento das situações matemáticas por alunos, que vão desde as ações mais intuitivas do mostrar até à expressão discursiva do pensamento demonstrativo. Para isso, ele trabalha com a igualdade entre triângulos a partir de um jogo infantil e com a demonstração de um teorema dos *Elementos* de Euclides, acabando por estabelecer três diferenças básicas entre os dois casos. A demonstração de Euclides procede como a seguir,

> Proposição: Dois triângulos são iguais se eles têm um ângulo igual compreendido entre os lados correspondentes.

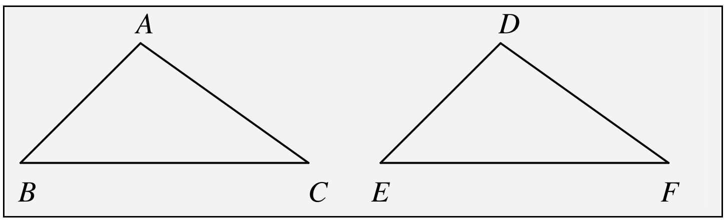


Fig. 2

Para demonstrar o teorema acima, Euclides, basicamente considera dois triângulos particulares *ABC* e *DEF* (fig.2). Em primeiro lugar, supõe a igualdade dos ângulos *A* e *D* e dos lados correspondentes *AB* = *DE*, *AC*=*DF*. Sobrepondo então o primeiro triângulo ao segundo, de modo que o ponto *A* caia sobre o ponto *D* e o lado *AB* tome a direção do lado *DE*, constata-se sucessivamente, conforme a hipótese, que *B* cai sobre *E*, *AC* toma a direção de *DF* e, finalmente, *C* cai sobre *F*, o que completa a demonstração.

O jogo infantil consiste de peças recortadas que passam por vazados que a cada uma delas correspondem. Supondo tratar-se dos dois triângulos da figura 1, a criança em uma série de manobras não previsíveis, aproxima o triângulo do vazado até chegar às figuras coincidentes. "A correta superposição das figuras será constatada, raramente enunciada", diz Rouche (1989, p. 11). Ele explica que, nesse caso, o entendimento das situações se manifesta pela percepção global de um conjunto de circunstâncias materiais e por uma ação concreta, imediata, que revelam capacidades sensório-motoras. O entendimento não é enunciável, ao contrário, ele é irredutível a uma série de raciocínios que possam ser previamente repetidos ou justificados. Essas considerações permitem destacar três diferenças entre os procedimentos característicos em uso no jogo infantil e na demonstração do teorema.

A primeira diferença, diz respeito ao objetivo. No caso da criança ela quer apenas fazer passar a peça triangular pelo vazado, enquanto que, em Euclides, a intenção é mostrar que os triângulos podem ser sobrepostos. Ou seja, entre os dois triângulos há uma relação de igualdade já prevista pelo axioma "Duas coisas que coincidem uma com a outra são iguais entre si". A segunda diferença, e a mais importante, é que o teorema se sustenta além dos dois triângulos da figura. A validade do teorema se estende a todos os pares de triângulos que satisfaçam as hipóteses. Assim, os dois triângulos da figura têm um papel de *representantes* de todos os pares de triângulos possíveis. Mas nesse caso, ainda existe um afastamento do pensamento matemático fundado sobre símbolos arbitrários, pois os *representantes* mantêm uma relação estreita com os objetos *representados* (grifos meus). Segundo o autor, passar do caso particular para o geral, "essa possibilidade é constitutiva da prova do teorema" (Rouche, 1989 p. 12).

Finalmente a terceira diferença é que o teorema, ao contrário do que acontece no jogo infantil, descreve os objetos e relações matemáticas usando um encadeamento de palavras. O teorema é construído discursivamente, o jogo infantil, não. Em síntese, temos em Euclides um objetivo teórico em que a generalização e a base discursiva são elementos necessários, ao contrário do que ocorre no jogo infantil, em que se pode dizer que o objetivo é prático. Seguindo explorando essas idéias, é possível particularizar especificidades do *mostrar* e do *demonstrar* a partir de um exemplo clássico – O diálogo entre Sócrates e Meno.

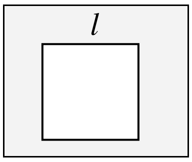
3.2.1 A complexidade do problema

O julgamento à primeira vista é um caso de pensamento imediato que pode se apresentar nas situações matemáticas, permitindo que uma proposição seja vista como evidente, ou seja, que se alcance o entendimento imediato do resultado matemático em foco. Dada uma figura, o pensamento não pode percorrer todas as figuras, já que elas são infinitas, mas ele acede potencialmente a todas as figuras imagináveis. Rouche (1989) sintetiza essa questão no caso de situações matemáticas. Ele diz que duas condições parecem necessárias e suficientes para que uma proposição seja vista como evidente. A primeira é que se possa discernir à primeira vista a aplicação sobre um caso particular e a segunda, que o pensamento se engaje sem embaraço na imaginação de todos os casos possíveis (idem, p. 14).

Assim, a *evidência* diz respeito à proposição considerada em seu percurso completo, ou seja, engloba todos os casos que satisfazem as hipóteses (idem, p. 14). Mas certamente tais condições não são absolutas já que o que se tornou evidente para uma pessoa pode ser menos evidente para outra. Pode ainda acontecer ser o sentimento de evidência enganoso, como no exemplo clássico dado por Platão, no livro Meno, quando do diálogo entre Sócrates e o escravo, em que a discussão matemática parte da resposta errada dada pelo aprendiz,

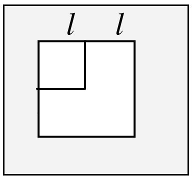
> Proposição: Para construir um quadrado cuja área é o dobro da área de um quadrado dado, é suficiente dobrar o comprimento do lado do quadrado inicial.

A passagem, como descrita por Platão no diálogo *Meno*, faz uso de uma igualdade matemática, mas visando provar um princípio filosófico da época. Sócrates deve demonstrar a Meno a teoria da reminiscência da alma, segundo a qual cada pessoa traz consigo todo o conhecimento do qual pode não estar consciente. Para tanto, é preciso que se mostre a possibilidade do escravo recuperar, lembrar o teorema da geometria, sendo suficiente encaminhar uma série de perguntas e observar a figura. Sócrates faz apelo ao raciocínio do interlocutor, mas a participação da evidência visual tem um papel chave na demonstração (Lelouard e outros, 1989, p. 158-159).



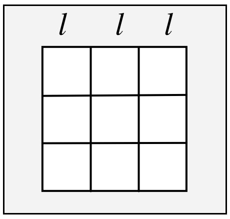
Partamos de um quadrado de dois pés de lado e deve-se descobrir como construir um quadrado cuja superfície seja o dobro. Sócrates mostra quadrado base da demonstração, traçando a figura (3a).

Fig. 3a



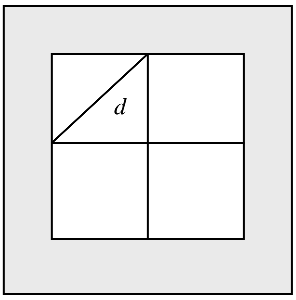
O escravo propõe dobrar o comprimento do lado e Sócrates mostra que é um erro, traçando uma nova figura (3b). Dobrando o lado, se obtém uma superfície que é o quádruplo da inicial.

Fig. 3b



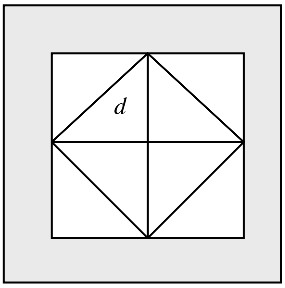
Como é preciso um comprimento superior a dois pés, mas inferior a quatro pés, o escravo comete o erro clássico de propor um lado de três pés. Sócrates mostra com uma terceira figura que a superfície seria então de nove pés.

Fig. 3c



Ele faz as três figuras e constrói uma nova (3d) e traça a pergunta: "Essa linha tirada de um ângulo ao outro corta não em dois cada um dos quatro espaços?"

Fig. 3d



Ao fazer o escravo raciocinar sobre as superfícies assim divididas, ele lhe permite encontrar a resposta certa: o quadrado construído sobre a diagonal do quadrado base tem o dobro da superfície do quadrado base.

Fig. 3e

A resolução errada que o Meno apresenta imediatamente pode ser entendida como advindo da maior dificuldade do problema: a percepção visual da razão entre os comprimentos dos lados dos dois quadrados e a razão entre as respectivas áreas. O primeiro exemplo visto, sobre a igualdade entre os dois triângulos, ilustra um caso mais simples para a percepção à primeira vista, porque exige apenas verificar a igualdade entre comprimentos. Porém, no caso da igualdade entre as áreas dos dois quadrados, a relação matemática é mais complexa e inviabiliza o entendimento imediato por meio da evidência visual.

Rouche (1989) destaca que mesmo em caso de erro, como no exemplo do Meno, as duas condições mencionadas anteriormente para que uma proposição seja evidente, são verificadas. A primeira condição, o discernimento à primeira vista, que reconhece a aplicação da figura em um caso particular, é verificada, embora o que a evidência visual evoca seja falso. A segunda condição, a generalização do caso particular, é também verificada, mas o que o sentimento de evidência estende para outros quadrados é um erro. Em resumo, cada um dos julgamentos à primeira vista é uma extensão das constatações feitas sobre uma ou algumas figuras, estende-se a um conjunto infinito de figuras e pode ser claro ou enganoso, falso ou verdadeiro (idem, p. 16). Ou seja, trata-se das inferências feitas do particular para o geral. Especialmente, na matemática, a indução não resulta de se reproduzir de modo exato uma figura, ou seja, de se repetir uma experiência sem mudar nenhuma das condições, mas, sim, de se obter uma informação válida para todas as variantes possíveis da situação considerada. Ao contrário do que acontece nas ciências naturais em que a indução diz respeito à possibilidade de se repetir um fenômeno, dado que as circunstâncias físicas sejam sempre as mesmas. A proposição abaixo permite avançar nessa discussão.

> Proposição: Para construir um quadrado cuja área seja o dobro da área de um quadrado dado inicialmente, basta tomar como lado do quadrado a ser construído, a diagonal do quadrado inicial. De fato, seja ao quadrado da fig. 4a. Sua diagonal o divide em dois triângulos isométricos que podem ser reagrupados formando um semi-quadrado, como na figura 4b. Daí decorre a solução, apresentada na fig. 4c.

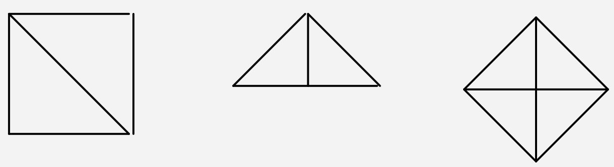


fig.4a fig. 4b fig. 4c

Fig. 4

O desenvolvimento da prova é construído a partir da sequência de figuras 4a, 4b e 4c que exibem as relações matemáticas que fundamentam a prova de modo evidente. Segundo Rouche (1989), quando as proposições não satisfazem às duas condições – a evidência a partir de uma figura particular e a extensão potencial pela imaginação a todas as figuras possíveis, ou seja, a generalização – forçoso será recorrer a evidências parciais e conseqüentemente a um encadeamento ordenado de idéias, para se chegar à evidência da proposição em foco (idem, p. 21). A figura, então, é dissecada em partes que exibem a sua estrutura, e essa forma de operar com a figura se aproxima mais do modo conceitual. Para que isso se suceda basta a evidência global não acontecer a partir do caso particular. Também, se um conjunto de figuras não evoca a imaginação de modo que ele seja obtido em sua extensão, torna-se necessário que a compreensão se dê pelas propriedades que o caracterizam, e novamente se dá o retorno ao modo conceitual. Nesse caso se constata e faz-se necessário atacar metodicamente a complexidade do problema. Tem-se caracterizado, nesse caso, como o trabalho conceitual opera e torna-se imprescindível.

Outro aspecto que Rouche (1989) destaca é que, nesse caso, o pensamento se desenrola no tempo, ou seja, a compreensão não é instantânea. A complexidade do problema exige dissecar a questão, resultando que a resolução descreve a seqüência de partes. A ação seqüencial é desenvolvida necessariamente em um período de tempo. O autor destaca ainda que, mesmo quando o encadeamento das evidências parciais se apóia sobre uma figura, ou sobre construções que devem ser feitas, ou sobre gestos como mostrar ou articular coisas, o recurso da linguagem se impõe. Logo, o tamanho da prova é um fator importante. Ele cita Descartes dizendo "as longas cadeias de raciocínios totalmente simples e fáceis, dos quais a geometria costuma se servir" e a seguir comenta que, afirmar serem raciocínios simples e fáceis merece algum comentário, mas só o tamanho já constitui um obstáculo para os iniciantes, pois no quotidiano não se está habituado a realizar tais esforços lógicos (Rouche, 1989, p. 22).

Arsac (1987) discute também os limites da evidência visual em função da complexidade matemática do problema. Essa problemática implica em passar de um estado em que a figura é uma ferramenta de prova, a um outro em que a geometria se torna a arte dos raciocínios exatos sobre figuras que podem ser enganosas. Especificamente no caso das grandezas incomensuráveis, é impossível constatar a incomensurabilidade com o uso de uma figura e ele diz que, ao contrário, a conclusão imediata é sempre pela comensurabilidade. Porque, na prática, sempre se pode medir com um mesmo instrumento o lado e a diagonal de um quadrado (idem, p. 280). "A incomensurabilidade apenas pode se referir aos seres matemáticos ideais e apenas se tornar objeto de uma demonstração" (idem, p. 280).

Uma síntese para o tópico *Exemplificando a passagem do mostrar ao demonstrar* será apresentada para destacar os principais aspectos da relação teórico-empírico subentendidos no desenvolvimento da demonstração. Serve como complemento ao que já foi discutido até aqui e à discussão que segue no próximo bloco sobre o uso da figura em textos históricos de demonstração.

3.2.2 A síntese do percurso *do mostrar ao demonstrar*

Lelouard e outros (1989) caracterizam, principalmente em geometria, a passagem *do mostrar para o demonstrar*,

> 1- É passar de um conhecimento a posteriori para um conhecimento a priori. O conhecimento a posteriori depende da experiência, ao contrário do conhecimento a priori, cuja certeza advém do raciocínio, da razão.
>
> 2- É passar da submissão aos dados do mundo sensível para um encaminhamento de outra natureza. A posição de expectador do mundo sensível dá lugar à exploração do desconhecido, pela inteligibilidade. Dessa forma, a demonstração matemática requer: a) um ponto de partida, os axiomas, considerado claro por todos; b) um encaminhamento dedutivo que percorre ordenadamente uma série de percursos intermediários; c) em cada passo, o assentimento do interlocutor garante a correção do raciocínio; d) uma vez postos os axiomas, não se tem que recorrer mais à intuição sensível, mas somente a regras da lógica.
>
> 3- É reverter a hierarquia entre a realidade e o idealizado. Mostrar é seguir a ordem que a realidade física, a natureza oferece à nossa observação. Demonstrar é voltar às costas para essa ordem que é substituída pela ordem das idéias.
>
> 4- É interiorizar o discurso da necessidade. Os gregos descrevem a necessidade no mundo sob a forma do destino, como o que não se pode mudar. O discurso da necessidade se transpõe para a matemática com a demonstração, pois o raciocínio rigoroso a que cada um interiormente deve estar submetido conduz ao bom conhecimento. Não é mais a construção e a contemplação de uma figura que se impõe, como uma lei de origem externa, à qual é preciso se submeter. Ao contrário, o rigor do raciocínio vai comandar a construção da figura. Um triângulo, um quadrado ou um círculo existem primeiro apenas no pensamento, são idéias. Para Platão as figuras sensíveis que representam as idéias, são traduções aproximadas das leis que as comandam. Ou seja, as figuras não são e nem nunca poderão ser

> exatas. Demonstrar é preferir o rigor do raciocínio à exatidão de uma representação.
>
> 5- É passar do particular para o geral. Demonstrar é transpor o caso particular de tal ou qual figura, pois não é apenas uma dedução, mas também uma indução. Demonstrar permite estabelecer conhecimentos novos e proceder às induções tornando a matemática uma ciência. (Lelouard e outros, 1989, p. 162-163),

Até aqui, tem-se que a presença da figura ocupa um lugar central no percurso *do mostrar ao demonstrar*. Ainda construindo esse percurso, a perspectiva histórica permite caracterizar a presença da figura em textos matemáticos antigos chineses, em Euclides e Arquimedes com o objetivo de trazer entendimentos sobre a textualização da demonstração geométrica elementar.

3.3 A figura geométrica em textos chineses antigos, em Euclides e em Arquimedes

Existe a possibilidade bem provável de documentos matemáticos originais dos chineses não conterem nenhuma figura (Chemla, 2005). A ilustração aparece depois, com o trabalho dos compiladores. Então como seriam esses registros? E como esses textos permitiriam um posterior uso de figuras? Já em Euclides, a principal característica do texto seria empreender o trabalho intelectual necessário para o encadeamento lógico de proposições admitidas previamente, e a inserção da figura no texto pode ser observada segundo esse objetivo. Arquimedes faz aplicações práticas de resultados matemáticos em suas descobertas, usando a pesagem de figuras geométricas. No livro, *O método,* ele apresenta provas de resultados matemáticos usando dois métodos distintos e destaca a diferença entre eles. O *método mecânico,* segundo ele, é útil para a descoberta dos teoremas, embora não forneça a prova dos teoremas. Já com o uso do *método geométrico* as provas são apresentadas conforme o padrão de rigor aceito àquela época.

3.3.1. A figura geométrica em textos chineses antigos

Quando se investiga o percurso da construção da demonstração ou métodos de prova em matemática a partir de estudos históricos, a etapa representada pelos textos chineses antigos pode ser caracterizada como essencialmente não discursiva, com base em operações que se fundamentam em evidências visuais. Exige olhar uma figura ou os arranjos feitos sobre a figura dada inicialmente e é pelo testemunho visual que se admite a prova do resultado matemático. Os procedimentos de prova presentes nos documentos chineses têm ainda a característica de valer para um caso particular sem se aplicar de modo evidente a outros problemas, embora seja possível identificar a busca por casos mais gerais, considerando o conjunto dos textos.

Porém, segundo Chemla (2005), autora que estuda a matemática na China antiga, *O livro dos procedimentos matemáticos*, obra chinesa antiga encontrada em recentes escavações, apresenta cálculos de áreas e volumes sem fazer apelo à ajuda visual. Com isso, ela levanta a suposição de que o lugar da figura na matemática chinesa antiga deve ser revisto, pois as figuras podem ter sido inseridas posteriormente nos textos, cujos originais não continham nenhuma figura. Em um artigo dessa autora, no qual me baseio, ela trabalha com o texto de dois comentadores, os comentários de Zhao Shuang sobre *O Gnomon de Zhou* e os comentários de Liu Hui sobre *Os nove capítulos*.

Uma compilação do livro *Os nove capítulos*, feita no primeiro século d.C., não contém qualquer referência à ajuda visual ou a qualquer figura geométrica específica. Mas em *O Gnomon de Zhou*, livro compilado um pouco depois, provavelmente no século III d.C por Liu Hui, consta no capítulo de abertura o que se pode identificar como a primeira referência a ajuda visual como suporte para o raciocínio matemático, no conjunto dos textos antigos chineses. Outra compilação do *Gnomon de Zhou* feita por Zhao Shuang, em 1213, já apresenta figuras (idem, p. 124-125). A versão mais antiga do texto *O gnomon de Zhou* contém esses comentários,

> Divide-se o retângulo para tomar como base a largura 3 e como altura o comprimento 4; isso que vai de uma quina a outra é 5. (Chemla, 2005, p. 136)

Para Chemla (2005), embora sem apresentar ou se referir a qualquer figura, a descrição do fragmento acima está em acordo com processos gráficos descritos mais tarde por Liu Hui, onde ele se refere a desenhar figuras no papel, a colorir, a rearranjar figuras cortadas. Pois, apesar de não fazer referência à figura o texto citado acima permite desencadear processos visuais enquanto se lê. Outro fato ainda é que esse mesmo fragmento deu origem a diferentes representações por meio de figuras. A autora sumariza o procedimento gráfico representativo do que diz o extrato como a seguir,

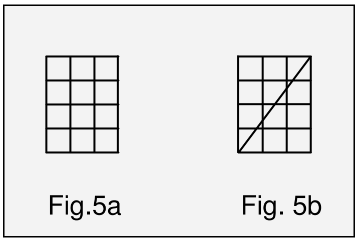


Fig. 5. Dividir o retângulo (à esquerda).
Divide-se o retângulo para tomar como base a largura e como altura o comprimento; isso que vai de uma quina a outra é 5. (à direita).
Esses são comentários que constam do texto chinês. (Chemla, 2005, p. 136)

Será visto, mais adiante, que em Euclides existe uma única figura dando suporte ao texto discursivo e a sequência de procedimentos procede de modo necessário. Também a possibilidade de um mesmo extrato gerar diferentes representações por meio de figuras, a falta de um procedimento relacionado com uma mesma seqüência de desenhos, são contrastes entre o uso de figuras em textos chineses e em Euclides. Conforme Chemla (2005), essas características são determinantes para o surgimento de um novo tipo de figura na literatura chinesa antiga (idem, p. 138).

O surgimento das figuras nos textos chineses antigos é discutida com base em um fragmento datado de 1213, a *Figura da Hipotenusa*, do compilador Zhao Shuang. Depois da passagem *Gnomon de Zhou*, Zhao Shuang discute o triângulo retângulo na passagem *Figuras da base, altura, quadrado e círculo*. Desse material, a autora focaliza a *Figura da Hipotenusa*.

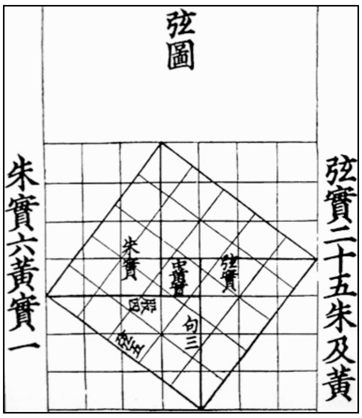


Fig. 6 Figura da Hipotenusa em o *Gnomon de Zhou*, p. 139

Traduzindo o texto do diagrama da figura 6, de cima para baixo, da direita para a esquerda, os dois caracteres no topo da figura, indicam *Isso é a figura da hipotenusa*. Procedendo, agora, da esquerda para a direita, nós lemos (idem, p. 140):

> O quadrado da hipotenusa, 25, é vermelho e amarelo.
> O quadrado da hipotenusa.
> A base é 3.
> A área central é amarela.
> (em caracteres na horizontal) A altura é 4.
> (na diagonal) Área vermelha. A hipotenusa é 5.
> As áreas vermelhas são 6. A amarela é 1.
> (Qian 1963, p. 17, reprodução da edição de 1213, conf. Chemla, idem, p. 140)

Chemla (2005) comenta que o procedimento acima parece reenquadrar as figuras com base no fato de que o argumento foi previamente desenvolvido, e essa é a característica inovadora. A figura forma a base para o desenvolvimento de uma série de algoritmos, ou seja, os algoritmos que se sucedem à figura decorrem apenas desta e as justificativas para a correção dos algoritmos são também extraídas apenas das figuras (idem, p. 141). O texto em foco apresenta outras passagens que justificam esse posicionamento,

> Figuras da base e altura, do quadrado e do círculo.
> (1) Base e altura sendo multiplicadas uma pela outra, somando esses resultados dá o quadrado da hipotenusa. Dividindo isso pela extração da raiz quadrada, dá a hipotenusa.
>
> (2*) Confiando na "Figura da hipotenusa" se pode considerar depois, a multiplicação da base pela altura, como duas amostras da área vermelha; dobrando esse resultado temos 4 amostras da área em vermelho. Tomando a multiplicação de um pelo outro, da diferença entre a base e a altura, que é a área central em amarelo. Adicionando uma amostra do quadrado da diferença (ao quarto quadrado obtido antes) também gera o quadrado da hipotenusa. (*Essa parte não consta no texto original).
>
> (3) Subtraindo o quadrado da diferença do quadrado da hipotenusa, dividindo o respectivo resultado, tomando a diferença como "divisor comum", dividindo isso pela extração da raiz quadrada resultante, como resto, temos a base. Adicionado a base à diferença dá a altura. (...) (idem, p. 142-143).
>
> (4) A razão pela qual quando se dobra o quadrado da hipotenusa e se subtrai disso o quadrado da diferença entre a base e a altura e, daí, resulta o quadrado da soma, é que se examinamos isso com a figura, dobrando o quadrado da hipotenusa preenchido pelo quadrado externo, aí está uma área amarela que é o excesso. Essa área em amarelo, em excesso, é o quadrado da diferença entre a base e a altura. Subtraindo disso (o resultado anterior) o quadrado da diferença e extraindo a raiz quadrada do resto correspondente, resulta o lado do quadrado externo maior. O lado do quadrado menor é a soma da base com a altura.

> (5) Levando a multiplicação dessa soma por ela mesma e então subtraindo isso do dobro do quadrado da hipotenusa e extraindo a raiz quadrada, resulta o lado do quadrado central em amarelo. O lado do quadrado central em amarelo é a diferença entre a base e altura. Subtraindo a diferença da soma e dividindo esse resultado dá a base. Adicionando a diferença *da soma e dividindo esse resultado,* dá a altura. (Chemla, 2005, p. 142-144)

Reproduzindo a figura 6 em cores, como indicado na edição de 1213, resulta a figura 7,

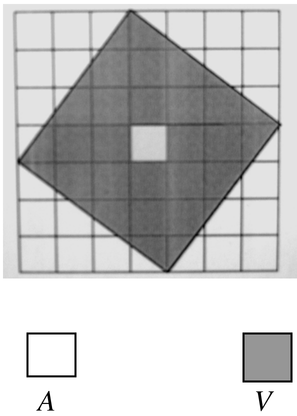


Fig. 7 Figura da hipotenusa, p. 141

Segundo Chemla (2005), a figura é usada nesse caso para fornecer uma interpretação geométrica de operações descritas por vários algoritmos. As duas peças de área têm um papel chave. Uma, é o quadrado central em amarelo cujo lado é a diferença *(a – b),* diferença entre base e altura, e a outra é o triângulo de dimensões *(a,b,c)* em vermelho. Essas peças são marcadas em cores na figura de Zhao Shuang. As mesmas peças são marcadas pelas mesmas cores quando Liu Hui faz referência à figura. Essas peças são os elementos em que, respectivamente, podem ser decompostos os quadrados baseados na diferença ou na soma da base com a altura, assim como o quadrado da hipotenusa. A figura parece ser um meio de apresentar as relações entre essas três áreas, em termos de dois elementos básicos que são a peça amarela e a vermelha (idem, p.143-144).

Observando o algoritmo (2) descrito por Zhao Shuang, a computação de *ab* é interpretada como correspondente a duas amostras das áreas em vermelho; seu dobro, *2ab*, corresponde a quatro de tais amostras. Isso adicionado a $(b - a)^2$, interpretado como a peça em amarelo, resulta na área que é interpretada como o quadrado da hipotenusa. Por um lado, temos a exposição de um algoritmo para o cálculo da hipotenusa quando se conhecem a base e a altura do triângulo. Por outro, a interpretação feita em etapas tem por base a figura e mostra as razões da exatidão do algoritmo que estão escondidas. As peças em vermelho e amarelo são as unidades geométricas de computação que permitem estabelecer os algoritmos. Assim, as figuras colocadas no início do desenvolvimento feito por Zhao Shuang servem de base para se considerar a exatidão de todos os algoritmos descritos logo em seguida. Na visão da autora, esse fato antigo sobreviveu ao tempo e outros exemplos podem ser encontrados na literatura chinesa.

Além disso, duas diferenças chave caracterizam o contraste entre o processo gráfico descrito em *O gnomon de Zhou* e a presença da figura no fragmento *A figura da hipotenusa*. Primeiro, no fragmento, a figura é um objeto criado em função de um algoritmo, ela é reformulada para fornecer a exatidão dos algoritmos. Mas como a figura está completa antes da enunciação de qualquer algoritmo, seu uso visa a interpretar os resultados de uma série de passos dos procedimentos e mostra como eles se combinam para gerar o resultado procurado. Em correlação com isso, a figura é compreensível no sentido de representar relações entre grandezas, assim como os casos de reformulação geométrica necessários.

O já mencionado conjunto de figuras que se sucedem no esboço do procedimento gráfico em *O gnomon de Zhou* pode estar totalmente incluído no desenvolvimento que consta em *A figura da hipotenusa*. O raciocínio subentendido na passagem de abertura pode ter como base as figuras apresentadas por Zhao Shuang. Em segundo lugar, e provavelmente o mais importante, a figura é a base para se estabelecer um modo uniforme de expor a exatidão de vários algoritmos. Na passagem de Zhao Shuang, a exatidão de todos os algoritmos está contida em uma figura e é trazida à luz pelo exame da figura inicial (CHEMLA, 2005, p. 145).

Para Chemla (2005), a manifestação do interesse por casos mais gerais no sentido descrito acima, parece bem perceptível nos comentários de Liu Hui em *Os nove capítulos*, assim como no uso das figuras feito por Zhao Shuang em *A figura da hipotenusa*. Essa convergência indica que se está lidando não com uma particularidade em Zhao Shuang, mas com um fenômeno mais geral. Compreensivelmente a restrição de se ter como base figuras, leva a elaborar figuras específicas que ganham uma certa estabilidade. Assim, a autora mantém a hipótese de que figuras como as de a *Figura da hipotenusa* suportam a emergência de um novo tipo, diferente do que aparece nos antigos escritos como em *O Gnomon de Zhou*, e vai direcionar a procura por figuras mais gerais que compreendam o maior número possível de algoritmos.

Pelo visto, esse estudo explora como o conteúdo, relações métricas no triângulo retângulo, foi sendo desenvolvido e registrado textualmente ao longo de milênios entre os chineses. Notável é que a forma como se apresenta o registro textual, vai possibilitar a inclusão posterior de figuras. Mas em Euclides o foco de discussão se desloca. A figura é usada em um contexto teórico sistematizado como nunca antes, com o uso necessário do discursivo.

3.3.2 A figura geométrica em Euclides

O uso de figuras nos *Elementos* de Euclides deve ser entendido conforme o modelo demonstrativo da geometria que surgiu na Grécia clássica e vigorou por milênios. No Capítulo 2 abordamos a obra de Euclides. Há dois grupos de demonstração. Os *Problemas* são demonstrações que provam a possibilidade de se construir as figuras geométricas e os *Teoremas* provam as propriedades das figuras geométricas. Por exemplo, o quadrado é definido no Livro I, definição 22. A existência do quadrado é provada na proposição 46 do Livro I. Vejamos a definição e a prova da existência do quadrado.

Definição do quadrado, Livro I, Definição 22

> Das figuras quadriláteras, um quadrado é a que é equilátera e é um retângulo. (Heath, 1956, p. 154)

A prova da possibilidade de se construir o quadrado se resume ao seguinte problema, Livro I, Proposição 46:

> *Sobre uma dada linha reta descrever um quadrado.*
>
> Seja AB uma dada linha reta; assim é pedido para descrever um quadrado sobre a linha reta AB.
> Seja AC desenhada fazendo um ângulo reto com a linha reta AB, a partir do ponto A e sobre ela [I.11][2], e seja AD feita igual a AB.

---

2 A notação [I.11] indica o número do livro e da proposição dos *Elementos*, ou seja, Livro I, proposição 11; [I. Def. 22], indica Livro I, definição número 22; [C. N. 2], noção comum número 2; [Post. 4] indica postulado número 4. Essas convenções remetem o leitor a outras proposições, definições e noções comuns que estão na base do desenvolvimento da prova.

Pelo ponto D, seja desenhada DE paralela a AB e pelo ponto B seja desenhada BE paralela a AD. [1.31

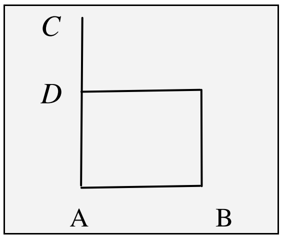


Fig. 8

Portanto, *ADEB* é um paralelogramo; portanto *AB* é igual a *DE* e *AD* a *BE*. [1.34]
Mas *AB* é igual a *AD*; portanto as quatro linhas retas *BA*, *AD*, *DE*, *EB* são iguais entre si;

portanto o paralelogramo *ADEB* é também eqüilátero.
Eu digo a seguir que é também retângulo. Pois, como a linha reta *AD* cai sobre as paralelas *AB*, *DE*, os ângulos *BAD*, *ADE* são iguais a dois ângulos retos. [1.29]
Mas o ângulo reto *BAD* é também reto; portanto o ângulo *ADE* é também reto. E em áreas com forma de paralelogramo, lados e ângulos opostos são iguais entre si. [1.34]
Portanto, cada um dos ângulos opostos *ABE*, *BED* são também retos.
Portanto, *ADEB* é um retângulo. E foi provado que é eqüilátero. Portanto, é um quadrado e é descrito sobre a linha reta *AB*. *Q.E.F.* (Heath, 1956, p.347-348)

Em Euclides a centralidade da figura varia conforme se tenha um problema de construção ou um teorema. No caso dos teoremas, de modo geral nos livros conhecidos como livros aritméticos, há pouco apelo visual, no sentido de que as relações matemáticas referidas nas proposições não devem ser observadas na figura. A seguir, duas proposições ilustram o que se disse. A primeira é um dos teoremas aritméticos em que a figura não aparece no desenvolvimento, a Proposição 32, Livro VII (Heath, 1956, p. 333).

Qualquer número primo é medido por algum número primo.

Seja *A* um número;
eu digo que A ou é primo ou é medido por algum

Fig. 9

número primo. Se *A* é primo, o que foi pedido está feito. Mas se é composto, algum número primo o medirá. [VII.31]
Portanto, qualquer número ou é primo ou é medido por algum número primo. *C. Q. D.*

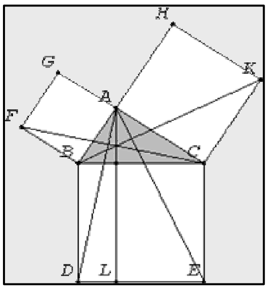
Essa demonstração tem como base somente o encadeamento de proposições anteriores já admitidas, sobre a noção de número, e apenas se usa o raciocínio lógico. A figura não tem função de exibir propriedades dos números.

Como exemplo do segundo caso, conferimos o texto do teorema de Pitágoras, Proposição 47, Livro I, em cujo desenvolvimento há apelo ao visual.

Em um triângulo retângulo o quadrado sobre o lado oposto ao ângulo reto é igual à soma dos quadrados sobre os lados contidos pelo ângulo reto.

Pois seja descrito sobre *BC* o quadrado *BDEC*, e sobre *BA,* AC os quadrados *GB, HC; [I.46]*
por *A* seja *AL* desenhada paralela a *BD* ou *CE,* e sejam unidas *AD, FC.*

Então, como cada um dos ângulos *BAC* e *BAG* é reto, segue que com a linha reta *BA* e com o ponto A sobre ela, as duas linhas retas *AC*, *AG* não ficam do mesmo lado fazendo ângulos adjacentes iguais a dois ângulos retos;
portanto, *CA* está em linha reta com *AG. [I.14]*
Por essa mesma razão, *BA* está também em linha reta com *AH.*



E como o ângulo *DBC* é igual ao ângulo *FBA*, pois cada um deles é reto, seja o ângulo *ABC* adicionado a cada um deles;
portanto, o ângulo *DBA* é igual ao ângulo *FBC. [N.C.2]*

Fig. 10

E como *DB* é igual a *BC* e *FB* à *BA*, os dois lados *AB*, *BD* são iguais aos dois lados *FB*, *BC* respectivamente,
e o ângulo ABD é igual ao ângulo FBC;
portanto a base *AD* é igual ao triângulo *FC*; *[I.4]*
e o triângulo *ABD* é igual ao triângulo *FBC.*

Mas o paralelogramo *BL* é também o dobro do triângulo *ABD*, pois eles têm a mesma base *BD*
e estão entre as mesmas paralelas *BD* e *AL. [I.41]*
E o quadrado *GB* é o dobro do triângulo *FBC*, pois eles têm a mesma base *FB* e estão entre as mesmas paralelas *FB* e *GC*. *[I.41]*
[Mas o dobro de iguais são iguais entre si.]
Portanto o paralelogramo *BL* é também igual ao quadrado *GB*.

Similarmente, se *AE*, *BK* forem unidos, pode também ser provado que o paralelogramo *CL* é igual ao quadrado *HC*;
portanto, o quadrado BDEC é igual aos quadrados aos dois quadrados *GB, HC. [C.N.2]*
E o quadrado *BDEC* foi descrito sobre *BC,* e os quadrados *GB, HC* sobre *BA, AC.*
Portanto o quadrado sobre o lado *BC* é igual aos quadrados sobre os lados *BA, AC. Q.E.D*

Nessa demonstração há apelo ao visual no sentido de que é preciso observar na figura uma série de comprimentos, ângulos e áreas com o objetivo de verificar propriedades e relações entre os objetos geométricos. Ao contrário do que acontece no texto chinês que apresenta a figura da hipotenusa, em que o objetivo é estabelecer um algoritmo de cálculo.

Por exemplo, é possível observar na figura acima a igualdade entre ângulos mencionada na afirmativa, como o ângulo *DBC* é igual ao ângulo *FBA,* pois cada um deles é reto, seja o ângulo *ABC* adicionado a cada um deles; portanto, o ângulo *DBA* é igual ao ângulo *FBC.* O texto faz menção à operação aritmética, adicionar dois ângulos retos, mas com base na propriedade da adição reconhecida previamente pela *Noção Comum 2*, que diz, se iguais são somados a iguais, os totais são iguais, ou seja, quando se adiciona ângulos retos, a soma total também será ângulos retos. Em Euclides, o objetivo da demonstração é pôr em ação as definições, axiomas e postulados, um corpo teórico já aceito, de modo que ele possa gerar mais resultados teóricos e a figura entra no texto sempre como um suporte a esse objetivo. Comparando com Arquimedes, é nesse sentido que a figura em Euclides é estática, pois ela exibe resultados já reconhecidos anteriormente; a figura não entra em qualquer contexto de investigação de novos resultados, nem fica sujeita aos deslocamentos que permitem alcançar esse objetivo, como acontece nas investigações arquimedianas.

No fragmento chinês *A figura da hipotenusa*, consta "Divide-se o retângulo para tomar como base a largura 3 e como altura o comprimento 4; isso que vai de uma quina a outra é 5" (Chemla, 2005, p. 136.). Nesse caso, a figura é submetida a procedimentos métricos: dividir, aqui, significa dividir em partes iguais, fazer uso de um padrão de medida e com isso o texto chinês se distancia do modelo euclidiano. Nos livros chineses antigos, a abertura dos textos é feita com uma figura para exibir resultados conhecidos. Esse aspecto do uso da figura presente nos textos chineses, aparece no texto de Euclides. A figura, nos *Elementos*, está diretamente ligada às proposições usadas no desenvolvimento da prova, mostrando visualmente as propriedades, relações e operações dos objetos geométricos que as proposições prevêem.

Comparativamente, se em Euclides não há uso de procedimentos métricos, quando Arquimedes investiga a quadratura da parábola, ele divide o braço da balança em três partes iguais utilizando uma escala de medida. É nesse sentido que ele faz uma aplicação prática, usando de empiria, e é intuitivo. Ao contrário, em Euclides a equivalência de áreas é investigada a partir da comparação entre grandezas de mesmo tipo. Para demonstrar a equivalência de área entre dois triângulos semelhantes, o procedimento não é medir lados e alturas e comparar resultados numéricos. Ao contrário, consiste em comparar os dois lados e as duas alturas, correspondentes, admitindo que esses comprimentos ou são iguais ou desiguais. É a própria questão do medir que está teorizada no sentido de que medir não é tomado como estabelecer uma escala, uma medida comum com que se possa operar depois, para fins práticos ou para a obtenção de resultados numéricos. Medir, nesse sentido, é usado na vida cotidiana.

Uma outra demonstração de Euclides serve como exemplo. Note que quando Euclides afirma "o paralelogramo é o dobro do triângulo", quer dizer que essa relação acontece entre as áreas das duas figuras, ela não diz respeito a um resultado numérico. A relação aqui é indicada por um múltiplo e com o uso de números inteiros.

Livro I, Proposição 41 (Heath, 1956, p. 338):

> Se um paralelogramo tem a mesma base que um triângulo e estiver sobre as mesmas paralelas, o paralelogramo é o dobro do triângulo.
>
> Demonstração:
>
> Seja o paralelogramo *ABCD* tendo a mesma base *BC* que o triângulo *EBC*, e sejam as paralelas *BC* e *AE*;
>
> Eu digo que o paralelogramo *ABCD* é o dobro do triângulo *BEC*.
> Pois sejam ligados *A* com *C*.
> Então o triângulo *ABC* é igual ao triângulo *EBC*; pois eles estão sob a mesma base *BC* e sob as mesmas paralelas *BC, AE. [I. 37]*
> Mas o paralelogramo *ABCD* é o dobro do triângulo *ABC*; pois o

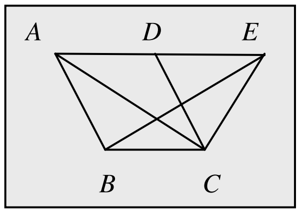


Fig. 11

> diâmetro *AC* o bissecta. *[I.34]*
> Assim, o paralelogramo *ABC* é também o dobro do triângulo *EBC*.
>
> Portanto, se um paralelogramo tem a mesma base que um triângulo e estiver sobre as mesmas paralelas, o paralelogramo é o dobro do triângulo. *Q.E.D.*

Esse resultado não tem um significado numérico, nem se apresenta como uma fórmula para o cálculo de áreas. Trata-se da equivalência de áreas entre figuras, não incluindo qualquer resultado numérico associado à medida, mas apenas a ordem de grandeza dobro e o sentido geral que ela ganha nesse caso, não se tratando de um caso particular. A figura exibe o dado do enunciado e também algumas construções referentes a proposições que embasam a demonstração do teorema.

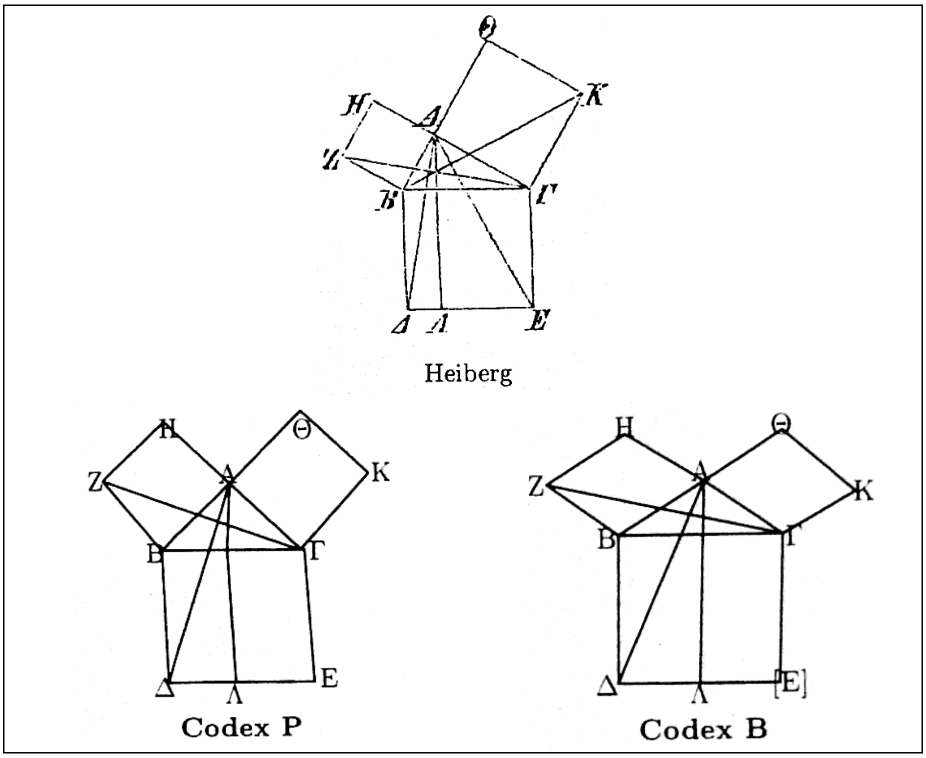
Neste ponto, é preciso abrir um parêntese para trazer estudos atuais sobre a função das figuras no texto demonstrativo, que dizem respeito à versão dos *Elementos* por Heiberg (1880) que é a base da versão contemporânea de Heath, 1ª edição de 1908, consagrada no meio acadêmico. Saito (2006), faz uma avaliação crítica do uso das figuras em textos matemáticos com origem grega, dizendo que, provavelmente, as figuras constam dos originais porque elas são necessárias para o entendimento dos textos, mas que estas, em edições modernas, são diferentes das que constam dos manuscritos e que isso tem implicações teóricas e didáticas.

Ele discute características gerais das figuras, apresentando um estudo com a Proposição 25, Livro III, da edição dos *Elementos* por Heiberg (1880). Apresenta transcrições de todas as 48 figuras do Livro I desta versão dos *Elementos* e de seis manuscritos, dos quais quatro foram as principais fontes usadas por Heiberg, e analisa também o uso das figuras em textos impressos. O conjunto dos manuscritos reúne as seguintes obras: *P*: manuscrito Vaticano, nº 190, nono século; *B*: manuscrito Bodleianus Dorvillianus, nº 301, escrito em 888; *b*: manuscrito Bolonha, 11º século; *V*: manuscrito Viena, nº 31 (em outro catálogo, nº 103); *GB*: manuscrito grego Bruges, nº 521, 14º século, acrescido do G que significa tradução de Gerard de Cremona; *GR*: manuscrito Vaticano Rossiano, nº 579, 14º século (idem para o *G*).

Segundo Saito (idem), as figuras nos manuscritos são muito mais específicas do que nas publicações modernas. Por exemplo, onde os textos modernos incluem paralelogramos, nos manuscritos estão traçados retângulos ou mesmo quadrados. Se esse fato, que o autor denomina como hiper-especificação, tem origem no trabalho dos escribas medievais ou na antiguidade é uma questão a ser investigada e ele se mostra propenso a aceitar a origem na antiguidade. Pois, o fenômeno se apresenta em quase todas as proposições, sendo provável sua ocorrência em larga escala e também porque as figuras nos manuscritos são incorretas, uma vez que representam a situação geométrica discutida, mas lhes falta uma construção métrica que represente exatamente os objetos geométricos em pauta. Assim, as figuras se caracterizam como uma representação esquemática.

Sobre o papel das figuras nos textos modernos que têm como base Heiberg, o trabalho de August (1826-1888) surge como a principal fonte. August foi um editor com preocupações didáticas no sentido de eliminar as hiperespecificações dos originais em favor do critério da generalidade. Nos manuscritos as figuras, por suas características particulares, sugerem ter uma função muito mais limitada do que se costuma estabelecer atualmente. Enquanto representações esquemáticas da relação espacial, o leitor deveria saber ler as figuras segundo as especificações dadas no texto. Assim, a edição de Heiberg que fundamenta as traduções contemporâneas não é crítica quanto ao uso da figura no texto demonstrativo. Em resumo, observações feitas por Saito estão de acordo com discussões levantadas por Schemla (2005), ou seja, o grau de independência entre o texto discursivo e a figura que o acompanha. Também é importante notar a presença da correlação entre desenvolvimento teórico e didático inerente à questão da generalidade em matemática.

Encerrando, observe na reprodução das figuras que acompanham a prova do teorema de Pitágoras, pelo método da equivalência de áreas, em Heiberg e nos seis manuscritos acima relacionados, o que se discutiu, conforme Saito (idem),



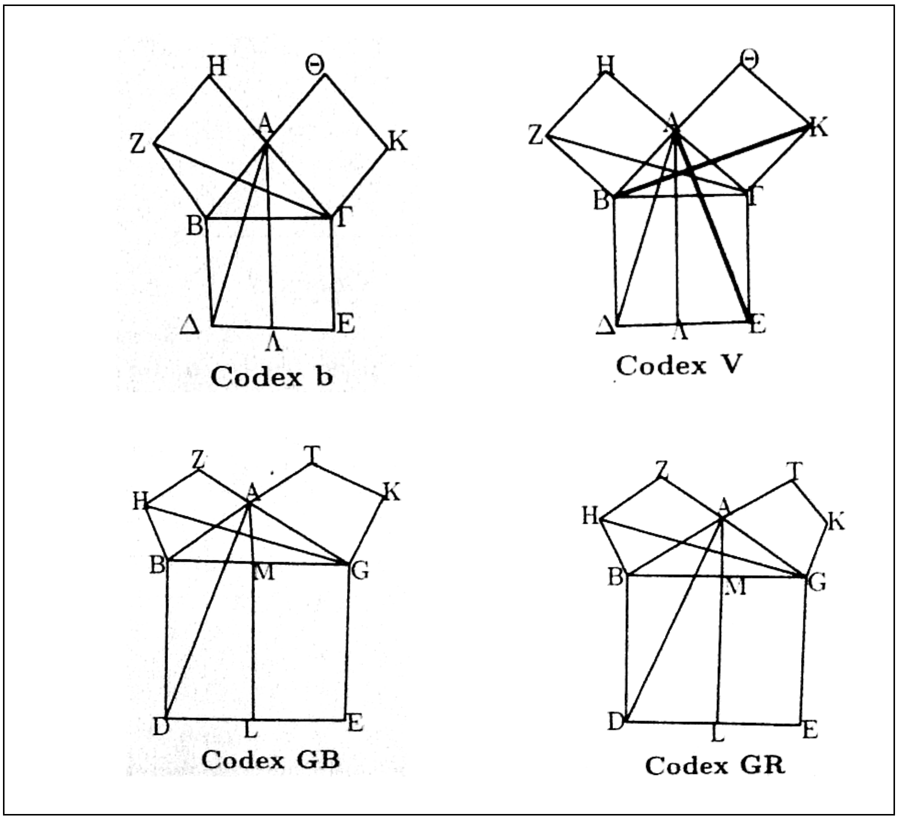


Fig. 12 Figura em obras matemáticas, p. 143

O que se acabou de apresentar mostra que o trabalho histórico na busca por entender o funcionamento da demonstração e do conteúdo matemático em geral, está sempre em marcha, questionando e ao mesmo tempo iluminando o já feito e o que está por fazer.

Dessa forma, dando seqüência às análises das figuras em textos históricos, será visto que uma característica fundamental em Arquimedes, o próximo autor com que se encerra essa série de análises, é o uso dos resultados de Euclides aos quais, para realizar suas descobertas, ele aplica uma escala associando valores numéricos a medida das grandezas. É nesse sentido que ele aplica Euclides em situações práticas, experimentais.

3.3.3 A figura geométrica em Arquimedes

Arquimedes viveu nos anos 200 a.C. e seu trabalho chegou até os dias atuais por meio de várias compilações. Ele descobriu novos resultados matemáticos, dispondo do conhecimento reunido nos *Elementos* de Euclides e também inovando pelo modo como o conhecimento é usado em métodos de investigação e é aplicado em novos campos da geometria. A base matemática que Arquimedes usa é o princípio da exaustão de Eudoxo, avaliando a equivalência entre as áreas de figuras geométricas, operando com aproximações por falta ou por excesso. Como se sabe, esses argumentos vão fornecer a base sobre a qual se estabelecem as primeiras justificativas para o conceito de limite, no século XVIII.

Os mestres do Renascimento repreenderam Arquimedes por não ter revelado os procedimentos que o levou a descobrir tantos resultados. E a resposta positiva a essa reclamação foi descoberta em 1906, em um mosteiro de Jerusalém. Um manuscrito original contém o método de descoberta, segundo o próprio Arquimedes, método relativo aos teoremas mecânicos que ficou conhecido entre nós como o livro *O método*. A literatura ressalta que nada é mais admirável do que Arquimedes fornecer seus procedimentos de investigação (Heath, 1987; Mugler, 1971), uma vez que no trabalho dos geômetras gregos clássicos o fato mais *característico* ou *atormentador* é a ausência de indicação dos passos com que eles trilharam o caminho que os levou a descobrir seus resultados formidáveis (Heath, idem, p. 6). (grifos do autor)

Arquimedes faz aplicações práticas de resultados matemáticos em suas descobertas, usando a pesagem de figuras geométricas. Mas no livro *O método* ele apresenta as provas das suas descobertas matemáticas usando dois métodos distintos, e destaca a diferença entre eles. O *método mecânico* é útil para descobrir os teoremas e não para fornecer as respectivas provas. Já o uso do *método geométrico* permite apresentar as provas conforme o padrão de rigor aceito àquela época. Como Arquimedes envia seus livros a matemáticos de Alexandria, esses são obras que abrem com cartas onde encontramos comentários do autor sobre sua própria produção, seguidas das exposições técnicas. Em *O método* ele continua uma troca de correspondência com Eratóstenes e se refere ao modo como chegou a alguns resultados matemáticos publicados anteriormente,

> Arquimedes a Eratóstenes, saudações!
> Eu já lhe enviei anteriormente alguns teoremas que eu descobri, limitando-me a redigir os enunciados e o convidando a encontrar as demonstrações que eu ainda não tinha indicado. (Mugler, 1971, v. 3, p. 82)

Há o destaque de que os procedimentos prévios são realmente um meio para descobrir e para expor os resultados,

> O que nós vamos dizer não demonstra, sem dúvida, o que precede, mas dá até certo ponto a idéia de que a conclusão é justa. Isso, porque reconhecendo que a conclusão não está demonstrada, mas tendo a idéia de que ela está certa, nós daremos em seu lugar a demonstração geométrica do que nós achamos e já publicamos. (Mugler, 1971, v. 3, p. 82)

Para verificar suas intuições, antes de demonstrá-las pelo raciocínio teórico, Arquimedes interroga a realidade na escala do perceptível, pela observação e pela experiência. É possível destacar em seu trabalho dois momentos da produção do conhecimento matemático que determinam especificidades no registro textual, o de descobrir e o de demonstrar.

Ao usar tanto o método mecânico quanto o método geométrico, Arquimedes expõe os resultados que investiga de forma sistematizada, escrevendo provas distintas. Mas, segundo Dijksterhuis (1987), Arquimedes não está preparado para reconhecer os dois casos como realmente provados, dado que a falta de exatidão do método mecânico residiria no caráter dos argumentos usados, ou seja, a aplicação dos indivisíveis. Por causa disso, no livro *Quadratura da parábola*, para satisfazer os padrões acadêmicos da época, Arquimedes expõe as provas das suas descobertas sem usar os indivisíveis. Nesse caso, ele usa a dupla redução ao absurdo, seguindo o modelo geométrico euclidiano. Por outro lado, no livro *Sobre o equilíbrio dos planos,* Arquimedes fundamenta a sua teoria do equilíbrio da balança em postulados, embora faça uso dos indivisíveis, criando a impressão de que ele não via qualquer diferença essencial entre esse procedimento e o método geométrico (Dijksterhuis 1987, p. 315-319). Nesse caso, tem-se Arquimedes questionando o padrão de rigor instituído em seu tempo, sendo inovador nesse aspecto. Se uma demonstração tem por base postulados admitidos previamente, não importa se eles se aplicam à descoberta de um novo resultado da geometria a partir de uma situação mecânica. É o próprio Arquimedes quem preconiza o reconhecimento da utilidade do procedimento mecânico ou método da descoberta, em épocas vindouras,

> Eu presumo que haverá entre a presente, bem como entre as futuras gerações, quem por meio do método aqui explanado estará apto para encontrar outros teoremas que ainda não compartilhamos (Dijksterhuis, idem, p. 315).

Mas nem por isso ele deixa de apresentar as demonstrações segundo o modelo em vigor. Esse aspecto é importante por mostrar que a exposição teórica de um resultado matemático explicita também um contexto social, ou seja, é uma produção que obedece a preceitos acadêmicos em vigor numa dada época e entre diferentes grupos.

Arquimedes em suas pesquisas vislumbra, intuitivamente, sem provas, a relação entre uma área como a parábola, em parte limitada por uma figura curvilínea definida de maneira exata e por uma figura retilínea inscrita, considerando também os elementos comuns entre as duas figuras. Em seguida, essa intuição é verificada pela pesagem das figuras que devem ser comparadas e que se realiza materialmente com placas finas, homogêneas. A pesagem experimental é analisada teoricamente, na terceira fase da investigação, com a aplicação do princípio do equilíbrio da balança. Finalmente, os resultados são expostos em uma demonstração exata, usando o método da exaustão de Eudoxo (Mugler, 1971, V.II, p.162).

Conseguir o equilíbrio dos corpos em uma balança é o objetivo de Arquimedes. Em uma explanação básica, é suficiente tomar o caso simples em que Arquimedes equilibra os corpos X e B. As áreas ou volumes e posição do centro de gravidade dos corpos são conhecidos previamente. Para isso as figuras que os representam são colocadas em uma posição tal que elas tenham como diâmetro, ou eixo comum, um dos lados. Os elementos infinitesimais em que a figura X é dividida são pesados contra os elementos da outra figura B, e os respectivos centros de gravidade de repousam em um ponto ou outro do eixo comum. Os elementos em correspondência são seções de X e de B, respectivamente determinadas por um plano perpendicular ao eixo que corta as duas figuras. Embora Arquimedes chame os elementos de linhas retas e áreas planas, respectivamente, eles são, no primeiro caso, tiras estreitas, áreas e no segundo caso são lâminas planas finas, sólidos. Mas a largura ou espessura dx como chamamos hoje, não entra no cálculo porque esse diferencial é considerado igual em cada um dos dois elementos correspondentes, que são separadamente divididos e pesados um contra o outro. O número de elementos em cada figura é infinito, mas Arquimedes não precisa dizer isso, ele simplesmente diz que X e B são formados de todos os elementos, isto é, das linhas, no caso das áreas planas e das placas, no caso dos sólidos. Arquimedes lida com os momentos dos corpos em um ponto de suspensão da balança. Trabalha com os respectivos produtos dos elementos de área ou volume pelas distâncias entre os pontos de suspensão da balança e os centros de gravidade dos elementos. Assume como conhecido o fato de que a soma dos momentos de cada partícula da figura *B,* agindo no ponto onde ela é colocada, é igual ao momento de toda a figura, aplicado como uma massa em um ponto, o seu centro de gravidade (Heath, 1953, p. 7-11).

Em resumo, a figura geométrica é tratada teoricamente como um objeto matemático, considerando suas propriedades, tanto em Euclides, Arquimedes ou nos antigos textos chineses. A partir daí elas vão ocupando lugar nas demonstrações. O texto arquimediano se caracteriza por admitir e descrever o movimento com o uso de proposições matemáticas, rompendo com o texto euclidiano, fato que determina especificidades no que diz respeito ao uso da figura. Especificamente, Arquimedes lida com a figura em situações mecânicas experimentais, onde se aplica o movimento e cada figura torna-se um objeto material, distanciando-se do modelo euclidiano. A situação mecânica experimental de pesagem exige o uso de figuras que podem se deslocar, e isso requer descrever novas relações entre as figuras em função do movimento que se impôs e que pode modificar a interação entre elas. Esse procedimento pode ser visualizado, testado experimentalmente, e apenas mediante uma situação dinâmica interativa entre as figuras, usando também o que já se conhece delas, novas características geométricas são pesquisadas. Nesse sentido, o uso da figura em Euclides é estático, não se aplica à investigação empírica dinâmica, seu uso se apóia no conjunto de definições e princípios já admitidos, divergindo do que faz Arquimedes.

O desenvolvimento de Arquimedes para a *Quadratura da parábola* permite explorar os modos como ele investigou, provou e demonstrou seus resultados.

3.3.4 A quadratura da parábola

Arquimedes apresenta a demonstração da *Quadratura da parábola* usando o método mecânico, no livro *O método*. No desenvolvimento da prova constam alguns lemas sobre o centro de gravidade: se uma grandeza for subtraída de outra grandeza e se o mesmo ponto é, simultaneamente, centro de gravidade da grandeza inteira e da grandeza retirada, o mesmo ponto é centro de gravidade da grandeza restante (*Proposição I, 8*, que consta no livro *Sobre o equilíbrio dos corpos planos*); se o centro de gravidade de um número qualquer de grandezas repousa sobre uma mesma linha reta, o centro de gravidade da grandeza composta estará sobre a mesma linha reta; o centro de gravidade de qualquer linha reta, ou seja, segmento de reta homogêneo, é o seu ponto médio; o centro de gravidade do triângulo é o ponto de interseção das medianas, que no paralelogramo é o ponto de interseção das diagonais, que no círculo é o centro, que no cilindro é o ponto médio do eixo, que no prisma é seu eixo de revolução e que no cone é o ponto que divide o eixo de tal modo que o segmento até o vértice é três vezes o segmento restante.

Escrevendo em linguagem moderna, Arquimedes mostrou que se P e Q fossem pontos sobre a parábola e R fosse o ponto onde a tangente fosse paralela a PQ, figura 13, a área do segmento PQ é 4/3 da área do triângulo PQR. Se a área do segmento fosse S e a área do triângulo PQR fosse A, Arquimedes provou a igualdade $S = 4/3A$. Ele não trabalhou, explicitamente, com limites, mas com o argumento típico naquela época para tratar a incomensuralidade, a dupla redução ao absurdo.

O principal método de prova foi mostrar que $-E < S - 4/3A < E$, para todo número E positivo.

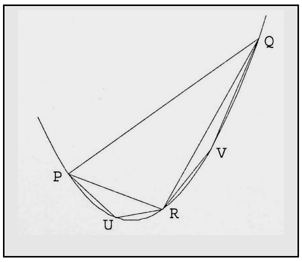


Fig. 13

O método de Arquimedes indica que ele primeiro encontrou resultados usando os indivisíveis, isto é, usando segmentos de reta para cobrir uma área, mas que tal método não fornece uma prova. A primeira metade da *Quadratura da parábola* dá uma prova do resultado pelo método mecânico. A segunda metade dá uma prova geométrica.

Bettinelli (1989) interpreta o método mecânico usado por Arquimedes em *A quadratura da parábola*, como a seguir (idem, p. 193-195),

> O segmento de parábola a ser medido está inscrito em um triângulo que tem a mesma base que ele, um lado é uma tangente à parábola e o outro é paralelo ao seu eixo. Suponha o triângulo pendendo em uma barra imaginária de modo que seu lado paralelo ao eixo esteja na vertical e caia, no prumo, do meio da barra e pelo ângulo oposto à extremidade da barra. Um contrapeso permite o equilíbrio.

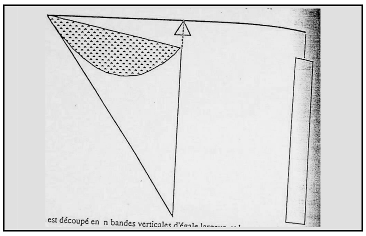


Fig. 14

O triângulo é decomposto em n barras verticais de igual largura e o contrapeso decomposto em partes que equilibram cada uma das barras.

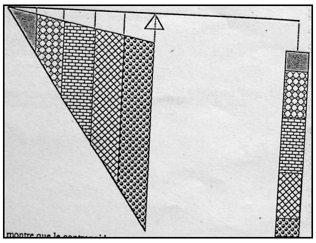


Fig. 15

Arquimedes mostra que o contrapeso correspondente a uma barra tem sempre uma área contida entre os dois trapézios que rodeia a porção da parábola que está abaixo da barra.

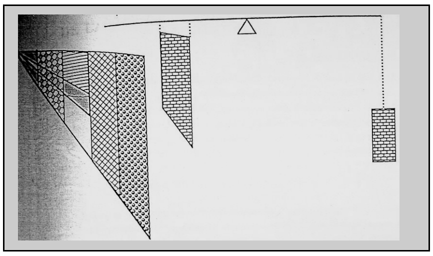


Fig. 16

E então, o contrapeso total tem uma área compreendida entre as das duas figuras dentadas, inscritas e circunscritas ao segmento da parábola.

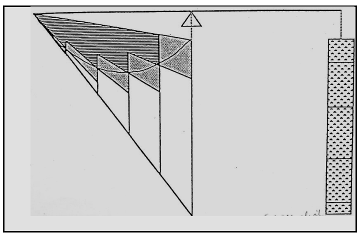


Fig. 17

A partir desse ponto, é usado o argumento da exaustão e ao escolher um número grande de barras o contrapeso é igual ao segmento de parábola, porque ele não é nem maior nem menor. Retomando a primeira figura e sabendo que o centro de gravidade de todo triângulo está a um terço das suas medianas, Arquimedes está seguro de que a área do segmento de parábola está a um terço da do triângulo pendurado na balança, o que completa essa exposição moderna do trabalho arquimediano.

A primeira parte desta Tese trouxe o eixo histórico que embasa a concepção e a estrutura do trabalho. Inicialmente, autores como Ramus, Arnauld, Wolff e Legendre servem para mostrar que as novas tendências em geometria e nos livros-texto pressupõem a crítica a Euclides e, conseqüentemente, aderir ou não a uma abordagem alternativa para os conteúdos matemáticos. Nesse embate, o desenvolvimento da aritmética e da álgebra fornece possibilidades que passam a ser vistas como mais adequadas para a abordagem dos conteúdos, substituindo o modelo geométrico euclidiano. Elas seriam também mais adequadas ao ensino e, portanto, sob essa tendência cada vez mais se concebe o livro-texto. Assim, é reconhecida a importância de se estudar o tema demonstração a partir da crítica aos *Elementos* de Euclides, porque essa obra introduziu o modelo de demonstração que vigorou até os dois últimos séculos e que geometrizou a matemática. Nesse sentido, a constituição da matemática escolar se mostra como um processo de ‘desgeometrizar’ os conteúdos e isso a análise dos textos demonstrativos nos livro-texto confirma.

Em seguida, o percurso *do mostrar ao demonstrar*, ao mesmo tempo retoma e dá continuidade ao que foi visto com os autores históricos. Porém, com atenção a alguns pontos – a origem aristotélica da demonstração matemática, o exemplo para a passagem do mostrar ao demonstrar, o uso da figura geométrica em textos históricos – visando explorar o desenvolvimento da demonstração enquanto um percurso que avança do intuitivo ao discursivo. O estudo do uso da figura levou ao reconhecimento de três casos distintos e que parecem importantes para a análise textual: a figura geométrica como suporte ao desenvolvimento de algoritmos para o cálculo aritmético, no caso dos textos chineses; a figura geométrica como suporte ao encadeamento lógico de proposições, no caso de Euclides; a figura geométrica como suporte a situações dinâmicas em que duas ou mais figuras interagem, no caso de Arquimedes.