

PARTE I – UM CAMINHO PELA HISTÓRIA

2 Euclides Revisitado

Nesse capítulo é apresentado como a crítica aos *Elementos* de Euclides, que se sedimenta na França do século XVI, dá origem ao texto didático de geometria nos moldes como o concebemos hoje. Inicialmente é abordada a estrutura e a principal característica dos *Elementos*, a geometrização das grandezas e em seguida o processo de transmissão. Após isso, três autores servem para explorar as críticas que são feitas à obra euclidiana: Petrus Ramus, capítulo III do livro *Scholarum Mathematicarum*, 1569; Antoine Arnauld, Prefácio do livro *Les Nouveaux Elemens de Geometrie*, 1667, e André Marie Legendre, *Elemens de Géométrie*, edições de 1794 e de 1886. Finalmente, com Christian Wolff, 1710, o texto do livro didático *Anfangs-gründe aller mathematischen Wissenschaften* explana sobre a arte de ensinar matemática.

O terceiro Capítulo, *Do mostrar ao demonstrar*, continua explorando a demonstração como legado do percurso cultural dos povos: a origem aristotélica da demonstração matemática e, em seguida, o uso da figura em textos chineses antigos, em Euclides e em Arquimedes.

2.1 A estrutura e a demonstração nos *Elementos* de Euclides¹

Como nos diz Carvalho (2008),

Os *Elementos* têm sido exaustivamente estudados, principalmente nos últimos cem anos; procura-se saber que teoremas são devidos a Euclides e quais são de matemáticos anteriores; analisa-se o encadeamento lógico das proposições; procura-se reconstruir o texto original, visto que não nos chegou nenhuma edição proveniente da época do autor. (p. 14)

Os *Elementos* de Euclides datam dos anos 300 a.C. da Grécia antiga. Os conteúdos dos *Elementos* se organizam em treze capítulos ou livros. As *Definições*, os *Postulados*, as *Noções Comuns* ou *Axiomas* fundamentam a obra de Euclides.

¹ Tenho como base para esse texto, Bulmer-Thomas, 1956; Caveing, 1990; Heath, 1981; Carvalho, 2004; Schubring, 2004.

O objetivo de Euclides é o trabalho teórico, ou seja, sistematizar a matemática demonstrativamente, segundo o desenvolvimento dedutivo que estabelece as verdades geométricas que se pode conhecer por meio do raciocínio.

A demonstração matemática tem sua origem em preceitos de Aristóteles. Ela surge entre os gregos: demonstrar é estabelecer a verdade de uma proposição como consequência necessária de uma ou de mais verdades já admitidas. Qualquer ciência demonstrativa tem como base um conjunto de princípios que são hipóteses tomadas *a priori*, a partir das quais se estabelecem outros fatos por meio de deduções. Mas uma ciência dedutiva particular vai exigir também um conjunto de definições.

Os gregos distinguiram procedimento sintético e analítico. O procedimento analítico consiste em considerar primeiro o que deve ser provado e depois pela dedução de consequências, chega-se ao que foi aceito inicialmente. Nos *Elementos*, Euclides procede por síntese, isto é, parte de proposições já conhecidas para chegar, por meio de deduções, ao que deve ser provado.

A estrutura sintética característica dos *Elementos* estabelece *Definições*, *Postulados*, *Noções Comuns* ou *Axiomas*, ou seja, estabelece *Princípios* que constituem os pontos de partida das cadeias dedutivas. As definições servem para estabelecer os atributos que caracterizam os objetos matemáticos, fixando o significado de termos que serão usados no discurso demonstrativo. Mas, para Aristóteles, definir os primeiros objetos de uma ciência explicitando suas propriedades, não é garantir que os objetos existem. Com isso, os primeiros princípios de uma ciência são verdades auto-evidentes impossíveis de serem provadas, para as quais a existência deve ser assumida sem provas.

Na Grécia antiga a grandeza geométrica e a unidade aritmética são consideradas os fundamentos da ciência matemática. Assume-se a existência desses objetos primeiros da ciência matemática não no âmbito formal, pois os objetos das ciências são anteriores à ciência. Enquanto a existência dos objetos primeiros repousa sobre a existência natural dos seres, a dos objetos secundários repousa sobre construções lógicas. O preceito da existência em Aristóteles autoriza Euclides a assumir procedimentos tácitos. Ele começa sua geometria aceitando a unidade aritmética e a grandeza geométrica como evidentes, sendo assim para diferentes tipos de grandezas geométricas tais como comprimento, área, volume.

Os *teoremas* têm por objetivo constatar e demonstrar que um objeto, que sabemos existir, possui ou não possui uma propriedade. A frase, *Que foi demonstrado*, finaliza esses textos em sua forma abreviada, *Q. E. D.* Os *problemas* constituem o conjunto de proposições em que se prova a existência de figuras geométricas. Euclides assume a existência de pontos, linhas retas e círculos como os objetos básicos da sua geometria e com essas suposições está apto a provar a existência de todas as outras figuras definidas. A indicação, *Q. E. F.*, que em latim abrevia a frase, *que foi pedido para ser feito*, finaliza os textos dos problemas. Os cinco *Postulados* enunciam a possibilidade das construções geométricas, são eles,

1- Desenhar uma linha reta de um ponto qualquer a um ponto qualquer.

2- Prolongar uma linha reta finita continuamente em uma linha reta.

3- Descrever um círculo com um centro e um raio qualquer.

4- Todos os ângulos retos são iguais entre si.

5- Se uma linha reta caindo sobre duas linhas retas faz ângulos internos, do mesmo lado, menores que dois ângulos retos, as duas linhas retas, se produzidas indefinidamente, encontram-se do lado em que os ângulos são menores que dois ângulos retos.

Os três primeiros postulados geram algumas conseqüências. O primeiro implica que entre dois pontos pode ser desenhada uma única linha reta, o que equivale a dizer que duas retas com mesmas extremidades coincidem, ou ainda, que a linha reta não delimita um espaço plano. O segundo, estabelece que a linha reta pode ser prolongada em uma única direção, em cada extremidade. Duas linhas retas não têm um segmento comum, podendo ser prolongadas indefinidamente em um número de vezes também indefinido. O terceiro postulado implica também ser o espaço infinito porque o raio do círculo não é limitado, decorrendo disso ser o espaço contínuo, não-discreto (Bulmer-Thomas, 1956, p. 416-417).

Segundo o mesmo autor, o quarto e o quinto postulados são de uma outra ordem porque eles não prevêem que alguma coisa deve ser feita, como nos três anteriores. O *Postulado 4* significa dizer que o ângulo reto é uma grandeza tomada para medir outros ângulos, o que equivale a pressupor o espaço homogêneo ou a invariabilidade das figuras. Assim, se o postulado pudesse ser provado, seria apenas pela superposição de figuras. O quinto postulado, o famoso

postulado das paralelas, escolhe como principal característica desse tipo de linha elas não se interceptarem (idem, p. 417). Ou seja, Euclides testou o paralelismo considerando que as linhas são não-secantes.

Sabemos que desde a antiguidade, existiu a desconfiança de que esse postulado pudesse ser provado. Ptolomeu e Proclus, entre outros, trabalharam nesse sentido. Mas tudo dependia de fazer uma outra suposição equivalente à que fez Euclides. Saccheri, em 1733, com seu livro *Euclides livre de todo erro*, entrou na história da criação de um outro tipo de geometria. Ele foi quem primeiro se perguntou quais seriam as consequências de hipóteses diferentes das de Euclides. Assim, se deparou com a possibilidade de outros tipos de geometria. Mas estando convencido, como os matemáticos e filósofos do seu tempo, de que não poderia existir geometria diferente da construída por Euclides, ele não percebeu o que tinha feito. Somente em meados do século XIX ficam estabelecidas definitivamente as geometrias não-euclidianas. “O quinto postulado de Euclides revelou, assim, o que ele é – uma suposição não demonstrável definindo o caráter de um tipo de espaço” (idem, p. 417).

Os *Axiomas* ou *Noções Comuns* reúnem o conjunto de *Princípios* auto-evidentes que vão permitir o encadeamento dedutivo das proposições. Eles fazem a mediação entre as etapas do raciocínio e estão assim enunciados,

- 1: Coisas que são iguais a uma mesma coisa são também iguais entre si.
- 2: Se iguais são adicionados a iguais, então o todo é igual.
- 3: Se iguais são subtraídos de iguais, os restos são iguais.
- 4: Coisas que coincidem com uma outra são iguais entre si.
- 5: O todo é maior que a parte.

Ao longo de séculos, em livros-texto de geometria aparece com frequência o procedimento euclidiano da igualdade por superposição. É importante ter em mente que igualdade, aqui, significa congruência geométrica ou igualdade de áreas, e não igualdade aritmética entre números. O procedimento da superposição de áreas está previsto pelo *Axioma 4*. Lehmann e Bkouche (1982) chamam a atenção para a questão empírica aí subentendida e para como se avança desde esse ponto até chegar à formulação teórica. O critério da igualdade por superposição se apóia sobre o movimento, pois é o transporte de um objeto geométrico sobre o outro que permite concluir a igualdade entre eles. Nesse caso, o raciocínio tem base na evidência visual da figura geométrica (idem, p. 440-441). “O problema da

geometria é agora enunciar ‘a priori’ as condições da igualdade, o que permitirá, por isso mesmo, eliminar o movimento, que será substituído por um raciocínio apoiado sobre critérios de igualdade definidos” (idem, p. 440). Justamente o que prevê o *Axioma 4*.

O desenvolvimento do texto demonstrativo euclidiano está previsto dentro de um modelo padrão. Ele segue etapas bem definidas. Primeiro, consta o *enunciado* que estabelece o que é dado e o que é procurado; em segundo lugar, a *exposição* ou *hipótese* vai designar os objetos referidos no enunciado com o uso de letras; a *explicação* ou *determinação* em que consta a única frase com verbo na voz ativa enunciando a conclusão, ou seja, explicando claramente o que é pedido; a *construção* ou *preparação* traz informações adicionais ao enunciado, precisando o que é procurado; a *demonstração* traça a inferência exigida para se raciocinar cientificamente a partir de premissas admitidas previamente; a *conclusão* volta de novo ao enunciado, confirmando o que se demonstrou. Quando não é completa, as partes essenciais e sempre presentes em toda demonstração são o enunciado, a prova e a conclusão, uma vez que é preciso conhecer de antemão o que é procurado, provar isso por meio de passos intermediários e estabelecer o fato provado como conclusão.

Os *Elementos* estão divididos em treze livros que tratam de geometria e de aritmética². Os quatro primeiros livros tratam da geometria plana sem usar a proporcionalidade. O Livro I é dedicado à geometria dos pontos, linhas, triângulos, quadrados e paralelogramos. Apresenta pela primeira vez o exemplo de equivalência de áreas, uma ferramenta eficaz da matemática grega. Esse método equivale a procedimentos algébricos de resolução de equações do primeiro e do segundo grau. A última proposição desse livro traz a prova do teorema de Pitágoras com base na equivalência de áreas entre o quadrado e o paralelogramo. O Livro II desenvolve a transformação de áreas, que corresponde também a um exercício de álgebra. Nesse livro, a penúltima proposição generaliza o teorema de Pitágoras. O Livro III trata da interseção e tangência do círculo e o Livro IV contém problemas sobre inscrever ou circunscrever figuras retilíneas no círculo.

² Sobre a distribuição dos conteúdos nos Elementos ver: Carvalho, 2008; Artmann, 2001.

O Livro V apresenta a teoria geral das grandezas proporcionais, atribuída a Eudoxo, sendo independente dos anteriores. Enquanto os outros livros discorrem sobre os objetos geométricos, este se ocupa das grandezas de modo geral, sejam comensuráveis ou incommensuráveis. Euclides faz uso de segmentos de reta como exemplo para as grandezas consideradas, mas as demonstrações se aplicam a grandezas de qualquer tipo. O Livro VI discute a geometria plana das figuras semelhantes, aproximando-se do Livro I, II e IV. Os teoremas 19 e 20 relacionam linhas e áreas de polígonos semelhantes. As seções finais apresentam o que Euclides chama de *aplicações de áreas* e que equivale, em termos modernos, à resolução de equações quadráticas.

Os Livros VII, VIII e IX são conhecidos como livros aritméticos e, ainda que as demonstrações não dependam de geometria, elas são formuladas em termos geométricos. Por exemplo, o produto de dois números a e b é sempre concebido como a área de um retângulo. O Livro VII discorre sobre a aritmética básica. Euclides define a proporcionalidade de números sem relação com o Livro V, sua aritmética está baseada no algoritmo para determinar se dois números quaisquer são primos entre si, fornecendo o maior divisor comum entre eles. Em contrapartida, trata também da teoria do menor múltiplo comum. O Livro VIII lida principalmente com seqüências numéricas em proporção contínua e com a média geométrica.

O Livro IX apresenta os números em proporção contínua e nele consta a *Proposição 14* conhecida como o teorema fundamental da teoria dos números: “A decomposição de um número em produto de primos é única” e o Livro X estuda segmentos de reta incommensuráveis ou, em linguagem atual, os números irracionais.

Os Livros XI, XII e XIII tratam de geometria no espaço. O livro XII discorre sobre áreas e volumes, e na segunda proposição consta a demonstração de que as áreas de dois círculos estão entre si como os quadrados de seus diâmetros. A demonstração se baseia na teoria das proporções do Livro V e no “método da exaustão”, que Arquimedes empregaria, tempos depois, sendo considerado um prenúncio do atual conceito de limite. No livro X, Euclides investiga o que hoje conhecemos como equações biquadradas e sua redução à equação quadrática. Os três últimos livros dos *Elementos* são dedicados aos sólidos geométricos.

Os *Elementos* são uma compilação de coisas já conhecidas, com a característica notável de organizar o conteúdo com o uso de uma quantidade mínima de proposições, de modo que a uma proposição se segue outra, em uma ordem estritamente lógica. Assim, o significado dos *Elementos* na história do pensamento, diz Bulmer-Thomas (1956), é duplo. Em primeiro lugar, ele introduz novos padrões de rigor no raciocínio matemático que vigoraram até os dois últimos séculos. Em segundo lugar, ele foi um passo decisivo na geometrização da matemática (idem, p. 425).

2.2 A geometrização das grandezas e o texto de demonstração

Foi a barreira grega entre número e grandeza que desencadeou a geometrização da matemática em seu padrão teórico. Para fins práticos, no dia-a-dia a medição de grandezas sempre foi necessária e usada. Medir ganha o significado de chegar a um valor numérico, nesse caso. Mas no caso do tratamento teórico ocorre um impasse devido à própria natureza do medir.

A medida é uma operação que consiste em associar um número a uma grandeza, o que o discurso matemático enuncia como um isomorfismo entre o conjunto das grandezas e o conjunto dos números (racionais, decimais ou reais, dependendo do contexto). Essa concepção, reduzindo a operação a uma única leitura do seu resultado, oculta a própria operação. (Bkouche, cf. Rouche, 1992, p. 4)

Quando duas grandezas têm uma medida comum, elas são comensuráveis e é possível expressar com números inteiros positivos a quantidade de vezes que a menor grandeza está contida na maior. Mas nem sempre duas grandezas têm uma medida comum. Então, como os gregos só possuíam os números inteiros positivos eles se encontraram diante de um impasse: a impossibilidade de tratar numericamente a medida de qualquer grandeza, pois as grandezas incomensuráveis têm sua medida expressa por números reais.

Não havia àquela época o conceito de zero, de número negativo, número racional e irracional, e os números inteiros eram iguais ou maiores que 2. O número 1 era a unidade e não era considerado um número. Em Euclides, os números inteiros são representados por segmentos de reta e as grandezas não estão associadas a números. Euclides não divide números inteiros para obter como resultado números racionais como nos dias de hoje. No Livro V dos *Elementos*, Euclides apresenta a teoria das proporções de Eudoxo, uma forma de comparar

grandezas comensuráveis e incomensuráveis e que foi o principal alvo de críticas no Renascimento.

Em demonstrações da geometria básica nos livros-texto, a entrada das operações aritméticas e algébricas significa um novo modo no tratamento das grandezas. As razões acabam sendo vistas como frações. É o que Legendre ressalta em seu livro *Elementos de Geometria*, como veremos. Mas essa mudança tem um longo percurso.

Os árabes operavam com a antifarese, procedimento usado desde os pitagóricos e que Euclides descreve no Livro VII, uma alternativa para lidar com grandezas incomensuráveis. A antifarese é um modo de procurar a maior parte alíquota comum entre duas grandezas, com o procedimento das subtrações sucessivas,

Sejam dois segmentos AB e CD e suponha $AB > CD$.

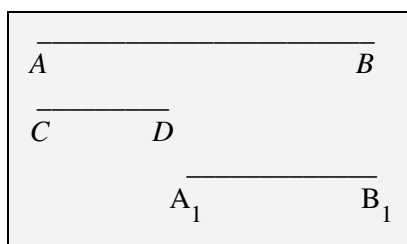


Fig. 1

O método consiste em subtrair CD de AB o que resulta em A_1B_1 ; depois, como $CD < A_1B_1$, subtraindo de novo CD de A_1B_1 , resulta A_2B_2 , e assim por diante. Quando se chega a um segmento $A_kB_k < CD$, tem-se: se os dois segmentos iniciais são comensuráveis, chega-se a um número finito de etapas e a uma diferença nula entre os dois segmentos. Em caso negativo, o processo se repete infinitamente e o comprimento dos segmentos sucessivos, tende à zero.

Contudo é preciso destacar que,

Para a matemática grega seria um anacronismo entender a antifarese como desenvolvimento em frações contínuas, porque, aí, ela foi utilizada como resultado da subtração, enquanto as frações contínuas são resultado de divisões. (Hogendijk, cf. Schubring, 2004, p. 265)

Para Murdoch (1961) a característica mais notável entre os matemáticos árabes foi priorizar os procedimentos aritméticos (idem, p. 255) e o trabalho de

estabelecer a possibilidade de associar proporção com números encaminha a invenção dos números reais,

Para o caso da incomensuralidade se entende a antifarese como a constituição das frações contínuas pois as bases de um matemático como Omar Al-Khayyam (1048-1131) substituem a teoria da proporcionalidade de Eudoxo pelas relações da antifarese, tornando-se entendidas, por isso, como elemento do processo de desenvolvimento do significado dos números reais positivos. (Djebbar, 1997, cf. Schubring, 2004, p. 265).

Mas as tentativas de reformular a teoria da proporcionalidade dos *Elementos* não alcançam a generalidade e a consistência do trabalho de Eudoxo. (Sobre esses aspectos ver Murdoch, 1961). Na Europa renascentista aumentam as críticas ao Livro V dos *Elementos* no sentido de substituir o conceito geométrico de proporcionalidade por operações aritméticas com frações (Schubring, 2004, p. 265). A identificação entre razão e fração vai aparecendo nos livros-texto e vai acarretar modificações na demonstração geométrica.

Como visto no início do capítulo, Carvalho (2008) ressalta ter sido o texto dos *Elementos* de Euclides construído ao longo de um longo processo de transmissão, o qual será tratado a seguir. Essa breve retrospectiva permite observar a presença de críticas feitas à obra euclediana e sua correlação com a questão didática, no sentido de que um assunto deve ser apresentado de modo adequado ao ensino. A atuação crítica de Ramus e dos seus seguidores, no Renascimento, se insere nesse contexto.

2.3 A transmissão do texto dos *Elementos*³

Depois da *Bíblia* o livro com maior número de edições e que influenciou decisivamente o pensamento ocidental foi o texto matemático *Elementos* de Euclides, legado dos gregos antigos. Justamente, por ser um modelo de racionalidade científica. Essa obra tem sua origem na Grécia dos anos 300 a. C. e esteve no centro do desenvolvimento da matemática até o século XVII.

Dois fatos da vida de Euclides são aceitos, embora resultem de suposições. Ele ter vivido entre o tempo dos alunos de Platão, 347 a. C., e o de Arquimedes, 287 a. C. Provavelmente, foi em 300 a. C., o auge da produção de Euclides e a

³ Construí esse texto com base em Murdoch, 1956.

escrita dos *Elementos*. Proclo (410-485), em seu sumário da história da geometria nos conta, sobre a vida de Euclides,

Não mais jovem que estes (referência a dois discípulos de Platão) é Euclides, que reuniu os elementos, colocando em ordem muitos teoremas de Eudoxo e aperfeiçoando muitos de Teeteto e também trazendo em demonstrações irrefutáveis, coisas que foram provadas apenas frouxamente por seus antecessores. Este homem viveu no tempo de Ptolomeu I, pois Arquimedes, quem veio imediatamente depois de Ptolomeu I, faz menção a Euclides e, além disso, eles dizem que Ptolomeu uma vez lhe perguntou se havia um caminho mais curto em geometria que aquele dos elementos, e ele respondeu que não havia uma estrada real em geometria. Ele é então mais jovem que os alunos de Platão e mais velho que Eratóstenes e Arquimedes, pois o último foi contemporâneo daqueles, como diz Eratóstenes em algum lugar. (Heath, 1956, v. I, p. 1)

Um fato a mais confirma a opinião de Proclo sobre as ligações entre Euclides e Aristóteles, que morreu em 322 a.C. Os postulados e axiomas, ou noções comuns que estruturam os *Elementos* são marcos do pensamento aristotélico. Já Euclides ter vivido em Alexandria é uma informação vinda de Pappus que relata ter sido, nessa cidade, o local onde Apolônio por muito tempo se ocupou com um ensino dado na tradição de Euclides. É assim aceito que Euclides viveu em Alexandria entre 320 e 260 a. C., já que Apolônio aí atuou entre os anos 246 e 221 a. C.

A história do texto dos *Elementos* diz respeito a uma grande variedade de traduções e redações em parte acrescentadas, omitidas, corrigidas. São feitos comentários e versões especiais atendendo a objetivos específicos. Aceita-se que a obra *Elementos* tenha sido escrita originalmente em grego e sua transmissão é estudada a partir de algumas fases.

A fase da Grécia antiga apresenta alguns destaques. Proclo, 410-485, é autor do mais extenso conjunto de comentários que chegou até nós, reunindo escólios próprios aos de outras pessoas. O mais antigo escólio, de Heron de Alexandria, em torno de 60 d.C., é conhecido por meio de Proclo e dos fragmentos árabes de al-Nayrizi, 900 d. C. Mas o comentador mais importante dos *Elementos* é Pappus de Alexandria, primeira metade do século IV d.C., cujo texto grego foi perdido, nos chegando em árabe a parte sobre o Livro X. Outro comentador, Gemino de Rhodes, 77 a. C., é conhecido pelas citações de Proclo que trazem informações valiosas sobre a ordem na matemática. Logo depois do tempo de Proclo, Simplicio, cerca de 530, escreveu o Comentário sobre as Premissas no livro de Euclides e al-Nayrizi (922) preservou esses fragmentos.

Um grande marco na transmissão de Euclides é a edição de Theon de Alexandria, 400 a.C., que serviu de base a todas as outras edições dos *Elementos* até os anos 1900. Por sorte ele revelou ter feito um adendo na última proposição do Livro VI em seu comentário sobre o *Almagesto* de Ptolomeu. Essa foi uma informação chave para o especialista Peyard, em 1808, analisar um manuscrito em grego, do século X, conhecido como Manuscrito Vaticano. Peyard concluiu que esse manuscrito era anterior ao livro de Theon porque, além de outras diferenças, não continha o adendo de Theon. Usando essa novidade e outros materiais, Peyard fez correções na edição de Simon Grynaeus, datada de 1533. Outros autores, usando outros documentos e sempre a edição de Theon, continuaram melhorando o trabalho de Peyard. Durante o período 1813-1888, Heiberg estabeleceu o que seria um texto “original” dos *Elementos*, com base no Manuscrito Vaticano e usando também outras fontes.⁴

Na alta Idade Média Euclides tem sua fase de disseminação entre os árabes e o primeiro registro desse fato é a inclusão do seu nome no índice bibliográfico de al-Nadim, em 1100. Segundo este, houve vários comentários, duas traduções completas dos *Elementos* e essas atividades perduraram por 300 anos. Também um manuscrito bizantino foi adquirido pelo califa al-Mansu (754-775), embora ficasse sem tradução. Al-Nadim nos conta que Hajjaj faz a primeira tradução no período 786-833, mas o texto original em árabe dos *Elementos*, existente hoje, data dos anos 800 e contém apenas os livros I-VI e XI-XIII. Os seis primeiros livros existem no manuscrito Leiden juntamente com um comentário de al-Nayrizi sobre o preparo dessa 2ª edição por Hajjaj, dizendo que este

deixou de fora superficialidades, preencheu falhas, corrigiu ou removeu erros além de ter aperfeiçoado o livro tornando-o correto e o sumariou como se encontra na presente versão. Isso foi feito por especialistas sem mudar qualquer substância, enquanto ele deixou a primeira versão como estava para o uso comum. (Murdoch, 1956, p. 439)

Murdoch (1956) comenta a seguir que, nessa segunda versão, há pistas evidentes da preocupação do autor em orientar o texto para o ensino,

A tendência a distinguir casos separados de uma proposição e o uso de exemplos numéricos para ilustrar várias provas, aponta preocupações pedagógicas que iam se tornar uma característica marcante de Euclides no mundo árabe e nas versões medievais em latim que daí derivaram. (idem, p. 439)

⁴ Essa questão é polêmica entre os pesquisadores que buscam estabelecer a autenticidade dos *Elementos*. Ficam sob avaliação os textos que vêm da tradição grega, os que vêm da tradição árabe de transmissão. Ver Knorr, 1975.

A segunda tradução árabe de Euclides foi em grande parte realizada por Ishaq ibn Hunayn, sendo depois atualizada por Thabit. Não há pistas de ligações entre a primeira tradução de Hajjaj e o livro de Thabit, cujo texto não sobreviveu. Existem apenas manuscritos de atualizações e há evidências de que Thabit se baseou em um original grego.

O primeiro especialista a analisar criteriosamente as duas versões árabes dos *Elementos*, Klamroth, afirma haver pouca diferença entre elas e que variações ocorrem nos três últimos livros. Murdoch comenta ser destacável que, para Klamroth, a tradição árabe como um todo, pelo modo como a conhecemos hoje, produziu um texto mais próximo do texto original de Euclides do que a versão grega sobrevivente. “Heiberg, contudo, organizou uma considerável quantidade de evidências contra a posição de Klamroth e claramente confirmou a superior confiabilidade da tradição grega” (Murdoch, *idem*, p. 349). Neste ponto, é importante destacar um trabalho recente mostrando que Klamroth estava certo, ao contrário de Heiberg e que a versão dos *Elementos* de Euclides por Heath, lançada em 1908 e aceita no meio acadêmico, tem como base o texto de Heiberg (Knorr, 2001; Murdoch, *idem*, p. 349). Isso mostra que o processo de transmissão dos *Elementos* ainda está em pauta gerando conhecimentos novos. Nesse sentido, Schubring (2003) se refere à atuação dos árabes após a antiguidade que, embora negligenciada, tem o mérito da preservação e disseminação do texto e que manuscritos bizantinos apresentam versões mais antigas e completas que embasam as leituras críticas atuais dos *Elementos* (p. 33). E partes do Livro XII, dos *Elementos*, de tradição árabe são mais corretas que as de tradição bizantina (Knorr, 1996, cf. Schubring, *idem*).

Em seu relato sobre as versões em árabe, al-Nadim menciona Dimashqi, cerca de 908-932, que traduziu partes dos *Elementos* e também o comentário de Pappus sobre o Livro X, mas apenas este último chegou até nós. Há ainda o trabalho de Nazif que, por volta de 900, traduziu não só o Livro X considerando não só as várias adições e modificações do texto grego mas também o comentário de Pappus; este último sobrevive até hoje. Embora al-Nadim não registre, houve traduções por Qusta ibn Luqa, de espúrios, ou seja, de versões falsificadas que constituíram os livros XIV e XV dos *Elementos*, os quais não provêm de Euclides.

No mundo árabe, além de versões, o trabalho relativo aos *Elementos* de Euclides requer atenção para com outras formas de tratar o texto, como sumários,

atualizações e correções. O sumário mais conhecido é o que consta, como o verbete geometria, na enciclopédia de filosofia de Ibn Sina ou Avicenna.

No período medieval temos também a fase grego-latina, em que versões para o latim são feitas a partir de originais em grego. No mundo latino a primeira referência a Euclides aparece em Cícero, 106-42 a.C., não sendo provável ter havido tradução ou estudo da geometria entre os romanos nessa época. Cícero diz que a geometria foi tratada pelos gregos de modo brilhante como nunca antes, e que entre os romanos ela se limitou apenas a aplicações em medidas e cálculos. Uma segunda referência está em Boécio, cerca de 475-524, autor citado por Cassiodoro e a quem se atribuiu a tradução dos Livros XII-XIII dos *Elementos*, conforme consta no palimpsesto descoberto em 1500, em uma biblioteca de Verona. Reunindo os trabalhos atribuídos a Boécio resulta a versão de quase todas as definições, postulados e axiomas dos Livros I-V dos *Elementos*; os enunciados de quase todas as proposições dos Livros I-IV, e as provas das proposições 1-3 do Livro I.

Sabe-se que houve trechos de Boécio misturados em, pelo menos, duas versões árabes dos *Elementos*. Uma delas, cerca de 1200, foi compilada por um especialista alemão com notável ganho matemático, considerando o documento original, e a outra consta em quatro manuscritos, três deles do século XII. Há, ainda, mais duas versões latinas com fragmentos dos *Elementos* a partir do grego, em manuscritos do século X ainda existentes em Munique.

Finalizando o período medieval de transmissão dos *Elementos*, destaca-se a fase das versões latinas feitas a partir de originais em árabe. Gerard de Cremona (1114-1187), reconhecido como o tradutor mais competente dos trabalhos árabes, se baseou no trabalho de Ishaq-Thabit. Em 1901, um manuscrito dos *Elementos* identificado como trabalho original de Cremona passou a ser base para o estudo dos textos de tradição grega que os árabes preservaram. Cremona também contribuiu para a literatura de Euclides em latim ao traduzir os comentários de al-Nayrizi sobre os *Elementos* e os de Muhammad al-Baqi sobre o Livro X, além dos comentários de Pappus também sobre o Livro X.

Contudo, a mais importante versão latina dessa fase, foi a do inglês Adelard, 1100. Ela aparece em três edições diferentes e serve a numerosas redações e revisões posteriores. Murdoch (1956) destaca, como característica importante em Adelard, os comentários fornecerem direções relevantes que se poderia tomar ao

desenvolver uma prova. Por exemplo, qual proposição, definição ou axioma se emprega, ou se a prova é direta ou indireta, ressaltando que frequentemente se enfatiza a construção utilizada e não características da própria prova. Tais reflexões tendem a tomar a prova levando em conta aspectos externos à matemática, com o objetivo de dar um tom mais didático à obra de Euclides (idem, p. 446-447).

É importante a versão dos *Elementos* preparada por Campano de Novara, cerca de 1259 (idem, 447). Campano fez adições, relacionou os *Elementos* com a produção do seu tempo, o século XIII, incluindo material da Aritmética de Jordano de Nemore. É bem divulgado o modelo mecânico incorreto que ele propõe para explicar a definição 4, do Livro V, afetando a interpretação do texto genuíno. As três versões de Adelard e a de Campano foram fontes para várias versões dos *Elementos* e, num quadro geral, influenciaram as produções da idade média. Murdoch (1956) destaca como a grande característica dessa fase estar o trabalho com as proposições, acréscimos e omissões, direcionado a refletir sobre o modelo euclidiano de prova, deixando transparecer preocupações didáticas,

A tradição adelardiana forneceu, dessa forma, um Euclides escolar que admiravelmente enquadrou os interesses da escolástica dentro e além do limites da matemática medieval. (idem, p. 447)

No Renascimento e na Idade Moderna a transmissão de Euclides foi determinada principalmente por algumas produções como descrito a seguir. A primeira edição impressa do texto medieval de Campano em Veneza, 1482, e as muitas outras impressões em lugares e datas variados, durante os cem anos seguintes; a versão latina a partir do grego, feita por Zamberti em 1505; a primeira edição do texto grego, por Simon Gryaneus, Basel, 1533; e a versão do grego para o latim, feita por Commandino em 1572. As produções que resultaram desses trabalhos mostram o efeito que elas tiveram sobre as demais traduções e versões, seja em latim ou no vernáculo (idem, p. 448).

O trabalho de Campano, publicado na enciclopédia de Georgius Valla, 1499, exceto os fragmentos de Boécio, não foi tão influente como o de Zamberti. Este publicou pela primeira vez, em latim, um texto completo dos *Elementos* com base em Theon. Ele considerava que o trabalho com o texto grego o habilitou a acrescentar partes esquecidas, a organizar e propor novas provas e que assim refazia o trabalho de Campano, no qual identificava muitos barbarismos. Com

isso, uma querela se estabeleceu, de modo que ataques vindos de Zamberti geravam uma reposta dos seguidores de Campano. A mais notável destas, foi a de Luca Pacioli, 1509, que afirmava ter livrado Campano dos erros dos copistas.

A edição completa dos *Elementos* de Simon Gryaneus, com base em manuscritos gregos, também incluiu os comentários de Proclo. A maioria das outras edições renascentistas de tradição grega é incompleta. Entre elas destaca-se a de Conrad Dasypodius (1532-1600), cuja intenção foi escrever um texto didático. Assim, ele acreditou ser adequado dar apenas os enunciados dos Livros II-XIII seguidos do texto completo dos Livros I-II, em grego e em latim. Murdoch (1956) destaca,

A intenção pedagógica da sua publicação é também vista pelo fato de que, a despeito da grande exclusão de material genuíno de Euclides, ele julgou adequado incluir o texto de uma versão aritmética mais compreensível do Livro II, composta em 1350 por Barlaam. (idem, p. 449)

Anteriores a Commandino, os textos de Simon Gryaneus e Zamberti forneceram material para a fase renascentista dos *Elementos*. Em Paris, 1536, surge a edição em latim de Oronce Finé baseada em Zamberti. Mas seu compatriota Jacques Peletier du Mans seguiu mais as edições árabes de Campano, em latim. Também o francês Candalla, 1566, lançou os quinze livros dos *Elementos* em latim. Logo depois disso, Johannes Buteo publica um apêndice que revê erros nas edições dos *Elementos* feitas por Campano, Zamberti, Oronce e Peletier. Segundo ele, os dois últimos autores tomaram maior liberdade com omissões ou acréscimos e a melhor versão surge com Campano.

O impacto do trabalho de Campano e Zamberti se apresentou também nas edições vernaculares dos *Elementos*. A mais antiga delas, a de Tartaglia, lançada em Veneza em 1543, dá maior peso a Campano. Na França, 1564, surge o trabalho de Étienne Forcatel e, na Alemanha, o de Scheubel, 1558, e o de Holtzmann, 1562. Nas edições inglesas dos *Elementos*, uma primeira intervenção é feita por Recorde, 1551, que toma a geometria com objetivos práticos, reescrevendo as proposições dos livros I-IV.

Em 1572, Commandino, considerado o mais competente editor renascentista dos *Elementos*, estabelece sua versão latina. Murdoch (1956) diz que, pela primeira vez, “nós temos uma versão (não importa em que idioma) dos *Elementos* que está fortemente baseada em um aceitável e crítico original grego” (idem, p. 450). Ainda acrescenta que Commandino, embora consciente dos

esforços de seus predecessores, não deixou dúvida sobre as vantagens de estabelecer um texto seguindo atentamente a tradição grega, e que a importância do trabalho de Commandino é decisiva para a subsequente história moderna dos *Elementos* (idem). A obra de Commandino embasou a maioria das produções durante séculos, até a descoberta de Peyard nos anos 1800. Versões em latim como a de Henry Briggs, 1620, a de Gregory, 1703, texto modelo até o início do século XIX, e a de Simson Gryaneus, editada também em inglês em 1756, seguem a tradição de Commandino. Também houve publicações vernaculares dos *Elementos* que seguiram esse autor.

O século XVI vê os *Elementos* gerando comentários importantes e sedimentando o gênero livro escolar. Clavius (1537-1662) trata dos quinze livros de Euclides, tendo por base o trabalho de Campano, Zamberti e Commandino, apresentando comentários próprios e compilações, valiosos para a história dessa obra. Entre os séculos XVI e XVIII a maioria dos comentários refere-se a livros específicos ou a partes dos *Elementos*. Na linha de Buteo, como visto antes, surge uma quantidade considerável de trabalhos, Benedetti lança em Veneza, em 1553, o livro *Resolução de todos os problemas de Euclides... contanto que seja dada uma abertura do compasso*. Mas, nesse contexto, Petrus Ramus se destaca. É um autor que preconizou e fez escola na crítica à estrutura dos *Elementos*, aos seus princípios e à ordem das suas proposições, com o lançamento do livro *O Ensino da Matemática*, publicado em 1559, Frankfurt. Para Murdoch (1956) essa obra foi uma extensão sofisticada das críticas medievais relativas à lógica dos *Elementos* (idem, p. 452), seguindo a tendência cada vez mais acentuada de adequar Euclides ao ensino.

Em um plano mais específico, na transmissão dos *Elementos* surgem comentários sobre o Livro V e, particularmente, sobre a definição eudoxiana de igualdade de razões. Começando com Giambattista Politi, 1529, e Eleia Vineto, 1575, a questão também foi abordada por Galileo. Dois trabalhos reúnem comentários sobre aspectos particulares dos *Elementos* no início da fase moderna. O primeiro, de Henry Savile, 1621, de modo ainda válido hoje, cobre as primeiras oito proposições do Livro I, discutindo dificuldades relativas aos princípios, às definições e aos postulados nelas implícitos. O segundo, de Girolamo Saccheri, 1733, é a famosa tentativa de provar o postulado das paralelas que inclui seu nome na história das geometrias não-euclidianas.

O segmento final da fase moderna dos *Elementos* é o da tradição dos livros escolares. Produções, tanto em latim quanto no vernáculo, a partir do Renascimento cada vez mais vão se sedimentando e remontam, em seus primórdios, ao trabalho medieval dos árabes. Murdoch (1956) cita dois autores, André Tacquet (1612-1660), que escreve um compêndio incluindo corolários e escólios, com fins pedagógicos e Isaac Barrow (1620-1677) que, ao contrário, para escrever os quinze livros dos *Elementos* de modo sucinto, apropria-se do simbolismo de William Oughtred (1574-1660) (idem, p. 451).

O próximo estágio na tradição dos livros escolares pertence ao século XIX e se caracteriza pela produção de material em grande quantidade e muito diversificado. Nos anos 1800 surge a filologia clássica. Sem o objetivo de tornar Euclides adequado aos liceus e ginásios dessa época, continuam os esforços por estabelecer de forma segura e crítica o texto dos *Elementos*. Trabalho que cada vez mais envolve especialistas como historiadores, arqueólogos e não apenas matemáticos. Conforme Murdoch (1956) existe muito material sobre a transmissão dos *Elementos* ainda não estudado (p. 452). Atualmente a tradução inglesa por Thomas Heath, lançada em 1908, tornou-se consagrada no meio acadêmico. Heath teve como base principal o texto estabelecido por Heiberg a partir da tradição grega teonina quando escreveu o seu *Euclides: os treze livros dos Elementos*.

2.4 Críticas aos *Elementos* de Euclides conforme Ramus, Arnauld e Legendre

O desenvolvimento da matemática nos séculos XVI e XVII está ligado à reintrodução de textos gregos clássicos, fomentada pelo humanismo, quando a nova tecnologia da imprensa dá início ao processo de impressão de obras clássicas, até então compiladas manualmente. Entre muitas obras e em posição de grande importância para a história da educação e, em particular, para a história da educação matemática, estão os *Elementos* de Euclides, que significou por séculos o conhecimento matemático teórico que era ensinado nas primeiras universidades. A partir do Renascimento, os *Elementos* de Euclides passam a ser criticados, tanto por questões específicas dos conteúdos matemáticos como por questões didáticas. Desencadeia-se, nessa época, uma demanda por publicar livros-texto de

matemática resultantes de releituras dos *Elementos*. Inicialmente, as obras ainda marcadas pela tradição euclidiana se intitulam elementos de geometria, mas de modo crescente o desenvolvimento da aritmética e da álgebra vão fornecendo opções à abordagem padrão dos conteúdos, até que surge em sua versão moderna o livro de matemática.

Com o francês Ramus surge o *Scholarum Mathematicarum*, 1569, primeiro livro impresso em que um autor ataca o modo como os assuntos são organizados nos *Elementos* de Euclides. Ramus faz escola e entre seus seguidores serão focalizados Arnould, 1667 e Legendre, edição original de 1794 e uma edição de Blanchet, 1886.

2.4.1 A crítica aos *Elementos* de Euclides conforme Ramus

O próprio nome de um dos livros de Ramus, *O Ensino da Matemática*, anuncia o caso particular de abordagem dos conteúdos matemáticos. “Uma das principais realizações de Ramus foi sua crítica aos *Elementos* de Euclides: não somente das proposições em particular ou da exatidão ou do rigor de certas demonstrações, mas muito mais fundamentalmente da sua metodologia” (Schubring, 2003, p. 46).

O francês Pierre de La Ramée, que latinizou seu nome para Petrus Ramus, foi um filósofo, professor e matemático que viveu no período 1515-1572.

Lefranc (1970) nos diz,

A entrada em cena de um dos mais ilustres e mais destemidos combatentes do século XVI não ia mais tardar a atrair de uma maneira vívida e durável, a atenção do mundo sábio no colégio dos professores reais: nós vamos falar da nomeação do célebre Ramus, em 1551, na qualidade de professor de eloquência e filosofia. (p. 204-205)

A cadeira de professor em Presles lhe serviu de oportunidade para experiências pedagógicas, em aulas que eram muito concorridas. Em 1557, ele integra a comissão encarregada da reforma geral dos estudos nos colégios da universidade. Por volta de 1559, abandona por uns tempos o campo da lógica e da eloquência para se dedicar ao ensino da matemática na universidade de Paris. Forcatel, que foi seu aluno, ensinava aritmética e geometria em língua materna em nível colegial.

Por sua atuação como professor e como um inovador na organização do ensino, Ramus esteve em luta com vários adversários, “não é preciso dissimular, é no fundo o ardor reformador de Ramus nas questões dos programas e da organização do ensino que está a causa primeira de todas as inimizades” (idem, p. 208).

No capítulo III da obra *Scholarum Mathematicarum*, 1569, ou Livro III, como era usado na época, Ramus trata da obscuridade da matemática e assume que os *Elementos* de Euclides geraram essa situação. Ele afirma que nada tão obscuro foi escrito pela mão humana, como os livros dos *Elementos* e que quem se dá ao trabalho de estudar e aprender os elementos da matemática seriamente, se ocupa com a disciplina e com o aluno (Ramus, 1569, p. 75).

É notável aqui o posicionamento didático de Ramus. Ele se preocupa com a matemática enquanto um assunto que deve ser ensinado e para isso é preciso que, antes, se pense no aluno e no conteúdo. Segundo Ramus, existiria uma ordem mais natural para aprender e ensinar matemática. Isso o leva a criticar, sob o aspecto metodológico, o modelo aristotélico presente nos *Elementos* de Euclides.

Para Ramus, a matemática é transmitida nos textos dos *Elementos* de tal forma que apenas o rigor lhe dá sustentação, e isso ele considerava um método pobre. Nada havia, ali, que fornecesse qualquer indicação sobre como se chegou aos resultados, o que não favorecia qualquer ação independente do aprendiz. E um modo mais claro de reescrever o texto de Euclides seria abordar os conteúdos de outra maneira, fazendo uso da aritmética e da álgebra, além da reordenação dos conteúdos.

Como já visto antes, a matemática grega não tratou teoricamente as operações aritméticas e nem dispunha de qualquer simbolismo com que pudesse operar. A matemática grega tratou de propriedades de várias figuras geométricas ou do conjunto dos números inteiros positivos, com o uso do método sintético e, no renascimento, Ramus tem um papel decisivo no desencadeamento do trabalho de reescrita das demonstrações euclidianas. Nessa época, a álgebra era chamada de “arte analítica” e os matemáticos investigavam esse procedimento metodológico. Foi Ramus quem sugeriu que a raiz do método analítico estaria na álgebra (Mahoney, 1969, p.4). A atuação de Ramus nesse sentido é conferida por Schubring (2003),

Na opinião de Ramus, os *Elementos* não eram, como tradicionalmente julgados, o modelo primordial para o raciocínio rigoroso e para a dedução lógica, mas antes revelavam uma falta de ordem natural, metódica. Ramus consequentemente, por um lado desenvolveu regras para o pensamento metódico, e por outro lado propôs uma ordem e uma arquitetura inteiramente diferentes para a matemática: ela deveria começar com o geral, e o geral, era, no entendimento de Ramus, não a geometria, e sim a aritmética. Além disso, a aritmética e a geometria deveriam ser tratadas primeiro separadamente, e só depois combinadas. Portanto, Ramus parece ter sido o primeiro humanista a refletir sobre os métodos e a estrutura dos livros-texto. (idem, p. 47-48)

Segundo Ong (2004) a palavra método sofre um deslocamento de uso e de significado em Ramus. O uso corrente desse termo se referia a Aristóteles, correspondendo ao raciocínio lógico, investigação sistemática ligada ao campo da filosofia. A partir do século XVI são publicados vários livros e “eles são interessantes porque associam em seus títulos o conceito de método com linguagem, em vez de com ciência ou pensamento abstrato (...) (p. 231). É nesse contexto de ruptura que Ramus atua de modo decisivo. Com ele a palavra método se desloca para o campo do pedagógico, significando que qualquer área requer procedimentos que tornem os conteúdos inteligíveis. A entrada da aritmética junto com os procedimentos algébricos nos textos matemáticos é uma proposta metodológica inovadora, nesse sentido, por priorizar o procedimento analítico no campo da matemática, propondo partir do geral para as partes constituintes do problema. Esse seria o método mais adequado ao ensino.

As idéias de Ramus sustentam novos desenvolvimentos que cada vez mais rompem com o modelo geométrico sintético euclidiano, estabelecendo a aritmética e a álgebra como uma alternativa promissora. Descartes, um herdeiro dessa escola, concordava com seus contemporâneos ao admitir que a geometria é o estudo das grandezas. No entanto, ele mostrou como as grandezas podem ser manipuladas geometricamente e o resultado pode ser descrito algebricamente (Fauvel, 1987; Barbin, 1996).

O trabalho de Ramus é importante para a criação do campo didático porque trata os conteúdos matemáticos como um assunto de ensino, enfatizando ser preciso considerar o conteúdo e o aluno, concebendo também um modelo de livro adequado a esse fim. Ao criticar os *Elementos* ele está propondo um livro-texto alternativo para fins didáticos.

Como já visto, os três autores a seguir, Arnauld, Legendre e Wolff são herdeiros do ramismo e assim tem continuidade a discussão de como Euclides foi sendo revisitado.

2.4.2 A crítica aos *Elementos* de Euclides conforme Arnauld

Arnauld viveu no período 1612-1694 e, conforme Piclin (1984), “Antoine Arnauld, teólogo, doutor pela Sorbonne, é um dos melhores testemunhos que se pode achar da atividade intelectual e sócio-política no curso do século XVII” (p. 148). Sua obra é vasta e também o seu campo de atuação. Filósofo, teólogo, matemático, professor, autor de livro didático, ele dialoga com Descartes, com Leibniz e outros pensadores do seu tempo, e enquanto teólogo se ocupa da defesa dos princípios cristãos. Junto com P. Nicole, foi autor das *Lógica* ou *A arte de pensar*, obra chave no conjunto das grandes produções intelectuais de então. Em 1667, Arnauld edita anonimamente pela primeira vez o seu livro *Novos Elementos de Geometria*. Conforme Schubring (2003) esse é “o protótipo de um livro-texto moderno” (idem, p. 49). O ponto chave dessa obra, é que o autor não somente faz uma crítica aos *Elementos* de Euclides, mas escreve um livro com “uma outra ordem totalmente nova”, como consta da capa de um exemplar de 1683. Com isso, Arnauld realiza o que Ramus havia proposto ainda no século XVI, dando continuidade e sedimentando um pensamento novo sobre a matemática e, em particular, sobre a demonstração matemática, quando defende o uso de uma ordem natural para os conteúdos. A folha de rosto dos *Novos Elementos de Geometria*, anuncia,

NOVOS ELEMENTOS DE GEOMETRIA contendo uma outra ordem totalmente nova, e novas demonstrações das Proposições mais comuns, de novos meios de fazer ver quais Linhas são incomensuráveis. De novas medidas de Ângulos, que nem se tinha ainda percebido. E de novas maneiras de achar e de demonstrar a proporção de Linhas.

SEGUNDA EDIÇÃO, onde há um Tratado totalmente novo das Proporções, e muitas outras mudanças consideráveis.

Entre essas palavras algumas são especialmente significativas: ordem e incomensuráveis. Ordem, porque o que há de novo e se construiu em contraposição à Euclides, é o germen do discurso metodológico e, incomensurável, porque também gerando divergências com Euclides, é o germen da entrada, no livro-texto, de conteúdos matemáticos novos, *modernos*, por meio

do debate centrado fundamentalmente na prioridade da aritmética e da álgebra sobre a geometria, ou da prioridade do método analítico sobre o método sintético⁵. A nova ordem se correlaciona diretamente com a entrada de novos conteúdos no livro de geometria e constitui um processo que desemboca na produção de livros que serão finalmente nomeados como elementos de matemática, onde os conteúdos passam a ser abordados aritmeticamente e algebricamente.

Dessa forma, a demonstração geométrica conforme o modelo clássico textualizado nos *Elementos* de Euclides, e que se caracteriza pela geometrização das grandezas, ou método sintético, dá lugar a novas possibilidades, ou seja, o tratamento aritmético-algébrico das grandezas. A figura passa a dar lugar aos símbolos algébricos e veremos que esse é um dos destaques que Arnauld faz, significando que o conteúdo do texto demonstrativo vai mudar porque enquanto a demonstração euclidiana se ocupa com a construção ou observação de figuras geométricas, envolvendo objetos matemáticos como linhas, triângulos, comprimentos, áreas, diagonal, etc., e com relações entre grandezas geométricas, o novo modelo de demonstração utiliza letras e símbolos e se ocupa com identidades e relações genéricas, não se atendo a nenhuma grandeza específica. Daí advém a justificativa da prioridade da álgebra e do método analítico sobre a geometria de então – o seu maior poder de generalidade.

Arnauld ressalta a importância das proposições fundamentais que embasam as provas de um certo assunto. Assim, a questão da ordem implica em estabelecer como que famílias de proposições que se organizam segundo o grau de generalidade que possuem e segundo conteúdos específicos aos quais elas se aplicam, o que não ocorre nos *Elementos*.

No prefácio do livro *Novos Elementos de Geometria*, inicialmente Arnauld focaliza a utilidade da demonstração geométrica. Segue com especificidades das ciências humanas e da ciência matemática quando trata da necessária diferenciação entre as matérias ao admitir diferentes graus de prova. O modo como ele constrói essa linha de pensamento revela um processo interativo entre a demonstração matemática, as ciências humanas e a religião, conforme o comentário de Piclin sobre um dos livros importantes de Arnauld, “ ‘a lógica ou a arte de pensar’ é um belo esforço para estabelecer um método suscetível de ser

⁵ Uma leitura sobre esse assunto encontra-se em Schubring, 2005.

utilizado simultaneamente pela ciência, a filosofia, a teologia” (p. 150). Finalmente, ele apresenta a crítica a Euclides, fazendo assim a defesa das suas inovações.

Ao ler o texto de Arnauld deve-se ter em mente o ideário daquela época, a busca por uma ciência geral que abarcasse todos os campos do conhecimento. Arnauld defende que a geometria contribui positivamente na formação de pessoas “justas”, pois o exercício do raciocínio lógico dá acesso a que se pense com clareza, evitando, assim, o engano. É também, por esse motivo, uma via para se alcançar a salvação da alma. Nos dois casos, essa área da matemática liga-se a um exercício de disciplina. À disciplina do corpo, uma vez que a geometria “não tem absolutamente nada que possa favorecer por pouco que seja a inclinação da Alma para os sentidos” (p.7)⁶. É também um exercício de disciplina intelectual, pois requer acostumar a mente a regras de raciocínio bem específicas, ensinando a impedir os pensamentos enganosos, já que não basta

reconhecer e não se deixar enganar pelas máximas demasiadas obscuras e incertas, que servem de princípios aos falsos raciocínios dos quais os Homens estão totalmente ocupados. Pois, se se toma cuidado, o que nos lança ordinariamente no erro e nos faz tomar o falso pelo verdadeiro, não é ainda a falta de ligação das consequências com os princípios, que consiste no que se chama a forma dos argumentos. (p. 8)

E, para pensar de modo claro, evitando a obscuridade, é preciso estar atento ao fato de que a principal causa de erros nas demonstrações não está na seleção dos princípios, das proposições implicadas em um encadeamento lógico, mas na própria obscuridade dos princípios que devem ser utilizados.

pois é mesmo a obscuridade dos princípios, que não sendo exatamente verdadeiros e não sendo também evidentemente falsos, apresentam ao Espírito uma luz confusa, onde a verdade e a falsidade estão misturadas, o que causa em várias pessoas uma espécie de ofuscação que lhes faz aprovar os princípios sem os examinar por mais tempo.” (p. 8).

O modo como a lógica permite evitar a obscuridade dos princípios é definindo os termos duvidosos, estabelecendo assim princípios claros e certos. Por esse motivo, consta no final do livro o item *Glossário*. Isso ainda não é suficiente pois a pessoa se engana na própria noção de evidência, e também porque quem sabe essas regras nem sempre as pratica. Contudo, a geometria se aplica para sanar os efeitos dessas faltas,

Porque de um lado, ao fornecer os princípios verdadeiramente claros, ela nos dá o modelo da clareza e da evidência para discernir aqueles que os têm dos que não; e de outro, como ela não dispensa jamais a observação dessas duas regras, ela acostuma o Espírito a praticá-las e a sempre estar atento contra os equívocos das palavras e contra os princípios confusos que são as duas fontes mais comuns dos maus raciocínios. (p. 8)

O próprio exercício do bom raciocínio lógico pode levar a um erro mais considerável, que é o de admitir unicamente esse modo de raciocinar. E nessa linha de argumento, propõe a necessária distinção entre matérias, correlacionando a evidência do tipo lógico-geométrica às ciências matemáticas e a evidência que advém das situações às ciências humanas. Assim,

esse costume de rejeitar tudo o que não é inteiramente claro pode engajar em uma falta mais considerável, que é a de querer praticar essa exatidão em todo tipo de matéria e de contradizer tudo o que não é proposto com a evidência Geométrica. Entretanto, há uma infinidade de coisas que não se deve julgar dessa maneira e que não podem ser reduzidas a demonstrações metódicas. (p. 8)

Essa formulação é compatível com a linha de pensamento de Wolff em suas *Aula sucinta sobre a arte de ensinar matemática*, lançado em 1710, como veremos adiante na seção 1.5. O pensamento dessa época especula sobre modos diferenciados de se conhecer, discutindo, propondo modelos metodológicos diferenciados. Considerando as ciências humanas, isso se justifica,

E a razão é que elas não dependem de um certo número de princípios ordinários e certos, como as verdades Matemáticas, mas de um grande número de provas e de circunstâncias; é preciso que o Espírito veja tudo de uma vez e isso não sendo convincentes separadamente, elas não deixam de persuadir com a razão quando são reunidas e relacionadas em conjunto. A maior parte das matérias morais e humanas se incluem nesse caso.

Então é um grande defeito não fazer a distinção entre as matérias; exigir para tudo essa série metódica de proposições que se vê na Geometria. Sobretudo, arrumar dificuldade e crer haver o direito de se rejeitar absolutamente um princípio, quando se julga que ele pode admitir alguma exceção em algum caso. (p. 8)

Segundo Arnauld, o valor de prova de um princípio depende do caso a que ele se aplica, resultando a necessidade de se considerar a distinção entre as matérias, o que nem sempre é feito e constituiria portanto um erro frequente.

Mas se essa falta é bastante comum em alguns Geômetras, ela não nasce todavia da própria Geometria. Essa Ciência sendo totalmente verificável, não pode autorizar um encaminhamento que esteja fundado apenas sobre os princípios do erro. Porque não é verdade que um princípio não prove absolutamente nada; e que não provando

⁶ O número das páginas foram dados por mim porque, no original, o prefácio não é paginado.

em si, ele não prove estando reunido com outros. Há diferentes graus de prova. (p. 9)

Com respeito aos diferentes graus de prova, um permite concluir a certeza e o outro a aparência. O primeiro, o caso das demonstrações da geometria, resulta da aplicação de princípios claros e o segundo, resulta das provas que se reúnem para se chegar a uma certeza nas matérias ditas humanas ou morais. Esses seriam os diferentes graus de prova.

Há aqueles dos quais se pode concluir a certeza e outros dos quais se conclui a aparência. E das várias aparências reunidas em conjunto se conclui algumas vezes uma certeza à qual os Espíritos racionais devem se render. Não é absolutamente certo que se deve ver o Sol apenas nos dias do Ano em que ele aparece, contudo eu devo acreditar nisso, e eu seria ridículo ao duvidar que isso seria impossível demonstrar. A Razão não deve então pretender demonstrar Geometricamente as coisas; mas ela pode provar Geometricamente que é tolice não crer nisso e é dessa maneira que se pode servir da Geometria mesmo nesses tipos de matérias, para fazer ver mais claramente a força da verossimilhança que nos deve fazer crer. (p. 9-10)

A geometria seria não apenas útil, mas também admirável pelo seu poder de generalização. Por exemplo, o que se demonstra para uma linha vale para todas as outras. Ninguém poderia crer nem pensar nesse poder do espírito (p. 7-8). Mas, para o bom raciocínio, para se aprender a discernir, é preciso exercitar o pensamento com uma ordem natural de pensar e uma grande dificuldade nesse ponto foi gerada, justamente, pelos *Elementos* de Euclides que ensinam a pensar de modo confuso, ou seja, desordenado.

Seria uma coisa bastante vantajosa acostumar a reduzir seus pensamentos a uma ordem natural; esta ordem seria como uma luz que os esclareceria uns em relação aos outros. Houve sempre alguma dificuldade nisso, porque os *Elementos* de Euclides eram totalmente confusos e misturados, porque longe de poder dar ao Espírito a idéia e o gosto da verdadeira ordem, eles apenas podiam, ao contrário, acostumá-lo à desordem e à confusão. (p. 13-14)

Mais importante que substituir demonstrações em Euclides por outras mais claras, foi a visão que ele teve com respeito à ordem, pois é prioritário “uma maneira mais natural de dispor toda a geometria” (p. 14). Essa nova ordem embasa também um modo compreensível para o tratamento da geometria porque permite achar proposições “fundamentais”,

Acrescento ainda que essa ordem não serve somente para facilitar a inteligência e para aliviar a memória, mas que ela permite achar os princípios mais fecundos e as demonstrações mais claras (...) há nesses novos elementos demonstrações totalmente novas que nascem, elas mesmas, dos princípios que são estáveis e que compreendem um número bem grande de novas proposições. (p. 16)

(...) há alguns teoremas aos quais se tem dado o nome de Proposição fundamental porque todas as Proposições de uma certa maneira dela dependem. (p. 19)

O autor adverte sobre a possível dificuldade de alguns leitores com os quatro primeiros livros, porque ele faz uso da álgebra e o motivo para isso tem como ponto central a incomensuralidade,

é que tratando-se das Grandezas em geral, sendo que as letras compreendem todas as espécies de quantidade, não se pode servir de figuras para ajudar a imaginação. Além do que se julgava útil começar com esse método que é mais fecundo e o mais Geométrico. (p. 16-17)

Desse modo, a álgebra sendo mais geral compreende todo o tipo de grandeza, não apenas as grandezas geométricas conforme acontece nos *Elementos* de Euclides, permitindo dispensar o uso de figuras. E, ainda, segundo Arnauld não seria preciso ter atenção com o significado ao indicar as grandezas com o uso de letras, pois se passa a investigar identidades e relações (Schubring, 2005, p. 51). Uma vez mais vemos que a proposta alternativa ao modelo euclidiano de geometrização das grandezas implica a prioridade do método analítico sobre o método sintético.

No final do prefácio, Arnauld apresenta um *glossário* reunindo verbetes como axioma, definição, teorema, entre outros, seguidos de algumas *notas explicativas* em que o autor apresenta e explica novidades algébricas como, por exemplo, a escrita $2 + 3$ ou o sinal de igualdade, $=$. As notas explicativas atestam um momento em que existe a necessidade de explicitar o significado de símbolos que são totalmente correntes nos dias de hoje. Nesse sentido, um livro de 1634, *Cursus Mathematici* de Hérigone, exemplifica que as notações entram no texto demonstrativo provocando modificações. A capa do livro de Hérigone anuncia um método novo, breve, claro, “que pode ser entendido facilmente sem o uso de qualquer língua”. Na seção *Ao Leitor*, uma das partes pré-textuais do livro, Hérigone diz que o melhor método para ensinar as ciências é aquele que alia brevidade e facilidade e sendo assim, o uso da simbologia torna-se o mais adequado. Em outra parte pré-textual do livro, *Explicação das Notas*, consta o significado de uma série de sinais e de palavras abreviadas, ou a combinação dos dois. Hérigone alerta ser preciso conhecer as notas pois apenas elas são usadas no desenvolvimento das demonstrações.

O glossário apresenta os seguintes termos (p. 19-20),

DEFINIÇÕES DE ALGUMAS palavras das quais se serve, nesses elementos, sem as definir porque elas são preferencialmente da lógica que da Geometria.

AXIOMA. Chama-se, assim, uma proposição tão clara que ela não precisa de prova. Como, Que o todo é maior que sua parte. Veja a Lógica IV. Part. Cap. VI.

POSTULADO. Serve-se dessa palavra quando se tem alguma coisa a fazer, a qual é tão fácil que não se tem necessidade de prova para demonstrar que se fez o que se quis fazer. Como, Descrever um Círculo em um intervalo dado.

DEFINIÇÃO. O que se chama por esse nome em Geometria é a determinação de uma palavra que pode formar diversas idéias em uma idéia tão clara e tão distinta, que ela retorna sempre ao Espírito quando ele se serve dessa palavra. Como, Chama-se Paralelogramo uma figura cujos lados opostos são paralelos. Veja a Arte de pensar. I. Part. Cap. XI.

TEOREMA. Chama-se assim uma proposição da qual é preciso demonstrar a verdade. Como, O quadrado da base de um Ângulo reto é igual ao quadrado dos dois lados.

PROBLEMA. É também uma proposição que se precisa demonstrar, mas na qual se trata de fazer alguma coisa, e de provar que se fez o que se tinha proposto a fazer. Como, Fazer passar por um ponto dado uma linha paralela a uma linha dada.

LEMA. É uma proposição que está no lugar onde está apenas para servir de prova a outras que se seguem. Pode-se ver exemplos no começo dos Livros VI. X. e XI.

COROLÁRIO. É uma proposição que é apenas uma continuação de uma outra precedente. Pode-se ver um grande número deles no Livro IX.

Mas, é preciso destacar que para melhor fazer ver a dependência que várias proposições tinham de uma só que era como o princípio e o fundamento delas, é preciso algumas vezes tomar como Corolário o que se podia colocar como Teorema, se você quisesse. E pela mesma razão, há alguns Teoremas aos quais se tem dado o nome de Proposição fundamental, porque todas as Proposições de um certo assunto deles dependem. Pode-se ver dois exemplos nos Livros VI. VIII.X. XI. (p. 19-21)

As notas explicativas tratam de notações e explicam o uso das operações aritméticas e algébricas (p. 20-21),

Explicação de algumas Notas.

Ainda que essas Notas sejam explicadas cada uma em seu lugar: todavia se acreditou dever colocá-las aqui, a fim de melhor as fazer entender.

+ Mais; assim, $9 + 3$ quer dizer, nove mais três.

– Menos ; assim, $14 - 2$ quer dizer, quatorze menos dois.

= sinal de igualdade ; assim, $9 + 3 = 14 - 2$ quer dizer, nove mais três é igual à quatorze menos dois.

:: Esses quatro pontos entre dois termos na frente e dois termos atrás, destacam que os quatro termos são proporcionais ou Aritmeticamente, ou Geometricamente. Assim, Aritmeticamente, $7.3::13:9$. E Geometricamente, $6.2::12. 4$.

÷÷ Esses mesmos quatro pontos com uma linha que os corta, destacam a Proporção contínua. Assim, 3.9.27. quer dizer, *3 está para 9 : como 9 está para 27*. Duas letras reunidas, como *bd*, destacam algumas vezes uma Grandeza de duas dimensões, como um Plano em que o comprimento seja *b* e a largura *d*. Mas outras vezes, isso é apenas uma linha em que as duas letras marcam as duas extremidades; o que é fácil de discernir pelo assunto de que se trata. (p. 20-21)

O sumário, ou *Tabela* (p. 22-23), expõe a distribuição dos conteúdos dos *Novos Elementos de Geometria*. Nesse sentido, em uma outra obra, *A arte de pensar*, Arnauld apresenta algumas regras para a demonstração matemática e também discorre sobre duas regras referentes aos procedimentos metodológicos. Ele afirma que as coisas devem ser tratadas, o quanto seja possível, na ordem natural, começando das mais gerais para as mais simples, e que se deve dividir cada gênero em todas as suas espécies, o todo em suas partes, cada dificuldade em todos os seus casos (cf. Coolidge, 1950, p. 105). Observando as notas explicativas e os três primeiros Livros ou capítulos da obra de Arnauld, há mudanças na abordagem de conteúdos que em Euclides foram tratados geometricamente. Como as operações algébricas e aritméticas podem ser aplicadas a qualquer tipo de grandeza, elas são priorizadas no tratamento das grandezas e das proporções.

TABELA do que é tratado em cada Livro.

LIVRO PRIMEIRO. Das grandezas em geral e das quatro Operações, Somar, Subtrair, Multiplicar, Dividir, sendo que elas podem se aplicar a todos os outros tipos de grandezas. Página 1

LIVRO II. Da Razão e Proporção Geométricas. Página 29

LIVRO III: Da Razão e Proporção composta, onde se faz ver também como se pode fazer com as Razões as quatro operações comuns, Somar, Subtrair, Multiplicar, Dividir. Página 72

LIVRO IV. Das grandezas comensuráveis e incommensuráveis. Página 90

LIVRO V: Da extensão. Da Linha reta e circular. Das retas perpendiculares e oblíquas. Página 145

LIVRO VI. Das Linhas paralelas. Página 174

LIVRO VII. Das Linhas terminadas em uma circunferência; onde é falado do Seno e da Proporção dos arcos de diversos Círculos com suas circunferências e do paralelismos das Linhas circulares. Página 195

LIVRO VIII. Dos Ângulos retilíneos. Página 223

LIVRO IX. Dos Ângulos que têm seu vértice fora do centro do Círculo, cujos arcos não os deixam medir. Página 245

LIVRO X: Das linhas proporcionais. Página 282

LIVRO XI: Das linhas recíprocas. Página 306

LIVRO XII: Das figuras em geral, consideradas segundo seus ângulos e seus lados. Página 356

LIVRO XIII: Dos triângulos e quadriláteros considerados segundo seus lados e seus ângulos. Página 380

LIVRO XIV: Das Figuras planas consideradas segundo sua área; ou seja, segundo a grandeza das superfícies que elas contêm. E primeiramente os Retângulos. Página 406

LIVRO XV. Da medida da área dos Paralelogramos, dos Triângulos e outros Polígonos. Página 437
 SOLUÇÃO de um Problema de Aritmética chamado OS QUADRADOS MÁGICOS. Página 463 (p. 22-23)

Segundo Schubring (2005), o livro de Arnauld junto com o livro de Prestet iniciam uma nova proposta de livro didático concebidos segundo a nova ordem, o que significa mudanças não só na geometria mas em toda a matemática (idem, p. 51). Essa tradição marca toda uma produção de livros-texto no ocidente, como o livro de Legendre que chegou a ser usado como livro escolar no Brasil.

2.4.3 A crítica aos *Elementos* de Euclides conforme Legendre

Adrien Marie Legendre publicou o seu *Elemens de Géometrie, avec notes* em 1794, livro premiado no concurso de livros-texto para adoção em escolas francesas. Lacroix e Delambre destacam a importância dessa obra em um relatório educacional: “O Sr. Legendre, em 1794, empreendeu fazer reviver entre nós o gosto pelas demonstrações rigorosas” (Delambre, 1810, cf. Schubring, 2003, p. 142). Essa volta significa um padrão de texto distanciado daquele em que as questões práticas devem embasar o desenvolvimento dos assuntos da geometria, como nos *Éléments de Géométrie*, de Clairaut, 1741.

Elementos é um tipo de livro que deve reunir assuntos importantes, mas de um modo rigoroso. Para Legendre,

Acusa-se os elementos de geometria de serem poucos rigorosos (...) Ora os autores supõem coisas que não estão contidas nas definições, ora estas definições são defeituosas nelas mesmas. Algumas vezes eles se contentam em invocar o testemunho dos olhos, às vezes eles empregam princípios que são verdadeiros em si mesmos, mas parecem ocasionar algumas negligências, donde o espírito não fica satisfeito. (p. 5)

Dependendo do assunto, o método sintético ou o analítico pode ser o mais apropriado, quando se considera um livro elementar de geometria destinado ao ensino, diz Legendre. O rigor advém então dos fundamentos sólidos sobre os quais devem estar estabelecidas as proposições. A atividade algébrica permite combinar proposições, trabalhar aplicações e consequências que daí se pode tirar (p. 8). Legendre pondera a necessidade de abordar o assunto com rigor na hora de escrever bons elementos, e a de ser sucinto com o uso dos procedimentos modernos, quer dizer, algébricos,

Para conseguir esse objetivo, não é necessário o receio de parecer longo e minucioso. Contanto que se seja claro, exato, e que não se diga nada de supérfluo, o objetivo está cumprido. E os alongamentos, se os há, devem ser rejeitados pela natureza das coisas, a menos que se sacrifique a maior vantagem da ciência, sua exatidão. Eu penso que o tipo de método de que se serviram os antigos é ainda o que mais se aproxima da perfeição e o que melhor convém às demonstrações geométricas. Os modernos acham esse método muito trabalhoso e o substituíram pelos mais simples e mais rápidos, mas é preciso reconhecer que eles também não são rigorosos nem satisfatórios. (p. 6)

Com isso, Legendre explica porque ele usa o método de Euclides e “aquele do livro de Arquimedes, Da Esfera e do Cilindro” (p. 6), tentando, na medida do possível, abrandar o trabalho do leitor ao dar às demonstrações toda clareza e brevidade que o assunto comporta. Proposta de trabalho na qual se explicita que a argumentação da necessidade de exatidão e de brevidade nas demonstrações geométricas, constituintes do discurso didático, implica também no desenvolvimento e na seleção do conteúdo matemático. Nesse sentido, o próprio Legendre diz ainda que seu livro é resultado do trabalho docente, “ocupado com o ensino das ciências, eu tenho tido ocasião, já há longo tempo, de destacar imperfeições que se encontram em algumas obras elementares mais conhecidas; pouco a pouco eu reuni materiais para aperfeiçoar os elementos” (p. 6).

Os *Elementos de Geometria* de Legendre foi o primeiro livro de matemática impresso no Rio de Janeiro, em 1809, pela *Regia Officina Typografica* que se instalou junto com a corte de D. João VI na então colônia portuguesa. Legendre teve várias edições no Brasil ao longo do século XIX, inclusive a tradução para o português por Manoel Ferreira de Araújo Guimarães. Uma edição do livro de Legendre, feita por Blanchet, tem o texto original alterado. Com isso, foi possível comparar dois textos de uma mesma demonstração do Livro II, visando explorar com um exemplo histórico o alcance da crítica aos *Elementos* de Euclides e seu impacto sobre os conteúdos matemático e modos de abordá-los.

Explorar o texto de uma mesma proposição nas duas edições do livro de Legendre, a original e a modificada por Blanchet, exigiu recorrer ao trabalho de Schubring, especialista em estudos da correlação entre desenvolvimento de conteúdos e desenvolvimento do livro didático na área da matemática, e com pesquisas específicas sobre Legendre.

Exemplificando, Schubring (2004), destaca que, para provar a proporcionalidade entre os ângulos internos ao círculo e os arcos de círculo determinados por eles, o texto original de Legendre apresenta dois casos, a

Proposição XVI, referente ao caso comensurável e a Proposição XVII, tratando do caso incomensurável. Ao contrário, Blanchet os concentrou em um único caso, a Proposição XVIII. Além disso, o desenvolvimento das demonstrações nas duas obras é distinto. O método de prova usado no texto original é a redução ao absurdo, enquanto no texto alterado a prova é por aproximações sucessivas, “embora esse método pertença à matemática elevada” (Blanchet, 1845, II; cf. Schubring, idem, p. 270). Como Blanchet censurava “imperfeições e algumas lacunas” no trabalho de Legendre, ele achava suas intervenções legítimas (idem).

O texto das duas demonstrações está disposto em duas colunas, incluindo alguns comentários feitos por mim, em um tipo de letra diferenciado.

<i>Elementos de Geometria</i>, com notas, por A. M. Legendre 12^a edição, 1823, Paris Proposição XVI, Livro II, p. 44-46 TEOREMA Em um mesmo círculo ou em círculos iguais, se dois ângulos de centro ACB, DCE, estiverem entre si como dois números inteiros, os arcos interceptados AB, DE estarão entre si como os mesmos números e se terá esta proporção: Ângulo ACB : ângulo DCE :: arc AB : arc DE. Suponhamos, por exemplo, que os ângulos ACB, DCE, estejam entre si como 7 está para 4, ou, o que dá no mesmo, suponhamos que o ângulo M, que servirá como medida comum, esteja contido sete vezes no ângulo ACB e quatro, no ângulo DCE. Os ângulos parciais Acm, mCn, nCp, etc., Dcx, xCγ, etc., sendo iguais entre si, os arcos parciais Am, mn, np, etc., Dx, xγ, etc., serão também iguais entre si*, então o arco inteiro AB estará	<i>Elementos de Geometria</i> por A. M. Legendre, com adições e modificações por M. A. Blanchet 29^a edição, 1886, Paris Proposição XVIII, Livro II, p. 41-42 TEOREMA Em um mesmo círculo ou em dois círculos iguais, a razão dos dois ângulos no centro, é a mesma que aquela dos arcos interceptados entre seus lados. Sejam ACB, DCE, dois ângulos no centro de circunferências iguais. Eu vou supor primeiro os arcos AB e DE tendo uma medida comum tal que ela esteja contida 7 vezes em AB e 4 vezes em DE. A razão de AB para DE será 7/4. Agora, se ligamos os pontos de divisão dos dois arcos aos centros das circunferências, <i>se vê</i> (grifo meu) que o ângulo ABC será dividido em 7 ângulos iguais entre si, assim como compreende entre seus lados arcos
--	---

para o arco inteiro DE como 7 está para 4.

Legendre justifica a igualdade entre ângulos e arcos remetendo à Proposição 15, logo, opera a partir de resultados matemáticos já admitidos. Proposição 15: “Em um mesmo círculo ou em círculos iguais, os ângulos iguais ACB, DCE cujo vértice está no centro, intercepta sob a circunferência dois arcos iguais AB, DE”. (LEGENDRE, 1823, p. 43-44)

Ora, é evidente que o mesmo raciocínio terá sempre lugar, quando na posição de 7 e 4 tivermos outros números quaisquer. Então, se a razão entre os ângulos ACB, DCE pode ser expressa em números inteiros, os arcos AB, DE estarão entre si como os ângulos ACB, DCE.

Legendre ressalta que esse é o caso geral válido para números inteiros quaisquer e logo passa a apresentar o caso da proporcionalidade incomensurável. Blanchet não faz esse destaque.

Escólio. Reciprocamente, se os arcos AB, DE, estivessem entre si como dois números inteiros, os ângulos ACB, DCE estariam entre si como os mesmos números e se teria sempre $ACB : DCE :: AB : DE$, porque os arcos parciais Am, mn, etc., Dx, xy, etc., sendo iguais, os ângulos parciais Acn, mCn, etc., Dcx, xCγ, etc., são também iguais.

*15 (ou seja, Proposição 15)

PROPOSIÇÃO XVII

TEOREMA

Qualquer que seja a razão entre dois ângulos ACB, ACD, esses dois

iguais, e que o ângulo DCE conterá 4 desses ângulos. Logo, a razão dos arcos AB e DE será também 7/4.

Blanchet justifica a mesma igualdade, descrevendo uma construção geométrica e remetendo ao apelo visual que ela permite, pois ao contrário de Legendre, *se vê* (grifo meu) a igualdade entre ângulos e arcos, após unir ao centro da circunferência os pontos de divisão do arco. Também a prova da proporcionalidade entre ângulos e arcos exige admitir a igualdade entre eles. O modo como se argumenta tal igualdade é um ponto de distinção nos dois textos.

Se os arcos AB e DE são incomensuráveis, dividimos o arco DE em três partes iguais, por exemplo, e suponhamos que o arco AB contém 4 dessas partes com um resto KB menor que uma delas. A razão de AB para DE é maior que 4/3 e menor que 5/3.

ângulos estarão sempre entre si como os arcos AB, AD interceptados entre seus lados e descritos dos seus vértices como centros com raios iguais.

Suponhamos o menor ângulo colocado no maior: se a proposição enunciada não é válida, o ângulo ACB estará para o ângulo ACD como o arco AB está para um arco maior ou menor que AD. Suponhamos esse arco o maior e o representemos por AO, teremos assim:

Ângulo ACB : ângulo ACD :: arc AB : arc AO.

Imaginemos agora que o arco AB esteja dividido em partes iguais, cada uma das quais seja menor que DO. Existirá ao menos um ponto de divisão entre D e O: seja I esse ponto, e unamos CI. Os arcos AB, AI, estarão entre si como os números inteiros e se terá em virtude do teorema precedente:

Ângulo ACB : ângulo ACI :: arc AB : arc AI.

Legendre descreve uma construção geométrica – unamos o ponto I ao ponto C – mas a igualdade entre os dois arcos se justifica por um teorema matemático, não pelo apelo visual como em Blanchet.

Comparando essas duas proporções uma com a outra e observando que os antecedentes são os mesmos, se concluirá que os consequentes são proporcionais e que assim

Ângulo ACD : ângulo ACI :: arc AO : arc AI.

Mas o arco AO é maior que o arco AI. É preciso, então, para que a proporção subsista, que o ângulo ACD seja maior que o ângulo ACI. Ora, ao contrário, ele é menor. Então, é impossível que o ângulo ACB esteja para o ângulo ACD como o arco AB está para um arco maior que AC.

Mas, se ligamos os centros C, F aos pontos de divisão dos arcos, *se vê* (grifo meu) que o ângulo DFE está dividido em três partes iguais e que o ângulo ACB contém 4 dessas partes, com um resto KCB menor que uma delas. A razão dos ângulos ACB, DFE está, portanto, ainda compreendida entre $\frac{4}{3}$ e $\frac{5}{3}$. Portanto, as razões ACB : DFE e AB : DE estão compreendidas todas as duas entre $\frac{4}{3}$ e $\frac{5}{3}$.

Mas, dividindo o arco DE em 10, 100, 1000... partes, se provará semelhantemente, que as razões estão compreendidas entre dois números consecutivos de décimos, centésimos, ... Logo, as razões são iguais, pois se chega a provar que elas estão compreendidas entre números cuja diferença pode resultar tão pequena quanto se queira.

Enquanto Legendre opera com a igualdade de proporções entre grandezas geométricas e com o método da redução ao absurdo, conforme o modelo euclidiano, Blanchet opera com a igualdade entre proporções numéricas, utilizando o método então moderno dos procedimentos aritméticos e, assim, a

Demonstra-se por um raciocínio inteiramente semelhante, que o quarto termo da proporção não pode ser menor que AD; logo, ele é exatamente AD, logo, se tem a proporção: Ângulo ACB : ângulo ACD :: arc AB : arc AD.	razão euclidiana que compara grandezas é vista como frações contínuas, introduzindo uma operação numérica.
---	---

O último bloco de texto das duas demonstrações merece ser um pouco mais explorado. Note que o procedimento de Legendre é a comparação de duas razões que surgem, como se vê, pela divisão dos arcos e, daí, pela redução ao absurdo se conclui a igualdade entre os arcos. Assim foi tratado o infinito que está implícito na incomensurabilidade entre grandezas, desde os antigos gregos e durante milênios.

Segundo Barbin (1989), o infinito tem um papel decisivo no modo como se legitima uma demonstração matemática (idem, p. 129). Essa questão é que está em jogo e que diferencia os dois textos acima, conforme destacou Schubring (2004). Assim, o procedimento de Blanchet transforma profundamente a demonstração original, pois trabalha com o processo infinito de divisões sucessivas. E quanto a evitar o uso do infinito, o próprio Legendre se manifesta dizendo preferir o método dos antigos por entender que aborda a questão com maior rigor. Encerrando a demonstração dos dois teoremas, Legendre apresenta um corolário sobre a proporcionalidade direta de ângulos e arcos e com dois *escólios* referentes a medidas⁷, que não constam na edição de Blanchet.

Após a leitura dos dois textos, constatamos que são duas demonstrações distintas pelo modo de argumentar e, consequentemente, pelos conteúdos e procedimentos usados. Blanchet não edita um livro que contém apenas muitas modificações. Considerando o pequeno tópico sob análise, é um outro texto, não é o original, “é falsificado” como destaca Schubring (2004). Esse fato tem implicações históricas decisivas. Primeiro, as próprias alterações feitas nos textos originais indicam o encaminhamento novo que vai sendo dado aos conteúdos. Segundo, deixa lacunas, como confere a pesquisa de Schubring (idem) sobre a crítica ao livro de Legendre em favor dos *Elementos* de Euclides, ocorrida na Itália do século XIX. Nesse país, circularam as duas versões de Legendre e não há

⁷ Os textos do Corolário e dos dois Escólios constam do Anexo 1.

indícios ainda de qual edição foi objeto das críticas. Um terceiro fato é que reedições do livro de Legendre acabam por não apresentar o prefácio, no qual, em geral, os autores explicavam escolhas feitas, justificando o lançamento da obra. Logo, o prefácio é um item importante. Por exemplo, a primeira edição de Legendre em português, por Manoel Ferreira de Araújo Guimarães, 1809, não traz a demonstração alterada ou falsificada como visto anteriormente, mas o prefácio da edição original foi omitido. O tradutor informa,

Devo fazer aqui huma advertencia sobre a edição. Eu comecei a servir-me da 3^a edição (de 1800), até que hum Official, muito estudioso e muito erudito, teve a bondade de me franquear a 5^a (de 1804), e por esta conferi a presente.

A versão de Legendre em português traz apenas um resumo das oito partes em que o livro está dividido, com os respectivos conteúdos, e apresenta o item *Notas* como consta na edição original.

2.5 O trabalho de Christian Wolff – *Aula sucinta sobre a arte de ensinar matemática*⁸

Christian Wolff, 1679-1754, foi quem lançou na Alemanha a primeira coleção de livro didático de matemática, *Anfangs-gründe aller mathematischen Wissenschaften*, ou *Elementos fundamentais para todos os conhecimentos matemáticos*, 1710, seguindo o novo modelo de Arnauld. Conforme Schubring (2005), a coleção lançada por Wolff, também em latim, *Elementa Matheseas Universae*, 1713, foi um sucesso reeditado muitas vezes ao longo de todo o século XVIII, tendo sua qualidade reconhecida pela *Encyclopédie* (idem, p. 94-95) como a melhor e mais popular produção no seu gênero, difundindo-se por toda a Europa durante cinquenta anos, pelo menos. O texto dessa obra com que eu trabalhei, *Kurzer Unterricht, von der mathematischen Lehrt* ou *Aula sucinta sobre a arte de ensinar matemática*, explana sobre o ensino de matemática.

Um caso que vem sendo estudado por Schubring⁹, a atuação do matemático e astrônomo português, José Monteiro da Rocha (1734-1819), está diretamente

⁸ Uma versão em português desse texto consta do Anexo 2.

⁹ Ver Schubring, 2001, onde ele analisa um manuscrito de Monteiro da Rocha, embora, ali, não seja mencionado esse fato novo sobre a ligação entre Monteiro da Rocha e Wolff. Esse assunto ainda não publicado entre nós, Schubring expôs por ocasião do meu Exame de Qualificação II, requisito do Curso de Doutorado em Educação, PUC-Rio, 16 de agosto de 2007.

relacionado com o trabalho de Wolff, atestando a popularidade acima mencionada e mostrando a possibilidade de influência desse autor no Brasil.

Monteiro da Rocha foi um padre jesuíta, passando depois ao clero secular, que lecionou Gramática Latina e Retórica em Salvador, Bahia. Por volta de 1760, ele segue para Portugal, onde atuou e teve seu trabalho reconhecido, participando da reforma pombalina do sistema de ensino, chegando a ser vice-reitor da Faculdade de Matemática da Universidade de Coimbra. Segundo Schubring, a metodologia adotada por Monteiro da Rocha tem como base o texto de Wolff que será discutido a seguir, sendo que Monteiro da Rocha usou a versão em latim que corresponde à versão em alemão, antes mencionada. Esse fato é importante porque traz informações sobre os estudos de matemática no Brasil durante o século XVIII, quando a maioria dos colégios era dirigida pelos jesuítas, que ao serem expulsos de Portugal em 1759, pelo Marquês de Pombal, tiveram muitos arquivos dispersados ou destruídos também na colônia e pouca informação chegou até nós dessa época.

Wolff, filósofo e matemático alemão, segundo Buchdahl (1980) interessou-se pela lógica, principalmente por suas implicações metodológicas. Para Wolff, faltava à lógica alguma sustentação com respeito à “arte da descoberta” (idem, p. 483) (grifos do autor). O texto de Wolff exemplifica claramente esse posicionamento, sendo um complemento importante no sentido de avançar o entendimento do alcance das críticas aos *Elementos* de Euclides e suas relações com o texto didático.

Após o prefácio do livro, encontra-se o capítulo *Aula sucinta sobre a arte de ensinar matemática*, que pode ser lido como um texto destinado ao professor, destinado a quem ensina. O autor tem por objetivo mostrar como, à medida que um conteúdo matemático vai sendo estabelecido, essa produção exige ser exposta, escrita, comunicada. Em suas explanações Wolff toma por base exemplos que vêm da geometria e com seu trabalho nos atemos a um conjunto de procedimentos e de objetos específicos que constituem a matemática enquanto um campo teórico. Ele discorre sobre axioma, teorema, definir, explicar, entre outros termos. Explora como eles surgem e as especificidades que lhes são próprias e é notável como Wolff encadeia os assuntos em sua complexidade. Com isso, o estudo desse autor torna-se importante para construir entendimentos sobre a demonstração

geométrica no texto escolar, porque ele explora como a exposição do conteúdo vai sendo constituída no contexto do ensino. Em suas primeiras palavras, Wolff diz,

A arte de ensinar matemática, isto é, a ordem a qual ela atende em sua exposição, começa com as definições, tem origem nos princípios e continua com os teoremas e as tarefas. (p. 5)

A exposição de um conteúdo matemático necessariamente envolve um conjunto de definições, conceitos, algoritmos e assim por diante, que é mediado por um léxico, uma série de termos que se tornam específicos. Sendo assim, Wolff opera no âmbito da referência a objetos, relações e operações matemáticas e também opera no âmbito da relação sujeito que conhece e objeto a ser conhecido, destacando nessa relação a presença do aspecto intelectual, mental e o da experiência.

Conceituar, segundo Wolff, é a operação mental de representar a coisa e definir é estabelecer as características das coisas. Apesar de tanto um caso quanto o outro envolverem operações mentais, é importante notar que para o autor há distinção entre conceituar e definir,

Chamamos um conceito toda representação de uma coisa pela mente. (p.5)

As definições são conceitos distintos pelos quais as coisas tornam-se diferentes umas das outras e delas derivam outros resultados que se pode conhecer. (p.6)

As definições demandam uma operação mental, logo são conceitos, mas com a especificidade de caracterizar os objetos segundo atributos que eles possuem. Para diferentes definições há a necessidade de diferentes termos, quer dizer, a demanda pela produção do léxico. Também para um mesmo termo há definições que podem ser equivalentes ou mais gerais e assim por diante. Além disso, uma definição diz respeito a um termo específico que a ela corresponde, indicando os atributos dos objetos, e também diz respeito à existência.

Conforme Wolff as definições,

(...) parecem duas coisas: ao mesmo tempo definições de palavras, as definições nominais ou definições das coisas, as definições reais. (p. 5-6)

As definições nominais estabelecem algumas características pelas quais as coisas podem se tornar conhecidas, as quais levam um dado nome. Como quando se diz na geometria ser um quadrado uma figura que tem os quatros lados e ângulos iguais. Então, o número de lados torna o quadrado diferente de todas as figuras restantes que não têm nenhum ângulo, mas a igualdade dos lados e dos ângulos o diferencia de todas as restantes que têm ângulos. E, assim, as características indicadas são suficientes para diferenciar essa figura de todas as restantes. (p.6)

As definições das coisas é um conceito claro e distinto da maneira e modo como a coisa é possível. Como quando na geometria é dito, um círculo torna-se descrito quando se move uma linha reta a partir de um ponto fixo. Então, disso se compreende que um círculo é possível. O que se pode realmente fazer, tem que ser possível. (p.6)

O autor diferencia entre enunciar as características de um objeto matemático, *definição nominal*, e descrever as condições necessárias para se gerar um objeto matemático, *definição real*. Nesse ponto, tem-se a especificidade do definir e do construir um objeto, do mostrar sua existência. Questão antiga no desenvolvimento da matemática, já presente na obra de Euclides e determinante das duas classes de demonstração, os teoremas e os problemas.

Wolff afirma que, em matemática, se aspira à clareza e à completude dos conceitos. Ele faz a distinção entre *conceito claro* e *conceito confuso* considerando a operação mental pela qual a pessoa pode dizer prontamente que uma figura é um triângulo, por exemplo, no caso da clareza. Ao contrário, quando um conceito é confuso essa identificação imediata não ocorre, há dúvida quanto ao nome do objeto. A operação de reconhecer um objeto pelo nome, de imediato ou não, seria um modo de se manifestar a posse ou não de um conceito claro. E para explorar ainda mais o que seria conceituar, o autor diferencia conceito claro distinto de conceito claro não-distinto. Ele exemplifica com as cores, dizendo que se pode identificar a cor vermelha sem, no entanto, enunciar suas características constituintes.

O conceito claro é distinto se eu posso dizer por quais características eu reconheço a coisa em questão, como, quando eu digo, um círculo em si mesmo implica a figura de uma linha curva sem interrupção, cujos pontos estão a uma mesma distância de um ponto central. Pertence também a isso o exemplo do quadrado. (p. 7)

Mas um conceito claro é não-distinto se eu não posso dizer as características pelas quais se reconhece a coisa em questão; da mesma forma é com o conceito que se tem da cor vermelha. (p. 7)

A questão da completude diz respeito à rede de outros conceitos que a caracterização de um objeto matemático demanda. Por exemplo, no caso do círculo, um conceito distinto é completo ou incompleto quando se tem ou não “um conceito claro de linha reta, de pontos, de pontos fixos e de movimento ao redor de si mesmo” (p.7). Cada vez mais em seu trabalho Wolff se atém e segue explorando o âmbito da produção e do uso de um léxico específico no campo da teorização matemática. Um desses termos é a própria palavra definição que,

segundo ele, deve se tornar um conceito claro, diferenciado de todos os outros, pois nas ciências matemáticas o que se busca é justamente a clareza e a completude dos conceitos,

Daí, não se encontra nas definições nenhuma palavra que não se tornou previamente esclarecida, ou palavras diferentes que se possa assumir como conhecidas. (p. 8)

O autor trata da *aquisição das definições*. Segundo ele, esse processo se dá a partir de definições já estabelecidas ou a partir da vivência pessoal. Fica claro que, devido à necessidade teórica, esses dois pontos são colocados de forma distinta, mas não em oposição. Wolff admite e explora a correlação entre teórico e empírico e isso pode ser visto, por exemplo, no modo como ele concebe o processo de aquisição das definições. Segundo ele, o processo pelo qual se encontra a definição das palavras ou definição nominal, pode acontecer de quatro maneiras. A primeira maneira segue-se quando alguém observa pessoalmente, por exemplo, um eclipse total da lua e pode definir esse fenômeno como uma destituição da luz em toda a lua (p. 8). A segunda maneira diz respeito ao trabalho de apurar o que se produziu antes, porque ocasionalmente pode ocorrer de se deixar de fora algumas circunstâncias. Daí, pela própria omissão é possível obter uma nova definição à qual pertencem mais coisas. Wolff exemplifica esse caso dizendo,

Por exemplo, eu postulo, eles chegaram pelo procedimento já referido a um conceito de triângulo mais informativo, que é o de espaço incluso entre três linhas. Quando se omite as circunstâncias de que devem ser três linhas, fica o conceito de uma figura que é inclusa entre linhas. (p. 9)

A terceira maneira como se adquire a definição nominal também diz respeito à possibilidade de se produzir novas definições quando “se tem atenção para com as circunstâncias particulares que determinam a coisa em sua natureza. Assim, é possível inventar outras situações semelhantes, pela imitação, e determinar outras coisas pela sua natureza” (p. 9-10). Wolff cita o exemplo do triângulo como o caso particular da figura que tem três lados. Daí decorre a possibilidade de transformar esse conceito em outros e de postular que o plano seja incluso entre quatro ou cinco lados e assim por diante, resultando a figura de quatro, de cinco lados, a figura quadrangular ou a pentagonal. A quarta maneira de se encontrar a definição nominal reporta ao trabalho de explorar aspectos ainda omissos nas definições já disponíveis depois do terceiro estágio. Essa investigação

segue com o exemplo do triângulo. Wolff diz que pode ser determinado se as linhas no triângulo devem ser retas ou curvas, iguais ou desiguais e que esse trabalho vai resultar em novas definições.

Ainda explorando o processo de aquisição das definições nominais, o autor discute a questão da possibilidade das definições, que também se apresenta de quatro modos. No primeiro caso, a vivência pessoal assegura que a definição é possível. Com respeito aos outros casos,

Por exemplo, se você realmente percebeu que um plano está compreendido por três linhas retas, então você não tem nenhuma dúvida sobre se um plano pode ser compreendido por três linhas retas ou não, isto é, se a definição de triângulo retilíneo é possível ou não. Se você agora distingue o conceito de uma figura que é um plano como a que está compreendida por linhas, assim, é igualmente certo e suficiente que um plano pode ser compreendido por linhas. Por isso, você pode assumir essas definições como bases não contraditórias do conhecimento e estar seguro de que tudo que se deduz destas, por conclusões corretas, são casos possíveis equivalentes. (p. 10)

Mas, segundo Wolff, a possibilidade das definições nominais ou das palavras se comporta diferente a partir do que se produziu pela terceira e pela quarta forma de aquisição. Aqui, explorar como se produzem novas teorias a partir da que já se estabeleceu implica admitir um elemento arbitrário e a questão da possibilidade se correlaciona intimamente com esse fato. Quando se transformam em circunstâncias similares as circunstâncias particulares que determinam a coisa em sua natureza, não se pode saber pelas características assumidas arbitrariamente se a coisa pode ser determinada ou não, diz Wolff (p. 12). Tomando como exemplo o plano, se sabemos que um plano está compreendido por três linhas, ainda não está claro que ele pode ser compreendido por quatro ou cinco linhas, pois nada pode tornar possível a arbitrariedade que se estabeleceu, já que a possibilidade está baseada na natureza das coisas. Ele conclui,

E, por causa disso, vocês têm que provar a possibilidade, por causa da natureza e constituição da coisa, contanto que você também queira assumir as definições como bases não contraditórias do conhecimento. Assim, como Euclides encontrou a definição da igualdade dos lados do triângulo segundo a quarta maneira, até ele mostrou, no primeiro problema, como se constrói um triângulo equilátero com uma linha dada qualquer, a fim de demonstrar essa mesma possibilidade, entre outras. (p. 12)

A definição das coisas ou definições reais é um processo que se dá de quatro maneiras. A definição das coisas mostra como uma coisa é possível, de que modo

ela pode se originar. Isso exige que se tenha atenção com as coisas para cuja possibilidade algo contribui. Wolff exemplifica,

Quando definido que um círculo se origina se uma linha reta se movimenta em torno de um ponto fixo, assim é necessário, para sua possibilidade, uma linha reta e um ponto. O ponto deve estar imóvel e também o movimento da linha, regular. Mas a linha reta deve se movimentar de tal modo que ela volte ao lugar onde o movimento começou. (p. 8)

São quatro as maneiras para se encontrar as definições das coisas,

A primeira acontece quando várias coisas possíveis já reconhecidas são associadas entre si, como quando se associam máquinas simples a fim de se chegar a uma outra composta da qual não se tinha antes um conceito. E aqui se tem muito que agradecer, repetidamente, à sorte cega. (p. 13)

Wolff diz que é mais difícil encontrar a definição das coisas pela definição em palavras ou definição nominal, pois “é necessário ter conceitos distintos de tudo que esteja aí contido e que tenha definição em palavras” (p. 13-14). Ele volta ao exemplo do eclipse da lua e diz que, nesse caso, é preciso considerar o que se sabe sobre os fatores envolvidos, a luz, a posição relativa dos astros e assim por diante. E que a partir do que se reconhece previamente é possível tirar algumas conclusões, como em um teorema.

Se agora você se lembra, a luz se propaga em linha reta e no tempo da lua cheia quando um eclipse acontece, a terra fica entre o sol e a lua e absorve a luz que na lua deveria cair. Assim, se reconhece sem esforço que o eclipse se origina quando à lua chega a sombra da terra. Aqui, é trazido em palavras aquilo que é assumido na definição por meio de outras verdades reconhecidas pelas conclusões (...) como na prova de um teorema. (p. 14)

O terceiro e o quarto caminho para se encontrar as definições das coisas é quando se está presente e observando enquanto uma coisa é formada. Por exemplo, quando se descreve um círculo ou quando se decompõe uma coisa composta em seus elementos constituintes. Mas as definições das coisas devem ser corretas e possíveis, ou seja, a pessoa deve estar certa de que elas se originam do que se afirma sobre elas (p. 14). É possível chegar a essa certeza ou pela experiência ou pelo conhecimento das conclusões corretas encontradas, antes, por outra pessoa. Exemplificando, Wolff diz que descrever um prisma triangular quando se movimenta um triângulo em torno de uma linha reta, é entender pelas conclusões corretas que três linhas podem compreender um plano.

Porque, como se pode traçar de todos os pontos para todos os pontos uma linha reta, se pode delimitar todo ângulo com uma linha reta. Como o ângulo tem duas linhas retas como lados, se ele se torna fechado por mais uma linha reta, então o plano necessariamente é fechado por três linhas retas. (p.15)

Os termos axioma, experiência, teorema, proposição, demonstração, explanações, problemas, corolários e anotações são discutidos pelo autor, que finaliza falando sobre a utilidade da matemática. Os axiomas resultam de reflexões sobre as definições. Axioma é alguma dedução feita a partir de uma definição.

Vocês observam aquilo que está contido nas definições e imediatamente deduzem alguma coisa disso. Pois nós chamamos tais coisas axiomas. (p. 16)

Um axioma pode mostrar que uma coisa existe ou que pode ser construída. O primeiro caso, *Axiomata*, diz respeito a uma afirmação feita a partir da definição de um objeto específico. Por exemplo, considerando o círculo, pode-se afirmar que todas as linhas traçadas do ponto médio até a extremidade são iguais entre si. E no caso do axioma que indica a existência de uma coisa, *Postulata*, se afirma a possibilidade de uma construção geométrica, por exemplo, que de todos os pontos para todos os pontos pode ser traçada uma linha reta (p. 16-17). Como os axiomas têm origem nas definições eles não precisam ser demonstrados, pois a verdade que eles afirmam decorre de um conceito já estabelecido. É justamente o exame da possibilidade das definições que vai permitir saber se um axioma está correto ou não. Por isso, diz-se que os axiomas são aceitos sem prova. Wolff alerta que é nesse sentido que se deve ler Euclides e outros geômetras. Quanto à experiência,

Chama-se uma experiência o que se conhece quando se tem atenção para com as sensações (p.18)

Por exemplo, eu vejo que quando se acende uma luz todas as coisas em torno de mim são visíveis. Esse conhecimento é chamado uma experiência. São proposições individuais sobre vivências também pessoais. Wolff comenta que, no entanto, um fenômeno como o sol nascer todo dia não é um caso especial porque se vê isso diariamente. Mas quando se fala em tamanho aparente do sol sempre se alega casos especiais como, o seu diâmetro foi encontrado com a ajuda de alguns instrumentos, por tal astrônomo, em dada época, porque essa não é uma experiência realizada por cada pessoa (p. 18). E também os matemáticos distinguem as experiências e o que delas foi deduzido.

Por exemplo, uma luz é acesa, daí, eu começo a ver o que antes para meus olhos estava totalmente disfarçado e escondido. Isso é a experiência. Contudo, se eu reflito sobre a luz ser o motivo pelo qual as coisas tornam-se visíveis, que elas estavam invisíveis na escuridão e penso que as coisas naturais, sob as mesmas circunstâncias, têm sempre o mesmo efeito, assim, não resta dúvida para mim que

também quando em outro momento, em outros lugares, na escuridão, uma luz é acesa, igualmente se pode ver o que na escuridão ficava escondido. E, conseqüentemente, eu concluo que a luz torna tudo visível, que ela ilumina. Essa proposição geral não é a experiência em si, ao contrário, ela é derivada por uma conclusão correta a partir da experiência. (p. 19-20)

Ainda caracterizando o conhecimento que é resultado da experiência e da atividade intelectual, Wolff menciona que quando alguém sentiu alguma coisa como nós, pela impressão de fatores externos, ela não pode provar, mas pode exigir, com razão, que se acredite nela. Mas quando alguém deduziu algum resultado, isso deve ser julgado pelo intelecto e por isso não pode exigir que se acredite nela. Essa discussão está de acordo com o que veremos no próximo capítulo, a idéia de que a complexidade do problema vai exigir tratar metodicamente a questão matemática com o trabalho conceitual.

Um teorema, justamente, indica um afastamento do mundo experimental no sentido mencionado acima, pois para Wolff,

Quando se comparam diferentes definições e se conclui o que não se pôde reconhecer com uma simples observação, isso se chama teorema. (p. 21)

Por exemplo, comparando um triângulo e um paralelogramo com base e altura iguais, se conclui que o tamanho do triângulo é igual à metade do tamanho do paralelogramo. A proposição correspondente vai dizer, o triângulo é a metade de um paralelogramo se os dois têm base e altura iguais, e ela se chama um teorema. Com isso, há dois fatores a serem observados em um teorema, a proposição e a demonstração. A proposição indica o que pode ou não pode, sob dadas condições, ser assumido por uma coisa. O teorema mostra como se pensou para chegar aos resultados (p. 22-23). Uma proposição exata não deve omitir as características pelas quais ela é possível e é por causa das coisas que isso deve ser reforçado. Conforme o exemplo mencionado acima, para a proposição ser exata ela deve conter a condição da igualdade entre as bases e as alturas. Assim, toda proposição pode se subdividir em duas partes. A primeira é a condição sob a qual alguma coisa é reforçada e ela se chama hipótese. No exemplo que estamos examinando tem-se como hipótese – se o triângulo e o paralelogramo têm mesma base e altura. Já a segunda condição chama-se declaração ou tese e indica uma afirmativa do que uma coisa, em si, compreende, e conforme nosso exemplo vamos ter como tese – o triângulo é a metade do paralelogramo. Wolff discute

ainda o caso em que a condição está contida na definição sem estar expressa distintamente (p. 23-24),

Por exemplo quando eu digo, os três ângulos de um triângulo somam 180 graus, nenhuma dessas condições parece estar contida na proposição. Isto só coloca na palavra triângulo sua definição. Agora se observará a condição, pois a proposição também é – se uma figura está delimitada por três linhas retas, logo, a soma dos seus três ângulos é igual a 180 graus. Aqui também está a condição sob a qual alguma coisa é provada, a de que o plano está delimitado por três linhas retas. Então, é mesmo assumido o quê, da coisa, está contido na definição dela. (p. 23)

Wolff ressalta o encadeamento lógico necessário que o teorema exige, já que se pode pensar em duas coisas,

Por exemplo, quando eu tenho o teorema, um triângulo que têm a mesma base e a mesma altura de um paralelogramo é a metade deste. Assim, do triângulo, eu penso primeiro que ele tem a mesma base e altura que o paralelogramo; depois, que ele é a metade daquele. Eu penso o último por causa do primeiro. (p. 24)

O autor explana sobre as bases da demonstração.

As razões da demonstração são as definições daquelas palavras e coisas que estão contidas tanto na condição como na afirmação já proposta ou deduzida por definições pensadas destas mesmas coisas, ou conhecidas pela experiência. (p. 25)

Em uma demonstração costuma-se indicar os teoremas e definições em que ela se baseia e isso permite consulta e a certificação do que está exposto, diz Wolff. Além disso, há a explicação das definições, bases e teoremas dos quais se deduz uma demonstração e esse conjunto de informações úteis, Wolff chama de nomeações. São úteis porque mostram o que se deve pressupor como conhecido com respeito ao teorema,

Porque as definições são os primeiros pensamentos, os axiomas se originam diretamente delas. Por outro lado, os teoremas são deduzidos delas ou diretamente ou indiretamente. Assim, logo se coloca na nomeação o nome daquela certeza que repousa na base da demonstração (...) Sim, porque especialmente esses são truques por meio dos quais se pode conseguir convencer uma outra pessoa da certeza das definições e também, em especial, da certeza dos axiomas e dos teoremas. Assim, ao mesmo tempo, os citados nomes das bases das demonstrações me dão oportunidade para pensar sobre a maneira adotada para convencer uma outra pessoa das certezas das bases assumidas nas demonstrações. (p. 26-27)

Ao fazer deduções em uma demonstração nós pensamos com base nas regras do silogismo, mas pode acontecer de se omitir a primeira parte do silogismo porque as nomeações levam a esse passo. Mesmo assim para Wolff, é legítimo recorrer a explicações prévias.

Quanto aos problemas, eles tratam de coisas que devem ser feitas e se subdividem em três partes, proposição, resolução e prova. As proposições

fornece a exposição do que deve ser feito. As resoluções quando são completas indicam a sequência do que se deve fazer e a demonstração implementa o que foi prescrito antes. Conforme Wolff,

Dessa maneira, sempre que cada problema deve ser demonstrado, ele se transforma em um teorema no qual a resolução dá as condições; o teorema, porém, a afirmativa. (p. 28-29)

Os corolários são acréscimos que podem constar em uma demonstração quando uma proposição se aplica a um caso especial, ou quando dela se deduz uma outra proposição em função das conclusões. Ou ainda, quando por causa do que está incluído na proposição se acrescenta a ela mais alguma coisa. O primeiro tipo de corolário não precisa de prova já que se trata de um caso particular. O outro caso exige demonstrar como se fez a dedução.

Por exemplo, quando alguém afirma esses corolários dos citados teoremas, em um triângulo retângulo não se pode ter mais que um ângulo reto, então é necessário mostrar como esse corolário se deduz do teorema. Isto é, como os três ângulos juntos são iguais a dois ângulos retos, assim não resta nada para o terceiro, se realmente dois ângulos são retos. (p. 29)

Finalizando, o autor define as anotações como uma explicação de aspectos que não são mencionados no texto da demonstração, como a utilidade do ensino ou a utilidade de fatos históricos pertinentes. E diz que o modo proposto por ele para o ensino da matemática é geral e válido para as outras ciências que se ocupam em conhecer as coisas com exatidão. Suas últimas palavras afirmam o valor do exercício teórico e das suas especificidades em relação a outros afazeres,

Não podem ser participantes dessa excelente utilidade aqueles que aprendem somente alguns problemas matemáticos e outras coisas que embora possam ser úteis na vida humana, porém, em si, não pertencem propriamente à matemática. (p. 31)

Wolff, em suas aulas, mostra como se estabelecem os conteúdos fundamentais da demonstração em geometria plana, encaminhando a discussão sobre a arte de construir a teoria e explorando sua complexidade. Além disso, ele não mostra apenas a pertinência dos temas, adota um modo didático de discutir, exemplificando e tornando precisas as distinções que focaliza. Com propriedade, ele convida e encaminha o entendimento de vários aspectos presentes no desenvolvimento da demonstração matemática, no contexto do ensino. Dessa forma, atesta a atualidade do seu trabalho – Wolff não se dirigiu apenas aos seus contemporâneos.