Referências Bibliográficas

AABOE, A. *Episódios da história antiga da matemática*. Rio de Janeiro: SBM, 2002.

ALMEIDA, R. C. M. *Abordagens do conceito de proporcionalidade em livros didáticos de matemática no Brasil do século XX*. Rio de Janeiro: Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, 2004. Dissertação de Mestrado.

ARNAULD, A. *Nouveaux Elemens de Geometrie*. 2a Ed. La Haye: Henry Van Bulderen, 1690.

ARTMANN, B. *Euclid: The creation of Mathematics*. New York: Springer, 1999.

___________. Euclid´s Elements and its prehistory. *Apeiron: a journal for ancient philosophy and science*, v. XXIV, n. 4, p. 1- 47, dec. 1991.

ARSAC, G. L'origine de la démonstration: Essai d'épistémologie didactique. *Recherches em Didactique des Mathématiques*, v. 8, nº 3, p. 267-312. 1987.

BALACHEFF, N. Processus de preuve et situations de validation. *Educational Studies in Mathematics*, v. 18, p. 147-176. 1987.

___________. *Un cadre d'étude du raisonnement mathématique*. Disponível em: www.lettredelapreuve. Acesso em 18 set. 2006.

___________. *The researcher epistemology: a deadlock for educational research on proof*. Disponível em: www.lettredelapreuve. Acesso em 18 set. 2006.

___________. *L'argumentation est-elle un obstacle ? Invitation à un débat...* Disponível em: www.lettredelapreuve. Acesso em 18 set. 2006.

BARBIN, E. On the argument of simplicity in elements and schoolbooks of goemetry. *Educational Studies in Mathematics*, v. 66, n. 2, out, p. 225-242. 2007.

___________. *Produire et lire des textes de démonstration*. (Coord.) Paris: Ellipses, 2005.

___________. Descartes et les mathématiques. In__BARBIN, E.; CAVEING, M. (Org.) *Les philosophes et les mathématiques.* Paris: Ellipses, 1996. p. 43-65.

___________. Trois démonstrations pour un théorème élémentaire de géométrie. Sens de la démonstration et objet de la géométrie. In__*La démonstration mathématique dans l'Histoire*. Besançon: Ed. IREM, 1989. p. 57-98.

___________. (a) Formes de la démonstration mathématique. In__*La démonstration mathématique dans l'Histoire*. Besançon: Ed. IREM, 1989. p. 129.

BELTRAME, J. *Os programas de ensino de matemática do Colégio Pedro II: 1837–1932*. Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, 2000. Dissertação de Mestrado.

BETTINELLI, B. Intuition et démonstration chez Archimède. In__*La démonstration mathématique dans l'Histoire*. Besançon: Ed. IREM, 1989. p. 181-196.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. *Parâmetros Curriculares Nacionais. Ensino Médio, 3*. Brasília: Ministério da Educação/SEMT, 1999.

BRUNSCHVICG, L. *Les étapes de la philosopie mathématique*. 2. ed. Paris: Librairie Félix Alcan, 1922.

BULMER-THOMAS, I. Euclid: life and works. In__GILLISPIE, C. C. (Ed.). *Dictionary of scientific biography*. New York: Scribner, 1956. v. 3. p. 414-437.

BURDHAL, G. Wolff, Christian. In__GILLISPIE, C.C. (Ed.). *Dictionary of scientific biography.* New York: Scribner, 1956. v. 6. p. 482-484.

CARVALHO, J. B. P. F. *Introdução aos Elementos de Euclides*. Rio de Janeiro: INTEMAT, 2008. (no prelo)

___________. *A influência de Felix Klein e Ernst Breslich sobre o ensino de matemática no Brasil*. Relatório de Pesquisa para o CNPq, jan, 2000.

___________. *Comentários sobre a Proposição XII-2 dos Elementos de Euclides*. Mimeog. s.d.

___________. A Turning Point in Secondary School Mathematics in Brazil: Euclides Roxo and the Mathematics Curricular Reforms of 1931 and 1942. *International Journal for the History of Mathematical Education*, v. 1, n. 1, p. 69-86. 2006.

___________. Euclides Roxo e o movimento de reforma do ensino de Matemática na década de 30. *Revista Brasileira de Estudos Pedagógicos*, v. 81, n. 199, p. 415-424, set/dez, 2000.

___________. Euclides Roxo e as polêmicas sobre a modernização do ensino de Matemática. In__ CAMPOS, T. (org*). Euclides Roxo e a modernização do ensino de Matemática no Bra*sil. São Paulo: SBEM, 2003. p. 86-158.

CAVEING, M. Introduction générale. In__VITRAC, B. *Euclide D´Alexandrie: Les Éléments. Traduits du texte de Heiberg*. Paris: Presses Universitaires de France, 1990. p. 12-148. v. 1.

CHEMLA, K. Geometrical figures and generality in ancient China and beyond: Liu Hui and Zhao Shuang, Plato and Thabit ibn Qurra*. Science in Context*, n. 18 (1), p. 123-166. 2005.

CIFOLETTI, G. C. *Mathematics and Rhetoric: Jacques Peletier, Guillaume Gosselin and the making of the french algebraic tradition*. Pinceton, 1992. Doctor Thesis.

CLAGETT, M. *Archimedes in the Middle Ages*. Wisconsin: University of Wisconsin Press, 1964. v. 1.

COOLIDGE, J. L. *The mathematics of great amateurs*. Oxford: Oxford Sciences Publications, 1950.

CORRY, L. The development of the idea of proof (up to 1900). In__GOWERS, T. *The Princeton companion to mathematics proof*. Pinceton: Princeton University Press, 2006.

COSTA, G. M. L. *Os livros didáticos no Brasil do século XIX*. Rio de Janeiro: Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, 2001. Dissertação de Mestrado.

DARNTON, R.; ROCHE, D. (orgs.). *Revolução impressa: a imprensa na França, 1775-1800*. São Paulo: Edusp, 1996.

DASSIE, B. A. *A Matemática do Curso Secundário na Reforma Capanema*. Rio de Janeiro: Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, 2001. Dissertação de Mestrado.

DIJKSTERHUIS, E. J. *Archimedes*. New Jersey: Princeton University Press, 1987.

DORMOLEN, J. Learning to understand what giving a proof really means. *Educational Studies in Mathematics*, n. 8, p. 27-34. 1977.

DOUAIRE J., HUBERT C. *Vrai? Faux? ... On en débat!* Paris: ISNB, 1999.

DUVAL, R. Structure du raisonnement deductif et apprentissage de la demonstration. *Educational Studies in Mathematics*, 20, p. 233-261. 1999.

___________. A congnitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, n. 61, p. 103-131. 2006.

___________. *Algunas questiones relatives a la argumentación*. Disponível em www.lettredelapreuve. Acesso em 18 set. 2006.

EDWARDS, C. H. *The historical development of the Calculus*. New York: Springer, 1982.

FAUVEL, J. (Org.) Descartes. In: *The Renaissance of mathematical sciences in Britain*. Birmingham: Open University, 1987.

___________. Cartesian and Euclidean Rhetoric. *For the learning of Mathematics*, n.8, fev, p.25-29. 1988.

FAUVEL. J; GRAY, J. *The history of mathematics: a reader*. London: The Open University, 1987.

FREITAG, B. et al. *O livro didático em questão.* São Paulo: Cortez, 1989.

FREUDENTHAL, H. *Didactical Phenomenology of mathematical structures*. Dordrecht: D. Reidel Publishing Company, 1983.

___________. H. *Revisiting mathematics education: China lectures*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1994.

GIL, F. *Preuves*. Paris: Aubier, 1988.

GOLDSTEIN, J. A. A matter of great magnitude: The conflict over arithmetization in 16th, 17th, and 18th century english editions of Euclid’s Elements Book I trough Book VI (1561-1795). *Historia Mahtematica*, n· 27, p. 36-57. 2000.

GRATTAN-GUINNESS. Numbers, magnitudes, ratios, and proportions in Euclid´s Elements: how did he handle them? *Historia Mathematica*, n. 23, p. 355-375. 1996.

HAIDAR, M. L. M. *O Ensino Secundário no império brasileiro*. São Paulo: Grijalbo, Ed. da USP, 1972.

HEATH, T. L. *The thirteen books of Euclid's Elements*. Nova York: Dover Publications, 1956. 3 v.

___________. *The works of Archimedes*. New York: Dover, 1953, p. 137-142. v.3.

HERBST, P. G. Establishing custom of proving in american school geometry: evolution of the two-column proof in the early twentieth century. *Educational Studies in Mathematics,* n. 49, p. 283-312. 2002.

KLEIN, F. *Elementary mathematics from an advanced standpoint*. New York: Dover Publications, 1929. 2 v.

KNORR, W. R. *The evolution of Euclidean Elements*. Dordrecht: D. Reidel, 1975.

___________. On Heiberg´s Euclide. *Science in Context*, n. 14, p. 133-143. 2001.

KÖNIG, J. *Einführung in das Studium des Aristoteles*. Freiburg: Alber, 2002 .

LAKATOS, I. *A lógica do descobrimento matemático: Provas e refutações*. Rio de Janeiro: Zahar Editores, 1978.

LEFRANC, A. *Histoire du Collège de France: depuis ses origines jusqu'a la fin du premier empire*. Genova: Slatkine Reprints, 1970. 1 ed. 1893.

LE GOFF. J. P. De la méthode dite d´exhaustion: Grégore Saint-Vicent (1584-1667). In__*La démonstration mathématique dans l'Histoire*. Besançon: Ed. IREM, 1989. p. 197-220

LEGENDRE. A. M. *Éléments de Géométrie*, *avec des notes*. Paris: Firmin Didot, 1794.

___________. *Elementos de Geometria*. Trad. Manoel Ferreira de Araújo Guimarães. Rio de Janeiro: Impressão Regia, 1809.

___________. *Éléments de Géométrie, avec additions et modifications, par M. A. Blanchet*. 29ª ed. Paris: Firmin-Didot, 1886.

___________. *Éléments de Géométrie*, *avec des notes.* 11ª ed. Paris: Firmin Didot, 1817.

___________. *Éléments de Géométrie, avec des notes*. 12ª ed. Paris: Firmin Didot, 1823.

LEHMANN, D.; BKOUCHE, R. *Initiation à la géométrie*. Paris: PUF, 1982. p. 439-487.

LELOUARD, M.; MIRA, C.; NICOLLE, J.M. Differentes formes de démonstrations dans les mathématiques grecques. In__*La démonstration mathématique dans l'Histoire*. Besançon: Ed. IREM, 1989. p. 155-180.

MACHADO, S.D. A. e outros. *Educação matemática*. São Paulo: Educ, 1999.

MAHONEY, M.S. *The beginnings of algebraic thought in the seventeenth century*. Disponível emhttp: www.princeton.edu/~mike/17thcent.html. Acesso em 15 jun. 2005.

MANCOSU, P.; JORGENSEN, K. F.; PEDERSEN, S. A. *Visualization, explanation and reasoning styles in mathematics*. Dordrecht: Springer, 2005.

MANGUEL, A. *Uma história da leitura*. São Paulo: Companhia da Letras, 2002.

MARTZLOFF, J. C. Quelques exemples de démonstrations em mathématiques chinoises. In__*La démonstration mathématique dans l'Histoire*. Besançon: Ed. IREM, 1989. p. 131-153.

MIORIM, M. A. (1998). *Introdução à história da educação matemática.* São Paulo: Atual Editora, 1998.

MUELLER, I. *Philosophy of mathematics and deductive structure in Euclid´s Elements*. New York: Dover, 2006. 1 ed. 1981.

MUGLER, C. *Archimède*. Paris: Société d'Édition "Les belles letters", 1971.

MURDOCH, J. E. The medieval language of proportions: Elements of the interaction with greek foundations and the development of new mathematical techniques. In__CROMBIE, A.C. (Ed). *Scientific change*. London: Heinemann, 1961. p. 237-271.

___________. Transmission of the Elements. In__GILLISPIE, C. C. (Ed.). *Dictionary of scientific biography*. New York: Scribner, 1956. p. 437-459. v. 3

NAGLE, J. *Educação e Sociedade na Primeira República*. São Paulo: EDUSP, 1947.

NUNES, Maria Thetis. *Ensino Secundário e Sociedade Brasileira*. Rio de Janeiro: MEC/Instituto Superior de Estudos Brasileiros, 1962.

ONG, W. J. *Ramus, method, and the decay of dialogue: from the art of discourse to the art of reason*. Chicago: University of Chicago Press, 1992. 1 ed. 1958.

PANZA, M. Mathematical proofs. *Synthese*, n. 134, p. 119-158. 2003.

PATSOPOULOS, D.; PATRONIS, T. The theorem of Thales: a study of the naming of theorems in school geometry textbooks. *International Journal for the History of Mathematics Education*, n 1, v. 1, p. 57-68. 2006.

PEREIRA, O. P. *Ciência e dialética em Aristóteles*. São Paulo: UNESP, 2001.

PERELMAN, C; OLBRECHTS-TYTECA, L. *O tratado da argumentação*. São Paulo: Martins Fontes, 2002.

PERELMAN, C. *O império retórico: retórica e argumentação.* Porto: Edições ASA, 1993.

PFROMM NETTO, S.; DIB, C. Z.; ROSAMILHA, N. *O livro na Educação.* Rio de Janeiro: Primor/INL, 1974.

PICLIN, M. Antoine Arnauld. In__HUISMAN, D (Org.). *Dictionnaire des Philosophes*. Paris: Presses Universitaires de France, 1984. p. 148-152.

RAMUS, P. *Scholarvm mathematicarvm Libri vnus et triginta.* Francofurt: Edição de A Lazaro Schonero, 1599. p. 75-112.

ROCHA, J. L. *A matemática do Curso Secundário na Reforma Francisco Campos*. Rio de Janeiro: Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, 2001. Dissertação de Mestrado.

ROMANELLI, O. O. *História da Educação no Brasil- 1930/1973*. Petrópolis: Vozes, 1991.

ROUCHE, N. *Le sens de la mesure*. Bruxelas: Didier Hatier, 1992.

___________. N. Prouver: amener à l'évidence ou contrôler les implications? In__*La démonstration mathématique dans l'Histoire*. Besançon: Ed. IREM, 1989. p. 9-38.

ROXO, E. *A matemática na escola secundária*. São Paulo: Companhia Editora Nacional, 1937.

SAITO, K. A preliminary study in the critical assessment of diagrams in Greek mathematical works. *SCIVMV*, v. 7, dez. 2006.

___________. Les figures des Éléments dans les manuscripts et les editions imprimées. *Histoire et epistemologie des sciences mathematiques*, Seminaire commun organisé par l´IREM et la MSH de Clermont-Ferrand, 25-27 abril de 2007. (pré-print)

SEIJI, H. *Analysis of Mathematical Discourse: multiple perspectives*. Shouthampton, Faculty of Mathematical Studies. 1992. Doctor Thesis.

SCHUBRING, G. *Conflits between generalization, rigor, and intuition: number concepts underlying the development of analysis in 17-19th century France and Germany*. New York: Springer, 2005.

___________. Neues über Legendre in Italien. Mathematik im Fluss der Zeit, HEIN, W.; ULRICH, P. (Hrsg.), *Algorismus*, n. 44, s. 256-274. 2004.

___________. *Pesquisar sobre a história do ensino da matemática: metodologia, abordagens e perspectivas*. 2004 (a). Disponível em: www.spce.org.pt/sem/2.pdf. Acesso em 15 de setembro de 2007.

___________. *Análise histórica de livros de matemática: notas de aula*. Campinas: Editora Autores Associados, 2003.

___________. Production mathématique, enseignement et communication: Remarques sur la note de Bruno Belhoste, "Pour une réévaluation du rôle de l´enseignement dans l´histoire des mathématiques" parue dans la RHM 4 (1998), p. 289-304. *Revue d´histoire des mathématiques*, n. 7, p. 295-305. 2001.

___________. The cross-cultural `transmission´of concepts– the first international mathematics curricular reform around 1900, with an appendix on the biography of F. Klein. *Ocasional paper*, Universität Bielefeld, n. 92, nov. 1987.

___________. Le retour du refoulé: les débats sur la supériorité de la méthode analytique ou de la méthode synthétique autour de 1800. In__ *Histoires de géométries: Séminaire de l'année 1996*. Paris: C.N.R.S., 1996.

___________. *The cross-cultural "transmission" of concepts – the first international mathematics curricular reform around 1900, with an appendix on the biography of F. Klein*. Bielefeld: Institut für Didaktik der Mathematik, Universität Bielefeld. Occasional paper 92. 1989.

___________. *Gegenständliche und soziale Momente des Wissens als Kategorien für Untersuchungen zur Geschichte der Mathematik-Didaktik*. Padeborn, 1981. Sonderdruck.

SMITH, D. *History of Mathematics*. New York: Dover, 1958. 2.v. (1º v. 1ª ed. 1923; 2º v. 1925)

UNGURU, S. E. ROWE, E. Does the quadratic equation have greek roots? a study of “Geometric algebra”, “Aplication of areas”, and related problems. *Libertas Mathematica*. 1982. v. 1.

VALENTE, W. R. *Uma história da matemática escolar no Brasil (1730-1930)*. São Paulo: Annablume Editora, FAPESP, 1999.

WAERDEN, B. L. *Science awakening*. Nova York: Oxford University Press, 1971.

WOLFF, C. *Anfangs-gründe aller mathematischen Wissenschaften.* Frankfurt: Georg Olms, 1973. 1ª ed. 1710.

Apêndice 1

Corolário. Como o ângulo no centro do círculo e o arco interceptado entre seus lados têm uma ligação tal que, quando um aumenta ou diminui em uma razão qualquer o outro aumenta ou diminui na mesma razão, se está no direito de estabelecer uma dessas grandezas para medir a outra. Assim, daqui em diante, nós tomaremos o arco *AB* para a medida do ângulo *ACB*. É preciso somente observar, na comparação entre os ângulos, que os arcos que lhes servem de medida devem ser descritos com raios iguais, porque é isso que supõem todas as proposições precedentes.

Escólio I. Parece mais natural medir uma quantidade por uma quantidade de mesma espécie, e sobre esse princípio conviria referir todos os ângulos ao ângulo reto. Assim, o ângulo reto sendo a unidade de medida, um ângulo agudo seria expresso por um número tomado entre 0 e 1, e o ângulo obtuso, por um número entre 1 e 2. Mas essa maneira de exprimir os ângulos não seria mais cômoda no uso, se achou muito mais simples medi-los por arcos do círculo por causa da facilidade em fazer arcos iguais a arcos dados, e por muitas outras razões. Enfim, se a medida dos ângulos pelos arcos de círculos é de alguma maneira, indireta, nem por isso é menos fácil obter por meio dela a medida direta e absoluta, porque se comparamos o arco que serve de medida a um ângulo com o quarto da circunferência, comparamos a razão do ângulo dado com o ângulo reto, o que é a medida absoluta.

Escólio II. Tudo o que foi demonstrado nas três proposições precedentes para a comparação dos ângulos com arcos, tem lugar igualmente para a comparação dos setores com os arcos, porque os setores são iguais quando os ângulos o são e, em geral, eles são proporcionais aos ângulos. Logo, dois setores *ACB*, *ACD*, tomados no mesmo círculo ou em círculos iguais, estão entre si como os arcos *AB*, *AD*, bases desses mesmos setores. Daí se vê que os arcos de círculo que servem de medida aos ângulos, podem também servir de medida aos diferentes setores de um mesmo círculo ou de círculos iguais

Apêndice 2

Versão para o português do texto *Kurzer Unterricht, von der mathematischen Lehart*, capítulo do livro *Anfangs-gründe aller mathematischen Wissenschaften*, de Christian Wolff, edição de 1973. Original de 1710. Páginas 5-32.

Aula sucinta sobre a arte de ensinar matemática

Ordem na arte de ensinar matemática.	1. A arte de ensinar matemática, isto é, a ordem a qual ela atende em sua exposição, começa com as *definições*, tem origem nos princípios e continua com os teoremas e tarefas – mas, sobretudo anexa acessórios e anotações conforme a situação.
O que são as definições.	2. As definições são conceitos distintos, pelos quais as coisas tornam-se diferentes umas das outras e disso se derivam restos que se pode conhecer delas. Mas, por isso, isso parece duas coisas, ao mesmo tempo, definições de palavras – *definições nominais* - ou definições das coisas – *definições reais*.
O que são as definições nominais.	3. As definições nominais estabelecem algumas características pelas quais as coisas podem se tornar conhecidas, as quais levam um dado nome. Como quando se diz na geometria ser um quadrado uma figura que tem os quatros lados e ângulos iguais. Então, o número de lados torna o quadrado diferente de todas as figuras restantes que não têm nenhum ângulo, mas a igualdade dos lados e dos ângulos o diferencia de todas as restantes que têm ângulos. E assim as características indicadas são suficientes para diferenciar essa figura de todas as restantes.
O que são as definições reais.	4. As definições das coisas é um conceito claro e distinto da maneira e modo como a coisa é possível. Como quando na geometria é dito: um círculo torna-se descrito quando se move uma linha reta a partir de um ponto fixo. Então, disso se compreende que um círculo é possível. O que se pode realmente fazer, tem que ser possível.
O que é um conceito.	5. Chamamos um conceito toda representação de uma coisa pelo intelecto.

O que é um conceito claro.	6. Um conceito é claro quando eu posso reconhecer uma coisa no meu pensamento, assim, ela logo me ocorre, quando, por exemplo, sei que aquilo é uma figura que eu posso chamar de triângulo.
O que é um conceito confuso.	7. Pelo contrário, um conceito é confuso quando meus pensamentos não são suficientes para reconhecer a coisa em questão, por exemplo, quando uma planta a mim é mostrada e eu estou em dúvida se é a mesma que eu olhei de outra vez e se ela tem este ou outro nome.
O que é um conceito distinto.	8. O conceito claro é distinto se eu posso dizer por quais características eu reconheço a coisa em questão como, quando eu digo, um círculo em si mesmo implica a figura de uma linha curva sem interrupção cujos pontos estão a uma mesma distância de um ponto central. Pertence também a isso o exemplo do quadrado.
O que é um conceito indistinto.	9. Mas um conceito claro é não distinto se eu não posso dizer suas características, daí se reconhece a coisa em questão; da mesma forma é com o conceito que se tem da cor vermelha.
O que é um conceito completo.	10. Um conceito distinto é completo quando também se tem clareza das características que ele inclui. Como quando se declara uma definição do círculo, também se tem um conceito claro de linha reta, de pontos, de pontos fixos e de movimento ao redor de si mesmo.
O que é um conceito incompleto.	11. Contrariamente, um conceito distinto é incompleto quando não se tem um conceito claro das características que ele em si comporta.
Quais conceitos valem em Matemática.	12. Nas ciências matemáticas aspira-se antes de todas as coisas à clareza e completude dos conceitos, bem como às definições das coisas, às definições das palavras, tanto quanto elas sejam necessárias, quando se quer provar, por completo, os modos de ensino.
Natureza das suas definições.	13. Daí, não se encontra nas definições que se seguem nenhuma palavra que não se tornou previamente esclarecida, ou palavras diferentes que se pode assumir como conhecidas.
Quando a pessoa se contenta com um conceito confuso.	14. Se em alguns casos a pessoa pode se contentar com um conceito indistinto, assim, ela deve também arranjar que logo e sem esforço a ele ela possa chegar, em conseqüência de umas coisas em presença das quais, particularmente, a pessoa não tem preocupação.

A primeira maneira para encontrar as definições.	15. Chega-se às definições das palavras de modos diferentes. O primeiro caminho é quando se observa a coisa presentemente. De tal modo, se reconhece ser um eclipse da lua uma destituição da luz em toda a lua.
Prática da mesma maneira.	16. Nossa palavra "definição" deve se tornar um conceito claro, pois devemos o diferenciar um do outro, com muito cuidado, especialmente ter cuidado no começo com cada um, e depois no final refletir bem com todos eles juntos.
A segunda maneira.	17. Quando a pessoa considera as definições encontradas pelo modo prescrito antes, ocasionalmente se encontra certas circunstâncias que se pode deixar fora. Assim, se obtém pela própria omissão uma nova definição que pertence a mais coisas que a primeira. Por exemplo, eu postulo, eles chegaram pelo procedimento já referido, a um conceito de triângulo mais informativo, que é o de espaço incluso entre três linhas. Quando se omite as circunstâncias que devem ser três linhas: assim, permanece o conceito de uma figura que é inclusa entre linhas.
A terceira maneira.	18. Quando se considera que as definições puderam ter sido encontradas como elas querem, se tem atenção para as circunstâncias particulares que determinam a coisa em sua natureza. Assim, se pode inventar outras situações semelhantes, pela imitação, e determinar outras coisas pela sua natureza. E dessa forma você encontra mais uma vez definições novas. Por exemplo, quando você considera que uma figura sendo um triângulo tem por causa da situação particular, que a figura tem três lados. Assim, você pode transformar o conceito em um outro diferente e, por exemplo, postular que o plano seja incluso entre quatro ou cinco, ou seis lados e assim por diante. Pois vocês têm explicações de quadrangular, de figuras com cinco, seis ângulos e assim por diante.
A quarta maneira.	19. Sim, como na outra maneira, algumas características são omitidas, assim vocês podem, por outro lado, acrescentar também novas características que determinam a coisa naqueles aspectos que ficaram indeterminados na coisa anterior. Por exemplo, se você pensa de novo sobre a definição de triângulo, assim você encontra que não foi determinado se as linhas devem ser retas ou curvadas e também, não, se elas devem ser iguais ou desiguais. Coloque, portanto, primeiramente, que as linhas devem ser retas: assim você consegue a definição de um triângulo retilíneo. Coloca, além disso, que todos os três lados devem ser iguais: Assim você consegue a definição de um triângulo eqüilátero e assim por diante.

A possibilidade das definições.	20. Se você encontrar as definições do primeiro tipo, então você está certo de que elas são possíveis. Pois, quem quer duvidar que aquela é possível, qual realmente ele encontra? Assim mesmo, são possíveis aquelas que você distingue dos possíveis pela outra maneira. Contudo, se você as distingue das definições cuja possibilidade você ainda não reconheceu, assim, você ainda não sabe se são mesmo possíveis ou não. Por exemplo, se você realmente percebeu que um plano está compreendido por três linhas retas, então você não tem nenhuma dúvida sobre se um plano pode ser compreendido por três linhas retas ou não, isto é, se a definição de triângulo retilíneo é possível ou não. Se você agora distingue o conceito de uma figura que é um plano, que ela está compreendida por linhas, assim é igualmente certo e suficiente que um plano pode ser compreendido por linhas. Por isso, você pode assumir essas definições como bases não contraditórias do conhecimento e estar seguro de que tudo que se deduz destas por conclusões corretas, são casos possíveis equivalentes.
Quando ela deve ser investigada.	21. Contudo, isso se comporta totalmente diferente com as definições que se inventa, depois, pela terceira e quarta maneira. Pois, se você depois da terceira maneira, transforma as circunstâncias em outras particulares que determinam a coisa em sua natureza para outras similares: assim você não pode saber se é possível que pelas características assumidas arbitrariamente, uma coisa pode ser determinada. Por exemplo, se você sabe que um plano pode estar compreendido por três linhas, ainda não está claro que ele pode ser compreendido por quatro, por cinco e por seis linhas. Se nos é desconhecido mesmo na quarta maneira, se as circunstâncias arbitrárias são possíveis, por aqueles, vocês procuram determinar as coisas mais exatamente. Então se o plano, por exemplo, pode ser incluso por três linhas retas, ainda assim não segue que todas as três linhas podem ser iguais entre si. Pois nos dois casos nada pode fazer possível a arbitrariedade de vocês, ao contrário, a possibilidade é baseada na natureza e constituição das coisas. E por causa disso, vocês têm que provar a possibilidade por causa da natureza e constituição da coisa, contanto que você também queira assumir essas definições como bases não contraditórias do conhecimento. Assim, como Euclides encontrou a definição da igualdade dos lados do triângulo, segundo a quarta maneira, ele até mostrou no primeiro problema como se constrói um triângulo eqüilátero com toda linha dada, a fim de demonstrar essa mesma possibilidade, entre outras.

O que as duas definições das coisas considera.	22. Quanto a definições das coisas mesmas, elas mostram como uma coisa é possível, isto é, de que maneira e modo ela pode se originar. E por isso se tem por elas dois tipos de coisas para prestar atenção, daquelas coisas que para sua possibilidade, algo contribui. Por exemplo, definido que um círculo se origina se uma linha reta se movimenta em torno de um ponto fixo, assim, é necessário para sua possibilidade uma linha reta e um ponto; o ponto deve estar imóvel e também o movimento da linha regular, mas a linha reta deve se movimentar de tal modo que ela volta ao lugar onde o movimento começou.
Primeiro caminho para encontrar a definição das coisas.	23. Mas as definições das coisas são encontradas por quatro formas. A primeira vez que acontece isso é quando se associa entre si muitas coisas possíveis que se têm reconhecidas e se consegue novas coisas por tais combinações, como quando se associa máquinas simples; a fim de se chegar a uma outra composta daquela, da qual antes não se tinha um conceito. E aqui se tem muito que agradecer, repetidamente, à sorte cega.
O outro caminho.	24. É mais difícil quando se deve encontrar a definição das coisas pela definição em palavras; em quais casos é necessário ter conceitos distintos de tudo que esteja contido e que tem definição em palavras. Como quando se diz na Astronomia ser o eclipse da lua uma privação de luz na lua cheia. Tem-se a considerar o que se sabe sobre a luz e as luas. Se agora você lembra que a luz se propaga em linha reta e no tempo da lua cheia, quando um eclipse acontece, a terra fica entre o sol e a lua e absorve a luz que na lua deve cair, assim, se reconhece sem esforço que o eclipse se origina quando à lua chega a sombra da terra. Aqui, é trazido o que é assumido na definição em palavras, por meio de outras verdades reconhecidas pelas conclusões e como ela é possível na mesma maneira e modo como na prova de um teorema, pelas mesmas conclusões que delas se aceita; se revela por conclusões da razão, por aquilo que se assume do teorema e por meio do que foi reconhecido antes, o que se atribui à coisa no teorema, sob a condição assumida.
O terceiro e o quarto caminho.	25. Muito mais simplesmente se pode chegar às definições das coisas quando a pessoa está presente e observando, enquanto uma coisa é formada; por exemplo, quando um círculo é descrito ou quando se disseca uma coisa composta em suas partes constituintes.
Como examinar a sua	26. Se agora as definições das coisas devem ser corretas ou possíveis, é preciso estar seguro de que tais

possibilidade.	coisas podem existir e que se torna necessário, para isso, que também delas pode originar o que se afirma delas. A pessoa quer estar segura de que um círculo pode ser descrito pelo movimento em torno de um ponto fixo. Assim, a pessoa deve estar certa de que se pode atar uma linha em pontos fixos e de que a linha, não obstante, pode ser movida em torno deste ponto.
Outras implementações prévias.	27. Para a pessoa chegar a essa certeza, ou pela experiência ou pela lembrança de alguém que encontrou as conclusões corretas antes; por exemplo, pela experiência é sem muitas ponderações claras que uma linha pode se sujeitar a um ponto fixo, que ela em torno de si se movimenta. Contudo, se eu descrevo um prisma triangular, isso surge quando se movimenta um triângulo ao longo de uma linha; pode-se compreender, pelas conclusões corretas, que três linhas podem compreender um plano. Então, porque se pode traçar de todos os pontos para todos os pontos um linha reta, assim se pode tornar cada ângulo com uma linha reta. Agora o ângulo tem duas linhas retas como lados. Se ele agora se torna fechado por mais uma linha reta, então é o plano necessariamente fechado por três linhas retas.
Como as encontrar na Geometria.	28. Na geometria não é problema encontrar a definição das coisas. Pois o movimento dos pontos gera linhas, o movimento das linhas, superfícies, o movimento das superfícies, sólidos. Se também você combinar inventivamente os pontos, linhas e superfícies de todo modo e depois combinar todos os modos possíveis de movimento, então resultam as definições desejadas, como mostra Barrow em suas *Lectionibus geometricis*.
O que são os axiomas.	29. As definições das palavras e das coisas podem ser previamente ou refletidas ou comparadas com outras. Vocês observam aquilo que está contido nas definições e, imediatamente, deduzem alguma coisa disso; assim, nós chamamos tais coisas axiomas. Por exemplo, quando vocês refletem sobre a definição do círculo cuja linha que se movimenta em torno de um ponto médio sempre se mantém à mesma distância; assim, vocês logo compreenderam que todas as linhas traçadas do ponto médio até a periferia, são iguais entre si. Agora essa verdade é um axioma.
A diferença entre eles.	30. Esses axiomas mostram ou que alguma coisa existe ou que alguma coisa pode ser construída. Um axioma do primeiro tipo é o que deduzimos da definição do círculo, em que todas as linhas puxadas do ponto médio até a periferia, são iguais entre si. Contudo, um axioma é de outro tipo, aquilo que resulta da definição de linha reta, em que de

	todos os pontos para todos os pontos uma linha reta pode ser traçada. Em Latim se chama esses axiomas do primeiro tipo como *Axiomata*; e os o do outro tipo, como *Postulata*.
Porque eles não precisam de prova.	31. Agora porque os axiomas são originados diretamente das definições, eles não precisam de demonstração, pelo contrário, sua verdade brilha, tão logo se olha as definições, delas aquelas decorrem. Não se pode estar seguro logo, se o axioma é verdadeiro ou não, até que se tenha examinado a possibilidade das definições. Senão não se sabe quando os axiomas são corretos, contanto que as definições sejam possíveis.
Do que os axiomas precisam.	32. Porque os axiomas não precisam de nenhuma demonstração especial: assim, geralmente se costuma chamar como axioma o que parece ser claro e que se pode aceitar sem prova. E nesse sentido, se tem que entender a palavra quando se quer apreciar os axiomas de Euclides e de outros geômetras. Mas isso origina consequentemente um grande abuso quanto ao uso dos axiomas, tem que se poder produzir uma incerteza geral em todo o conhecimento restante. Contudo, quando se olha para as coisas acuradamente, Euclides chama tais coisas axioma, que constituem um conceito comum e que assim torna-se expresso distintamente. Assim estão na aritmética, o segundo, sétimo e oitavo axiomas.
O que são as experiências.	33. Tornam-se também confusas as experiências algumas vezes com os axiomas. Chama-se uma experiência o que se conhece quando se tem atenção para com as sensações. Por exemplo, eu vejo que quando se acende uma luz todas as coisas em torno de mim são visíveis, esse conhecimento é chamado uma experiência.
Com que coisas elas lidam antes.	34. As experiências são, então, proposições da coisa, individuais, porque não se pode sentir nada, senão coisas individuais. Em conseqüência, quem se aponta pela experiência, está obrigado a alegar um caso especial, se a experiência não é de tal natureza que, ou se pode consegui-la facilmente logo quando se quer, ou logo se lembra dela porque já se fez essa experiência várias vezes. Em matemática se observa isso com atenção. Por exemplo, na astronomia, quando se fala do movimento do sol, não se alega como um caso especial que o sol nasce e se põe, pois se vê isso a cada dia. No entanto, quando se fala do aparente tamanho do sol sempre se cita casos especiais, como o seu diâmetro grande foi encontrado com a ajuda de instrumentos, nesse e no tempo de outros astrônomos, porque essa experiência não pode ser conseguida por cada pessoa, nem em cada época quando ela quiser.

Como as distinguir exatamente.	35. Também se encontra que os matemáticos exatamente distinguem, daquelas experiências, o que foi deduzido delas: o que, ao contrário, não se faz com outras. Por exemplo, uma luz é acesa, daí, eu começo a ver o que antes para meus olhos estava totalmente disfarçado e escondido. Isso é a experiência. Contudo, se eu reflito sobre a luz ser a causa pela qual as coisas tornam-se visíveis, que elas estavam invisíveis na escuridão e, que, penso que as coisas naturais sob as mesmas circunstâncias, têm sempre o mesmo efeito; assim, não resta dúvida para mim que também quando em outro momento, em outros lugares, na escuridão, uma luz é acesa, igualmente se pode ver o que na escuridão ficava escondido. E, consequentemente, eu concluo que a luz torna tudo visível, que ela ilumina. Essa proposição geral não é a experiência em si, ao contrário, ela é derivada por uma conclusão correta a partir da experiência.
Quando a experiência em si, não pode ser citada.	36. Quando se conhece a maneira e o modo pelos quais tais proposições foram deduzidas da experiência, se pode apresentar aquelas sem esta. Por exemplo, a máxima distância entre o sol e o equador terrestre, não se pode medir diretamente. Em vez disso, ela é deduzida a partir da altura do equador e da altura do sol, observadas no meio-dia do solstício. Agora, se eu quero apresentar isso segundo minha experiência, então não é mesmo necessário que eu mencione a altura que eu observei. Em vez disso, se é conhecida a medida da altura do equador que eu admito, eu apenas devo dizer logo que valor eu achei para notificar a distância entre o sol e o equador. Assim, todo mundo sabe qual era a altura do sol naquele meio dia. Mas não se pode supor a partir das proposições citadas, como a pessoa deduziu seu teorema. Assim, a pessoa é, de fato, devedora, mesmo que nos casos especiais citados, se possa julgar disso, se a pessoa chega a conclusões corretas a partir da sua proposição, ou não. Pois, quando alguém sentiu alguma coisa com o mesmo sentido que nós, pela impressão de fatores externos, ela não pode provar, em vez disso, ela exige, com razão, que se acredite nela. Por outro lado, como a pessoa concluiu, tem que ser julgado pelo intelecto e, por isso, ninguém pode exigir que alguém acredite nisso.
O que é um teorema.	37. Quando se compara diferentes definições e se conclui o que foi impossível reconhecer com uma simples observação, isso se chama um teorema. Por exemplo, quando em geometria se compara um triângulo com um paralelogramo, os quais têm a mesma base e altura e nessa comparação, em parte, com base nas definições dessas duas superfícies e, em parte, com base em outras características que foram encontradas antes, se conclui que o tamanho do triângulo é igual à metade da do paralelogramo. Diz essa

	proposição: o triângulo é a metade de um paralelogramo, os quais têm a mesma base e altura e ela se chama um teorema.
O que é para ser considerado teorema.	38. Mas em todos os teoremas duas coisas têm que ser consideradas, a saber, primeiro a proposição, depois a demonstração. A primeira diz o que, sob certas condições, pode ser assumido ou não por uma coisa, a segunda, porém, mostra como nossa razão pode pensar para trazer tais coisas.
Partes da proposição	39. Nada é absolutamente possível, fora o ser independente, mas tudo tem a sua própria razão de ser. Por isso, uma proposição exata não deve omitir nenhuma das características pelas quais ela é possível, o que nela é reforçado. Isto é, se deve assumir isso, nas coisas das quais se reforça algo, por causa das coisas, isso deve ser reforçado. Por exemplo, o triângulo é a metade de um paralelogramo quando as duas figuras têm as alturas e as bases iguais. Agora a proposição deve ser exata, assim, é necessário ela conter, em si, a condição da igualdade tanto da base como da altura. E dessa maneira, se pode subdividir toda qualquer proposição em duas partes, ou seja, a condição sob a qual algo é reforçado ou negado, e a declaração do que aquilo, em si, compreende, de reforçado ou negado. A primeira se costuma chamar em latim como hipótese; a segunda, tese. Por exemplo, na proposição está a condição, se um triângulo e um paralelogramo têm mesma base e altura; mas, a afirmação é: o triângulo é a metade do paralelogramo.
Benefícios da condição contida nas proposições.	40. Portanto, isso me mostra em todo momento, a condição, em quais casos a afirmativa se encontra dada e faz com que eu jamais possa usar a proposição inadequada. E daí se tem qualquer proposição dividida em duas partes. Mas tem que se notar aqui que, às vezes, não é expressa a condição distinta, quando ela mesma está contida na definição da coisa. Por exemplo, quando eu digo, os três ângulos de um triângulo somam 180 graus, nenhuma dessas condições parece estar contida na proposição. Mas elas só colocam na palavra triângulo, sua definição; assim, agora observarão a condição. A proposição também é: se uma figura está delimitada por três linhas retas, assim a soma dos seus três ângulos é igual a 180 graus. Aqui também está a condição sob a qual alguma coisa é provada, aquela, que o plano está delimitado por três linhas retas. Mesmo então, é assumido da coisa o que está contido na definição dela.
Natureza da afirmativa.	41. Agora a afirmativa acontece sob a condição de que a proposição contenha somente a coisa em si. *Pois leva muito tempo para encontrar com uma coisa daquela, o que*

	a condição, em si, contém; assim, à coisa, pertence a outra coisa que a afirmativa reforça dela ou o que não foi dedicado a ela. Assim, fica bem claro que com todo teorema se pode pensar duas coisas, a outra então por causa da primeira, ou ainda, que não se pode pensar outra coisa disso, assumido que se pensa a primeira dela. Por exemplo, quando eu tenho o teorema – um triângulo que têm a mesma base e a mesma altura de um paralelogramo, é a metade deste – assim, do triângulo, eu penso primeiro, ele tem a mesma base e altura que o paralelogramo; depois, ele é a metade daquele. Eu penso o último por causa do primeiro.
Quem não é mesmo participante.	42. Agora, deve a proposição ser correta de modo que meus pensamentos encontrem a conexão necessária que a condição da coisa exige, ou seja, é impossível isso cair até mim, pensar o contrário do que foi afirmado na afirmativa. Ou ainda, quando eu penso no que foi assumido na condição colocada sobre a coisa, tem que ser impossível, para mim, poder pensar no que é negado da coisa nas afirmativas. A demonstração agora descobre nos primeiros casos a conexão necessária e, nos outros, a conexão impossível pro meu pensamento.
Bases das demonstrações.	43. Assim, as razões da demonstração já são as definições daquelas palavras e coisas que estão contidas tanto na condição, como na afirmação já proposta, ou deduzida por definições pensadas destas mesmas coisas, ou conhecidas pela experiência. Porque, em matemática, agora não se pode aceitar nada que não esteja contido nas definições presumidas ou teoremas; assim, sempre se costuma citar as definições e os teoremas nos quais se baseiam as demonstrações, em parte, colocando tudo, que as bases aceitas nas demonstrações têm a sua exatidão, em parte, colocando aquilo que as bases ainda não conhecem ou continuam esquecendo, e que se pode consultar para se certificar da certeza daquilo.
Benefícios das citações.	44. Tem ainda a explicação das definições, bases e teoremas, dos quais a demonstração é deduzida com grandes utilidades e acontece, consequentemente não sem motivo, que em matemática se dá um nome especial para todos os pensamentos, um para definição, outro para base e teorema e um outro ainda chamado lema. Pois se a demonstração da exatidão das proposições deve me convencer totalmente, assim, eu não devo ter nenhuma dúvida sobre suas bases, mas tenho que estar inteiramente convencido dessa certeza. Consequentemente, as citações me mostram o que se tem que pressupor como conhecido, daquilo, cuja certeza eu quero veicular em cada teorema. E porque as definições são os primeiros pensamentos, os axiomas se originam

	diretamente delas, por outro lado, os teoremas são deduzidos delas, ou diretamente ou indiretamente. Assim, logo se coloca na citação o nome daquela certeza que repousa na base da demonstração, se, se tem previamente colocado muito ou pouco, em que ordem se começa isso, a fim de se poder encontrar com isso a convicção. Sim, porque são especialmente truques, por meio dos quais se pode conseguir convencer uma outra pessoa da certeza das definições; e também em especial da certeza dos axiomas e dos teoremas. Assim, ao mesmo tempo, os citados nomes das bases das demonstrações, me dão oportunidade para pensar na maneira adotada para convencer uma outra pessoa das certezas das bases assumidas nas demonstrações.
Tipos de bases assumidas.	45. O modo e maneira de se concluir, pela base assumida, não são diferentes de como há muito tempo têm descrito todos os livros de lógica, ou a arte da razão. As demonstrações ou *Demonsrationes* der *Mathematicorum* não são diferentes, como uma pilha, de deduções compostas segundo a arte de raciocinar. Então, nas deduções se aplica os chamados silogismos. Só que ocasionalmente ou algumas vezes, com freqüência, se omite a primeira parte dos silogismos porque para o leitor que se esforça por refletir sobre a demonstração, por si mesmo, é fácil imaginar a partir das citações incluídas.
Explanações prévias.	46. Embora para mim não seja difícil afirmar que nenhuma demonstração possa ser efetuada de outra maneira, a não ser, como quando nós pensamos segundo as regras do silogismo que se seguem umas das outras. Assim, porque se trata aqui somente da questão, o que acontece, é legítimo se referir a exemplos. Mas isso não tem só na demonstração do primeiro teorema dos Elementos de Euclides, por Clavius, mas também Herlinus e Dasiopodius, em alguns desses livros Elementorum e Henischius em toda a Aritmética, praticam isso.
O que são problemas.	47. Os problemas tratam de coisas que devem ser feitas e estão divididos em três partes, a proposição, a resolução e a prova. Nas proposições acontece a exposição do que deve ser feito. As resoluções completas contam o que se tem que fazer, o que se tem que executar depois do outro, com isso acontece o que se exige. Finalmente, as demonstrações implementam o que é prescrito na resolução. Assim, se deve necessariamente obter o que foi exigido nas proposições. Dessa maneira, sempre quando cada problema deve ser demonstrado, ele se transforma em um teorema no qual a resolução dá as condições, o teorema, porém, a afirmativa. Isso simplesmente que dizer que, sobretudo, quando se faz toda a resolução como é necessário, acontece

	o que se deve fazer. Consequentemente, não é necessário lidar em especial com problemas extensos.
O que são corolários.	48. Ocasionalmente acontece que por causa de razões especiais se aplica a proposição a um caso especial, ou também se deduz dela uma outra proposição por causa de conclusões. Enquanto, que por causa do que está incluído na proposição da coisa, se acrescenta a ela mais alguma coisa. Tais artes das verdades são chamadas corolários.
Diferenciação entre os corolários.	49. O primeiro tipo de corolário não precisa de nenhuma prova. Pois o que foi completamente provado para todos os casos, não pode ser demonstrado para um. Por exemplo, quando se prova que em todo triângulo os três ângulos juntos são iguais a dois ângulos retos, não se deve provar especialmente que em um triângulo retângulo os seus três ângulos juntos são iguais a dois ângulos retos. Contudo, o outro tipo de corolário tem uma demonstração necessária. Pois se algo é deduzido de outras proposições, se deve mostrar de que modo uma é deduzida da outra. Por exemplo, quando alguém afirma esses corolários dos citados teoremas, em um triângulo retângulo não se pode ter mais que um ângulo reto; assim, é necessário mostrar como esse corolário se deduz do teorema. Isto é, como os três ângulos juntos são iguais a dois ângulos retos, assim não resta nada para o terceiro, se realmente dois ângulos são retos.
O que são anotações.	50. Finalmente, nas anotações que se acrescenta, tanto como nas definições, como nas bases e teoremas e também nos exercícios, se costuma explicar o que ainda talvez ainda não ficou claro, a utilidade do ensino, ainda mencionar a história da invenção e o que ocorre e é útil saber.
A maneira de ensino da matemática é geral.	51. Aquele que reflete sobre o método ou maneira do ensino explicado até agora, há de perceber sem esforço o que deve precisar toda ciência quando se exige, propriamente, conhecimento exato das coisas. Ela se chama matemática e, ocasionalmente, até método geométrico ou maneira geométrica de ensino, porque, até agora quase toda a matemática, particularmente, a geometria, se serve dela da maneira a mais atenciosa.
A utilidade da matemática.	52. Em torno disso, porque na matemática se segue mais exatamente esta maneira de ensino, como na outra, se exalta com isso que ela aguça a mente das pessoas, isto é, a torna hábil para entender mais profundamente e corretamente todas as coisas que ela aprende a conhecer. Pois, apesar de uma lógica ou arte da razão correta, nenhuma das outras regras, como as que se observa na maneira de entender, no ensino de matemática, comunica

	como se pode conceder a utilidade das forças dos pensamentos, mesmo que ela ainda não nos possa conceder a utilidade que para nós tem a matemática, se nós a praticamos com seriedade. Pois ela nos concede a habilidade de praticar as regras de uma lógica correta que não é obtida com muitos exercícios, senão com toda ferramenta da mente.
Quem não é mesmo participante.	53. Não podem ser participantes dessa excelente utilidade aqueles que aprendem somente alguns problemas matemáticos e outras coisas que embora possam ser úteis na vida humana, porém, em si, não pertencem propriamente à matemática. Como é preciso tratar a matemática a fim de se alcançar, com certeza, essa utilidade, eu tenho mostrado em minha *Ratione Praelectionum* e, detalhadamente, na quinta parte do meu *Elementorum Matheseos.*