

## 10 Considerações Finais

Em síntese, a Tese indica que a demonstração é uma atividade complexa, ou seja, resulta de múltiplas relações entre vários fatores. Então, para entender as mudanças que ocorrem na demonstração em geometria plana, a partir dos textos demonstrativos, foi necessário criar um quadro característico dessa atividade.

Ainda que ao longo da história a demonstração tenha sofrido modificações, ela conservou três características básicas: *o caráter a priori*, que permite fazer a economia da experiência; *o caráter necessário*, que supõe o respeito a leis rígidas e *o caráter universal*, pois os objetos sobre os quais o raciocínio se baseia têm um estatuto de abstração (Arsac, 1987). (grifos meus)

Demonstrar é uma atividade matemática que mobiliza o raciocínio dedutivo e formulações peculiares, caracterizando um caso em que o próprio conhecimento torna-se objeto da reflexão e do discurso. Enquanto resultado dessa atividade, o texto demonstrativo é um registro que incorpora o uso específico da linguagem e uma estrutura de redação também específica.

A atividade de demonstrar exige que os conteúdos sejam abordados de modo que se forneça uma base teórica para a prova, ou seja, um conjunto de axiomas, definições, propriedades, relações e operações, relativo aos objetos estudados. Mas como o desenvolvimento de uma prova não é algo estabelecido a priori, a demonstração escolar resulta de acordos sobre o grau de rigor, ou seja, sobre o que se toma ou não, como axioma, na base teórica sobre a qual as provas serão desenvolvidas. No entanto, o texto demonstrativo escolar não é resultado apenas do caráter necessário do raciocínio dedutivo, ao contrário, obedece também ao discurso didático que prescreve procedimentos e conceitos admitidos como mais adequados ao desenvolvimento das provas.

Especificamente, a demonstração da geometria plana em livros usados no ensino brasileiro, a partir do século XIX, sofre mudanças que podem ser sintetizadas como nos itens a seguir, entendendo-se que há uma correlação estreita entre elas.

*Há mudanças na redação do texto:* as etapas do modelo euclidiano, que não eram nomeadas originalmente, se reduzem a três, *hipótese*, *tese*, *demonstração*, e

passam a constar nominalmente do texto demonstrativo. O texto discursivo euclidiano, com a presença da simbologia matemática, passa a ser disposto em duas colunas, uma com as proposições usadas no desenvolvimento da prova e a outra com as justificativas correspondentes, embora esse padrão não tenha se tornado universal.

*Há mudança no uso da linguagem:* cada vez mais a linguagem *descontextualizada, atemporal e despersonalizada* da prova discursiva, com as conjunções marcando os passos dedutivos, características vindas do modelo euclidiano, dá lugar ao uso da simbologia matemática, uma linguagem concisa que incorpora novos conceitos e relações.

*Há mudança de ordem conceitual:* o conteúdo matemático de uma mesma proposição se modifica, alterando também o desenvolvimento da prova. No estudo dedutivo em geometria plana, a mudança conceitual recai centralmente sobre o conceito de proporções que, em Euclides tem o caráter de comparar grandezas geométricas, e no decorrer do desenvolvimento da matemática passa a indicar a comparação de valores numéricos associados à medida das grandezas, assim como de objetos mais gerais introduzidos pela simbologia algébrica.

Ainda correlacionado com a ordem conceitual, há mudança no desenvolvimento da prova. O método euclidiano de prova pela equivalência de áreas, não faz uso da proporcionalidade e se baseia na idéia de justaposição das figuras que devem ser congruentes, garantindo-se a conservação da forma. A demonstração euclidiana clássica do teorema de Pitágoras ilustra esse caso. Quando esse mesmo teorema é demonstrado pela semelhança de figuras, com o uso das proporções, o desenvolvimento da prova indica mudança conceitual: a proporcionalidade entre grandezas geométricas se transforma em proporcionalidade de números ou em uma igualdade algébrica, pois com o uso de letras nas proporções o que era comparação de grandezas geométricas passa a ser visto como equações, indicando que se pode operar de modo independente com relação à natureza dos objetos que foram representados. Nesse ponto, se chega ao cerne do processo de algebrização da geometria dedutiva plana: o uso das relações proporcionais que estão na base do conceito de semelhança de figuras. O resultado, marcante para a matemática escolar, são fórmulas ou equações associadas a propriedades das figuras planas.

*Há mudança na função escolar da atividade demonstrativa:* a demonstração em geometria plana cada vez mais tem como alvo a expressão algébrica das proposições dos teoremas para ser usada na resolução de questões numéricas e, enfim, para o estudo com base em aplicações práticas. O formulário é uma evidência desse processo que revela a integração geometria-aritmética-álgebra no conteúdo escolar. Por volta das primeiras décadas do século passado, essa mudança é marcante nos livros-texto. Portanto, esta Tese mostra que as mudanças ocorridas nas demonstrações atestam transformações de caráter mais geral e isso se constata pelas características que o livro-texto incorpora.

Os tradicionais livros do tipo *elementos de geometria*, estruturados ao longo de séculos no padrão euclidiano teorema-problema, e também produtos das releituras de Euclides, vão inserindo procedimentos algébricos e aritméticos no texto das demonstrações, além de mesclar o estudo da geometria dedutiva com questões a resolver de tipos variados e com os formulários. Ou seja, o livro tipo *elementos de geometria* pré-anunciam um novo tipo de livro que, no Brasil, é lançado por volta dos anos 30, o *livro de matemática* cuja proposta principal é o estudo integrado das três áreas da matemática e também o estudo da álgebra. As mudanças presentes no texto demonstrativo se correlacionam com modificações presentes na estrutura do livro onde a demonstração se insere.

Por volta dos anos 30 o discurso didático enfatizava as aplicações práticas, o ensino partindo das noções intuitivas. Historicamente, a crítica didática feita ao modelo euclidiano, por Ramus, cujo legado passa por Arnauld, Wolff, Legendre, incide sobre a ordem de abordagem dos conteúdos, enfatiza a necessidade de propor uma ordem natural, começando das operações básicas e, pelo que se viu, esteve presente na época de Roxo e ainda não perdeu a atualidade: é preciso privilegiar as idéias intuitivas e experimentais de modo a, gradativamente, mobilizar a construção dos conceitos, das definições, até que se chegue ao trabalho dedutivo. A ordem mais natural dos conteúdos, considerando os *Elementos* de Euclides e a demonstração em geometria plana, significou alterar a sequência euclidiana que só depois de apresentar, no quinto livro, a teoria das proporções, a utiliza no desenvolvimento das provas. Essa inversão de ordem se encontra em Legendre e o uso da proporcionalidade no desenvolvimento das provas implica em mudanças radicais, como se mostrou. A base documental mostra que nos livros-texto usados no ensino brasileiro, a demonstração do

teorema de Pitágoras pela semelhança de figura aparece antes da prova pela equivalência de áreas, ou seja, na ordem inversa dos *Elementos* de Euclides, desde os *Elementos de geometria* de Ottoni e que essa estrutura se repete nas outras obras da amostra.

O conceito de proporcionalidade e o teorema de Tales trazem o aspecto epistemológico, ponto chave na atividade demonstrativa e também presente no discurso educacional. Como já discutido, a proporcionalidade pode ser explorada pela experiência aritmético-geométrica que está na base da ciência da medida e a equação da reta é apenas a expressão algébrica da proporcionalidade dos lados nos triângulos semelhantes, relações previstas pelo teorema de Tales (Brunschvicg, 1922). Ou seja, a constituição do espaço tem sua raiz na experiência e tem sua conclusão na razão intelectual. Portanto, a ordem epistemológica está presente na própria atividade matemática visto que esta implica conhecimentos de âmbito prático, intuitivo e de âmbito teórico, intelectual.

*Há mudança na abordagem da geometria dedutiva* que se correlaciona com a função da atividade demonstrativa nos livros-texto: o conteúdo deixa de ser organizado a partir de um conjunto de proposições com a função de validar novos resultados. Wolff diz ser possível provar a partir de um exemplo vindo da experiência ou a partir de um julgamento do intelecto. Um teorema é um tipo de proposição que deve ser provada intelectualmente. Para isso, é preciso considerar que a proposição de um teorema traz, na *hipótese*, a condição sob a qual a afirmativa é válida ou não e, na *tese*, o que se deve pensar, concluir, por causa da hipótese. Essa é a dependência que a estrutura dedutiva estabelece entre as proposições e que determina o desenvolvimento da demonstração. Um teorema é uma proposição que deve ser validada, demonstrada, a partir de outras proposições já aceitas. Nesse sentido, é que se deve entender a necessidade de um tratamento particular dos conteúdos no estudo dedutivo em geometria, pois se não, as proposições deixam de ser teoremas, sendo aceitas como axiomas, sem prova, isto é, são resultados com que se pode operar em outros tipos de atividade matemática, e é nessa direção que o livro-texto indica.

O estudo da geometria dedutiva aparece nos livros-texto até por volta dos anos 60.

Em dois *livros de matemática* da base documental a demonstração aparece como um assunto didático, em Roxo (1931), que marca o início da geometria

dedutiva incluindo estratégia didática para o ensino de como fazer uma demonstração e em Sangiorgi (1960), que marca o desaparecimento do estudo dedutivo nos livros-texto. Portanto, são dois livros-texto chave para se investigar a didatização da geometria dedutiva em texto escolar.

Com base no exposto, é possível inferir algumas implicações educacionais do estudo realizado nesta Tese, as quais se correlacionam estreitamente. A contribuição no sentido de desmistificar o ensino-aprendizagem da geometria dedutiva, que enfatiza fortemente o aspecto lógico da matemática. Outra, é reconhecer que o texto demonstrativo, nos livros, é um conjunto de conteúdos cuja exposição elimina os problemas que estão na origem do desenvolvimento dos conhecimentos. Assim, esta Tese apresenta um modo de explorar a história dos conteúdos básicos do ensino da geometria plana dedutiva em correlação com outras áreas da matemática e com o discurso didático.

Nesse sentido, Schubring (2004, a) reafirma a complexidade de se fazer pesquisa em história do ensino da matemática, quando o objetivo é se aproximar de uma história do dia-a-dia, em que os processos são essencialmente sociais. Possíveis abordagens são as análises de programas e da legislação do ensino, assim como o estudo do professor de matemática e do *manual*, sendo que segundo as pesquisas os livros são mais determinantes que os programas, no dia-a-dia do ensino. Outra vertente é analisar o desenvolvimento histórico dos conteúdos do ensino e suas relações com o desenvolvimento da matemática como ciência. Ele ressalta que em relação à pesquisa dos manuais “existe um grande problema metodológico: como analisar os conteúdos num manual? Certamente são necessárias comparações, porém com quê?” (idem, p. 9). Nesse sentido, eu acredito que esta Tese sugere bons encaminhamentos, quando parte da idéia de releitura de Euclides, até porque mostrou que o parâmetro comparativo usado permitiu explorar a correlação desenvolvimento do conteúdo da matemática como ciência e desenvolvimento dos conteúdos do ensino.

A releitura de Euclides possibilitou construir um quadro das mudanças presentes nas demonstrações, potencializando também enquadrar esses resultados de modo mais geral, quando mostrou que as modificações ocorridas nos livros-texto convergem para um ponto chave na história da matemática escolar brasileira, um novo tipo de livro, o *livro de matemática* que conseqüentemente significa a consolidação de um arranjo novo para os conteúdos de ensino. Mas,

esse arranjo reflete também um contexto educacional mais amplo, o do início do século XX, e um novo estágio da matemática científica como se ressaltou com Felix Klein. Esta Tese justamente, investigando releituras de Euclides, teve como desafio estabelecer alguma sistematização a partir desse complexo, destacando ainda que a demonstração matemática deve ser vista como uma atividade de argumentação e que o exercício da argumentação tem um caráter de prática do consenso, prática da cidadania.