9 Teorema de Tales em livros-texto: que teorema escolher?

O teorema de Tales é a outra proposição que será utilizada nesta Tese, como ferramenta de pesquisa. Porém, o objetivo agora não é partir da estrutura de redação do texto e do método de prova, originários no modelo euclidiano e desenvolver a investigação das mudanças ocorridas na demonstração, analisando cada obra da base documental. Esse procedimento já forneceu alguns resultados. No entanto, os livros ainda mostram evidências relativas à demonstração, no estudo da geometria plana, que devem ser levadas em conta, pelo seguinte motivo: a escolha do teorema de Pitágoras contempla um conteúdo tradicional da geometria plana escolar, a semelhança de figuras e, no livro-texto, o teorema de Tales aparece como proposição fundamental no estudo desse assunto.

O procedimento, agora, é partir do que os livros-textos usados no ensino apresentam como teorema de Tales e chegar às obras históricas. Alguns pontos são mais evidentes quando se observa esse teorema nos livros: a centralidade da proposição, como mencionado acima, a incomensuralidade de grandezas e a questão do nome, porque *teorema de Tales* nomeia proposições diferentes. Daí a pergunta – qual proposição escolher?

O último caso, a questão do nome, será o ponto de partida. A designação teorema de Tales consta dos seguintes livros: Perez y Marin e Paulo, geometria F.I.C., Roxo, Roxo, Thiré e Mello e Souza, e Sangiorgi e designa as proposições:

> T.1. Um feixe de retas paralelas determina sobre duas transversais segmentos proporcionais. (Sangiorgi, 1969, p. 146)
>
> T.2. Toda parallela a um dos lados de um triangulo determina outro triangulo semelhante ao primeiro. (Perez y Marin e Paula, s. d., p. 73)
>
> T.3. Dois triangulos equiangulos entre si têm os lados homólogos proporcionaes. (Roxo, 1931, p.293)
>
> T.4. Dois triângulos são semelhantes quando têm dois ângulos iguais cada um a cada um. (Roxo, idem, p. 292)

A primeira proposição consta apenas do livro de Sangiorgi, a segunda, dos demais livros e as de número T.3 e T.4, apenas da obra de Roxo.

O que dizer sobre a variedade de nomes? O que se pode afirmar é que as diferentes proposições mostram uma correlação de conseqüência e isso deve ser levado em conta na hora de demonstrar.

O livro de Roxo menciona Tales algumas vezes e, baseado em Smith (1958)[1] o texto *Thales de Mileto* traz quais teoremas podem ser provavelmente atribuídos ao antigo matemático. Ele lista seis casos:

> 1º Os ângulos na base de um triangulo isósceles são iguaes.
>
> 2º Quando duas rectas se cortam, os ângulos oppostos pelo vértice são iguaes.
>
> 3º Um triangulo fica determinado, quando se dá um lado e os ângulos adjacentes.
>
> 4º Os lados dos triângulos eqüiângulos entre si são proporcionaes. (Applicada á medida da altura da pyramide pela sombra).
>
> 5º Qualquer diâmetro divide o circulo em duas partes iguaes.
>
> 6º O ângulo subtendido pelo diâmetro de um circulo em um ponto qualquer da circunferência é recto. (p. 28-29)

Roxo elenca também os seguintes casos em que se usa a denominação teorema de Tales, embora não mencione nada sobre a origem desse uso.

> a) A soma dos angulos de um triangulo é igual a dois ratos ou a 180º. (p. 90)
>
> b) Toda parallela a um dos lados de um triangulo fórma com os outros dois lados um triangulo semelhante ao primeiro. (p. 291)
>
> c) Dois triângulos equiangulos entre si têm os lados homólogos proporcionaes. (p. 293)

Mas, sobre esse assunto, Patsopoulos e Patronis (2006) discorrem no estudo feito a partir das referências ao nome de Tales em livros-texto. Segundo eles, antes do nome emergir nos livros textos apareciam apenas os teoremas atribuídos a Tales. Na tradução do livro de Tacquet por Voulgaris (1805, p. 25) e no original (1722, p. 20) é mencionado o caso nº 3, acima; Benjamim Lesbos (1820, p. 90 e p. 21) menciona os casos nº 2 e nº 6 (idem, p. 60).

A denominação *teorema de Tales* aparece em poucos livros franceses por volta dos anos 1880. Em 1882, Rouché e Comberousse se referem ao caso geral, "retas paralelas determinam segmentos proporcionais sobre secantes quaisquer", e o nome ainda é atribuído pelo menos a dois casos particulares: o caso *c* acima,

---

[1] O livro de Smith, *History of Mathematic*, têm a seguinte edição original, em dois volumes: volume I, 1ª edição de 1923 e volume 2, 1ª edição de 1925.

(Rouché, Camberousse, 1883) e à proposição, "a paralela aos lados de um triângulo divide proporcionalmente os outros dois lados", (Combettte, 1882). A denominação se estabelece de modo geral nos livros-texto franceses a partir dos anos 1920, em 1925 aparece no currículo francês e no livro de geometria descritiva de Cholet-Mineur, 1907 (idem, p. 60-61).

Patsopoulos e Patronis indicam ocorrências do nome teorema de Tales para o caso geral, em livros italianos de geometria analítica (Enrico, 1885, p. 34) e de geometria projetiva (Burali-Forti, 1912, p. 92). Na Inglaterra e Estados Unidos há apenas referências às realizações geométricas de Thales, as quais têm origem no livro de Smith, que também aparece como fonte no Brasil com o livro de Roxo. Em livros-texto alemães, o nome é atribuído ao teorema listado como caso *a*, acima, (Schwering, Krimphoff, 1894, p. 53). Em outros países como Espanha, Rússia, Bélgica o nome aparece como no caso da França e Itália e na Áustria, República Checa e Hungria vigora o sentido usado na Alemanha. Na Grécia, primeiro aparece o caso alemão, em 1904, mas em 1927 o uso passa a ser o dos livros franceses (idem, p. 61).

No caso do Brasil, considerando a amostra desta Tese, o registro do nome teorema de Tales aparece a partir de Perez y Marin e Paula. Consultando os programas do Colégio Pedro II, no *Programma de Ensino para o ano de 1915*, consta da *64ª. lição: Triângulos semelhantes. Theoremas. Theoremas de Thales* que, coincidentemente, traz também pela primeira vez a denominação de outro teorema na *77ª. lição: Relações entre superfícies. Theorema de Pythagoras* (Beltrame, 2001). Pelo visto, a amostra de livros no Brasil registra várias ocorrências, sendo bem diversificada.

Uma consideração importante que os autores do artigo fazem se relaciona com um ponto já exemplificado nesta Tese, com Legendre, que seguindo a tradição francesa de Ramus e Arnauld (Schubring, 2003; 2004), inverte a ordem de exposição do conteúdo em relação ao modelo euclidiano. Legendre apresenta a semelhança de triângulos, quando estuda a proporcionalidade, ao contrário do que faz Euclides: nos *Elementos*, o teorema de Pitágoras é a proposição 47 do Livro I e a teoria da proporcionalidade consta, depois, no Livro V.

Considerando agora o teorema de Tales, a proporcionalidade das linhas tem seu equivalente na proposição 2, do Livro VI dos *Elementos*, portanto, posterior à teoria da proporcionalidade, ordem que em Legendre também não é obedecida.

Tal inversão não foi seguida em livros-texto alemães até os anos 1920, enquanto, na Itália, Euclides era adotado nas escolas. Mas, segundo os autores, nas primeiras décadas do último século, o nome teorema de Tales se torna comum nos livros-texto franceses, sendo associado ao teorema do feixe de retas paralelas que foi essencial no desenvolvimento de um ramo novo de estudo, a geometria projetiva. Nessa época, surge também um interesse por Tales, como matemático, fato que pode explicar o uso da nomeação dos teoremas (idem, p. 62-63).

Em concordância com os autores, esta Tese também levanta um caso semelhante, no que diz respeito à nomeação de questões propostas em livros-texto. Por exemplo, ao consultar os programas de ensino do Colégio Pedro II, no ano de 1915, quando aparece o conteúdo teorema de Tales, o programa prevê conteúdos de geometria que devem ser seguidos de *problemas* e *exercícios*. Mas é preciso se perguntar – o que isso significa, exatamente? – e buscar entendimento, por exemplo, a partir do próprio livro. Porque, como se mostrou, no livro-texto termos como esses nomeiam diferentes tipos de questões a resolver.

9.1 *Teorema de Tales*: diferentes proposições em correlação

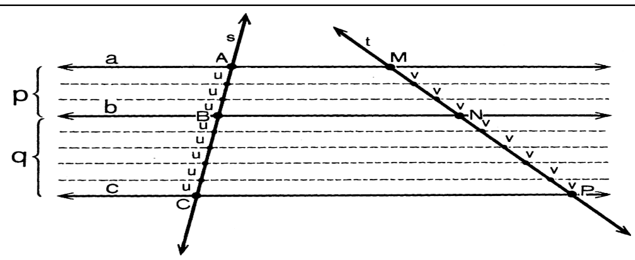
O objetivo, agora, é estabelecer uma correlação entre duas nomeações que aparecem nos livros-texto, ou seja, o caso de Sangiorgi que se diferencia dos demais livros, inclusive do livro de Roxo. Para isso, o ponto de partida foi o fato de que os autores Sangiorgi e Roxo destacam teoremas fundamentais quando abordam os conteúdos da geometria plana. Em Roxo o teorema do “feixe de retas paralelas” aparece como teorema fundamental da proporcionalidade de segmentos e em Sangiorgi é designado teorema de Tales.

O teorema de Tales em Sangiorgi,

T.2 : TEOREMA DE TALES: ***Um feixe de retas paralelas determina sôbre duas transversais segmentos proporcionais.***

$$H \begin{cases} a \,//\, b \,//\, c; \quad s \text{ e } t, \text{ transversais} \\ \overline{AB} \text{ e } \overline{BC} \subset s; \quad \overline{MN} \text{ e } \overline{NP} \subset t \end{cases}$$

$$T \begin{cases} \overline{AB}, \overline{BC}, \overline{MN} \text{ e } \overline{NP} \text{ são proporcionais} \\ \text{ou } \dfrac{AB}{BC} = \dfrac{MN}{NP} \end{cases}$$



DEMONSTRAÇÃO:

Se $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$ são *comensuráveis*, então existe um segmento de medida u contido um número p de vêzes em $\overline{AB}$ e um número q de vêzes em $\overline{BC}$. Vale, pois, a *razão:*

$$\frac{AB}{BC} = \frac{p}{q} \left(\text{na figura: } \frac{AB}{BC} = \frac{3}{5}\right)$$

Traçando-se, pelos pontos de divisão dos segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$, as *retas paralelas* às retas do feixe, elas interceptarão os segmentos $\overline{MN}$ e $\overline{NP}$ respectivamente em *segmentos congruentes entre si* (pelo T. 1). Nestas condições, existe um segmento de medida v, também contido p vêzes em $\overline{MN}$ e q vêzes em $\overline{NP}$, isto é, vale a *razão:*

$$\frac{MN}{NP} = \frac{p}{q} \left(\text{na figura: } \frac{MN}{NP} = \frac{3}{5}\right)$$

Portanto, as razões $\frac{AB}{BC}$ e $\frac{MN}{NP}$ são *iguais*, isto é:

$$\frac{AB}{BC} = \frac{MN}{NP}$$

e os segmentos $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{MN}$ e $\overline{NP}$ são *proporcionais*.

c.q.d.

NOTA: Por escapar ao conteúdo dêste livro, será admitido *sem prova* o caso no qual $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$ são *segmentos incomensuráveis*.

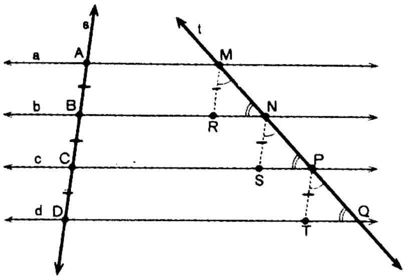
Fig. 85 Teorema, Sangiorgi, p. 146

Sangiorgi não apresenta a prova para o caso de segmentos incomensuráveis. E observando a cadeia dedutiva da prova, o teorema referenciado, acima, como T.1 estabelece,

T.1 : *Se um feixe de paralelas determina segmentos* ***congruentes*** *sôbre uma transversal, então determina sôbre outra qualquer transversal dêsse feixe segmentos também* ***congruentes.***

$$H \begin{cases} a \,//\, b \,//\, c \,//\, d \\ s \text{ e } t \text{ transversais} \\ \overline{AB} \cong \overline{BC} \cong \overline{CD} \end{cases}$$

$$T \; \{ \; \overline{MN} \cong \overline{NP} \cong \overline{PQ}$$



DEMONSTRAÇÃO:

Afirmações	*Justificações*
1. $\overline{MR} \,//\, \overline{AB}$; $\overline{NS} \,//\, \overline{BC}$ e $\overline{PT} \,//\, \overline{CD}$ (. . . construindo)	1. Postulado de Euclides
2. Os quadriláteros *AMRB*, *BNSC* e *CPTD* são paralelogramos	2. Lados opostos paralelos dois a dois
3. $\overline{AB} \cong \overline{MR}$, $\overline{BC} \cong \overline{NS}$ e $\overline{CD} \cong \overline{PT}$	3. Lados opostos de um paralelogramo são congruentes
4. $\overline{MR} \cong \overline{NS} \cong \overline{PT}$	4. Hipótese e propriedade transitiva da congruência
5. $\triangle MRN \cong \triangle NSP \cong \triangle PTQ$	5. Caso A.L.A. (por quê?)
6. $\overline{MN} \cong \overline{NP} \cong \overline{PQ}$	6. Lados correspondentes de triângulos congruentes

c.q.d.

Fig. 86 Teorema, Sangiorgi, p. 145

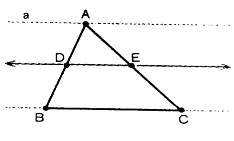
As justificativas do teorema acima constam no livro da 3ª série. Mas Sangiorgi apresenta o *teorema de Tales no triângulo*. Com, T.2, o *teorema de Tales*, Sangiorgi conclui o *teorema de Tales no triângulo*, ou seja, um caso particular do primeiro.

4. *Tales no triângulo . . .*

T.3 : *Tôda paralela a um lado de um triângulo determina sôbre os outros dois lados segmentos proporcionais.*

$$H \; \{ \; \overleftrightarrow{DE} \,//\, \overline{BC}$$

$$T \left\{ \frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC} \right.$$



DEMONSTRAÇÃO:

Traçando pelo vértice A: $a \,//\, \overline{BC}$, obtemos juntamente com $\overleftrightarrow{DE} \,//\, \overline{BC}$ um *feixe* de *paralelas* tal que:

$$\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC} \text{ (Tales)}$$

c.q.d.

Fig. 87 Teorema, Sangiorgi, p. 150

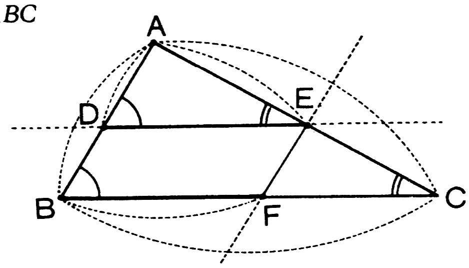
Mas o teorema *fundamental da semelhança de triângulos* em Sangiorgi é o *teorema de Tales* nos outros autores e, assim, a correlação se estabelece.

8. Teorema *fundamental sôbre triângulos semelhantes*

T.5 : *Se uma reta paralela a um dos lados de um triângulo intercepta os outros dois lados* (não pelo vértice comum!), *então o triângulo que ela determina é* ***semelhante*** *ao primeiro.*

$H\{\triangle ABC \mid \overleftrightarrow{DE} \parallel \overline{BC},\ D \in \overline{AB},\ D \neq A \text{ e } D \neq B$

$T\{\triangle ADE \sim \triangle ABC$



DEMONSTRAÇÃO:

Afirmações	*Justificações*
1. $D \in \overline{AB}$ e $\overleftrightarrow{DE} \parallel \overline{BC} \Longrightarrow \frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$	1. Hipótese e T.3
2. $\hat{A} \cong \hat{A}$, $\hat{D} \cong \hat{B}$ e $\hat{E} \cong \hat{C}$	2. Propriedade *reflexiva* da congruência e ângulos correspondentes em retas //s
3. $F \in \overline{BC}$ e $\overleftrightarrow{EF} \parallel \overline{AB} \Longrightarrow \frac{AE}{AC} = \frac{BF}{BC}$	3. Construção e T.3
4. $\overline{BF} \cong \overline{DE} \Longrightarrow \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC}$	4. Lados opostos do paralelogramo *DBFE* e de 3
5. $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC}$	5. De 1 e 3
6. $\triangle ADE \sim \triangle ABC$	6. De 2 e 5

c.q.d.

Fig. 88 Teorema, Sangiorgi, p. 159

O encadeamento de proposições acima mostra que a semelhança dos triângulos é verificada pela proporcionalidade dos lados correspondentes, que por sua vez se verifica a partir da correspondência lados e ângulos, atendendo à definição.

A incomensuralidade está implícita na proporcionalidade dos lados correspondentes que será a razão de semelhança dos dois triângulos. E assim, a forma determinada pelos ângulos se conserva e, à época de Euclides, os segmentos incomensuráveis podiam ser descritos com as razões e comparados com o uso do método da redução ao absurdo. E como se verá, no próximo item, esse não é o método usado no livro-texto, mas sim o método dos indivisíveis. Essa questão já foi discutida na Parte I desta Tese, com o autor Legendre.

Nos demais livros, a proposição acima que consta de Sangiorgi como teorema fundamental da semelhança de triângulos, é chamada de teorema de

Tales. Note, na demonstração do teorema, acima, o encadeamento procurado: pelo teorema T.3, está garantida a proporcionalidade dos segmentos e T3 é concluído a partir de T.1, o teorema de Tales, em Sangiorgi.

A abordagem de Sangiorgi exemplifica um desenvolvimento do estudo dedutivo da semelhança de triângulos em livros destinados ao ensino-aprendizagem na escola fundamental, sendo necessário considerar dois volumes da coleção, o livro da 4ª série e o da 3ª série. O *Capítulo 3: Semelhança*, do livro da 4ª série, tem início com o estudo da razão e proporção de segmentos e o autor apenas menciona a incomensuralidade, sem sistematizar esse caso.

Em síntese, a tabela abaixo mostra as três proposições nomeadas teorema de Tales e como elas são usadas nos livros-texto, considerando os autores Roxo (1931) e Sangiorgi (1960),

Autores	Teoremas		
	T_{fp}	$T_{\Delta s}$	T_{sp}
Sangiorgi (1960)	*teorema de Tales*	teorema fundamental dos triângulos	*teorema de Tales* no triângulo
Roxo (1931)	teorema fundamental da semelhança	*teorema de Tales* (nos outros livros também)	caso particular do teorema fundamental

T_{fp}: Um feixe de paralelas determina sobre duas transversais segmentos proporcionais. ($T_{fp \text{ (feixe de paralelas)}}$)

T_{sp}: Toda paralela a um lado de um triângulo determina sobre os outros dois lados segmentos proporcionais. ($T_{sp \text{ (segmentos proporcionais)}}$)

$T_{\Delta s}$: Toda paralela a um dos lados de um triângulo determina um segundo triângulo semelhante ao primeiro. ($T_{\Delta s \text{ (triângulos semelhantes)}}$)

9.2 A demonstração do *teorema de Tales* ou *teorema fundamental dos triângulos* nos livros-texto

Já foi visto que o teorema fundamental sobre triângulos em Sangiorgi, apresentado um pouco acima, é o teorema de Tales nos outros livros. Inicialmente, será apresentada a demonstração em Roxo,

263. Theorema. — *Toda parallela a um dos lados de um triangulo fórma com os outros dois lados um triangulo semelhante ao primeiro.*

Hypothese: o $\triangle\ ABC$ e a recta DE // ao lado BC (fig. 195).

These: $\triangle\ ADE \backsim \triangle\ ABC$.

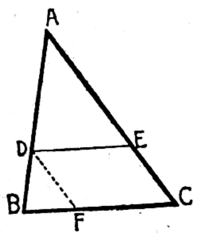


Fig. 195

Marcha: Mostra-se que os dois $\triangle$s têm os $\wedge$s iguaes e os lados homologos proporcionaes.

Demonstração:

(1) O $\wedge\ A$ é commum aos dois $\triangle$s.

(2) $\wedge\ D = \wedge\ B$; $\wedge\ E = \wedge\ C$. — (2) Correspondentes das //s DE e BC com as trans. AB e AC.

(3) $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$ — (3) Theor. 252.

(4) Trace DF // AC; $DEFC$ é um $\square$ e $FC = DE$. — (4) Porque ?

(5) $\frac{FC}{BC} = \frac{AD}{AB}$ — (5) Sendo DF // AC divide os outros dois lados na mesma razão.

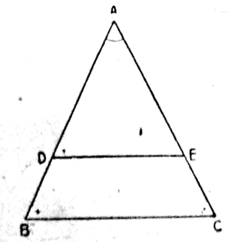
(6) $\therefore \frac{DE}{BC} = \frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$ — (6) Substituindo FC por seu igual DE.

Conclusão: os $\triangle$s ADE e ABC têm os $\wedge$s iguaes e os lados homologos proporcionaes e são semelhantes.

Fig. 89 Teorema, Roxo, p. 291-192

O livro de Roxo, Thiré e Mello e Souza apresenta a seguinte demonstração,

TEOREMA DE TALES. *Toda paralela a um dos lados de um triângulo forma, com os outros dois lados, um segundo triângulo semelhante ao primeiro.*



Seja ABC um triângulo qualquer. Tracemos DE paralela ao lado BC.

Vamos provar que os triângulos ABC e ADE são semelhantes. Para isso precisamos mostrar que êsses triângulos têm os ângulos respectivamente iguais e os lados homólogos proporcionais.

O ângulo A é comum.

Os ângulos D e B são iguais por serem correspondentes de paralelas; a mesma cousa acontece em relação aos ângulos C e E.

O fato de ser DE paralela ao lado BC permite-nos escrever, de acôrdo com o n.° **10** :

$$\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE} = \frac{BC}{DE}$$

Logo os triângulos têm os lados proporcionais e, como têm também os ângulos respectivamente iguais, são semelhantes.

Fig. 90 Teorema, Roxo, Thiré e Mello e Souza, p. 223-224.

A demonstração do teorema de Tales nos *Elementos de Geometria* F.I.C.,

Theorema de Thales.

221. *Toda parallela a um lado d'um triangulo determina um segundo triangulo semelhante ao primeiro.*

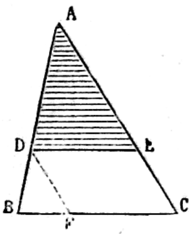


Fig. 164.

Seja ABC um triangulo qualquer, e DE uma parallela ao lado BC. Prova-se que os dois triangulos ADE e ABC têm os angulos respectivamente iguaes, e os lados homologos proporcionaes.

1° O angulo A é commum; os angulos D e B são iguaes por serem correspondentes, assim como E e C.

2° Tracemos DF parallela a AC. A figura DECF é um parallelogrammo, e assim DE = FC (n° 100). Por causa das parallelas DE e BC temos (n° 213); $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$

As parallelas DF e AC dão igualmente :

$$\frac{AD}{AB} = \frac{\text{FC ou DE}}{BC} \text{ d'onde } \frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC} \text{ Logo...}$$

Fig. 91 Teorema, Geometria F.I.C., p. 93-94

Finalizando, a demonstração em Perez y Marin e Paula,

THEOREMA DE THALES (*).

138. *Toda parallela a um dos lados de um triangulo* **determina outro triangulo semelhante ao primeiro** (fig. 97).

HYP.: $A'B'$ é parallela ao lado AB.

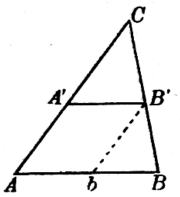


Fig. 97

THESE: O triangulo $A'B'C$ é semelhante ao triangulo ABC.

DEMONSTRAÇÃO: Os angulos dos dois triangulos são respectivamente eguaes, porque C é commum, e $A = A'$, $B = B'$, como correspondentes; e, quanto á proporcionalidade dos lados, temse, tirando bB' parallela a AC:

$$\frac{AC}{A'C} = \frac{BC}{B'C} \quad \text{e} \quad \frac{BC}{B'C} = \frac{AB}{Ab = A'B'}.$$

Logo, $\frac{AC}{A'C} = \frac{BC}{B'C} = \frac{AB}{A'B'}$, e os triangulos são semelhantes.

(*) THALES (— VI sec.), celebre philosopho grego, que póde ser considerado o pae da Geometria e da Astronomia.

Fig. 92 Teorema, Perez y Marin e Paula, p. 78-79

O que se pode concluir a partir dos livros-texto é que as diferentes proposições nomeadas *teorema de Tales* se correlacionam e tratam de propriedades básicas da semelhança de figuras, em particular da semelhança de triângulos. Adiante esse aspecto volta a ser explorado.

9.3 A incomensuralidade em demonstrações dos livros-texto

O teorema de Tales em Sangiorgi, na abordagem de Roxo é um teorema fundamental da semelhança de figuras e a proposição envolve as grandezas comensuráveis e incomensuráveis. Veja a demonstração de Roxo.

251. Theorema fundamental. — *Varias rectas parallelas interceptam, sobre secantes quaesquer, segmentos proporcionaes.*

Hypothese: varias rectas parallelas determinam, sobre uma secante AD (fig. 187), os pontos A, B, C, D; e respectivamente sobre outra secante qualquer $A'D'$, os pontos A', B', C', D'.

These: os segmentos interceptados sobre AD são proporcionaes aos segmentos determinados sobre $A'D'$; assim, por exemplo: $\frac{AB}{A'B'} = \frac{CD}{C'D'}$.

Demonstração:

1º caso. — AB e CD são commensuraveis.

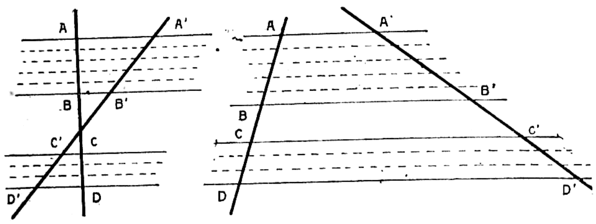


Fig. 187

(1) Uma unidade commum está contida exactamente m vezes em AB e n vezes em CD (na fig. 187: $m = 5$, $n = 3$).	(1) AB e CD são commensuraveis.
(2) Então $\frac{CD}{AB} = \frac{n}{m}$	(2) N. 197, 2º.
(3) Em cada um dos pontos de divisão de AC tracemos uma parallela a DD'.	
(4) Estas parallelas interceptam partes iguaes sobre $A'D'$.	(4) N. 197.
(5) $A'B'$ fica dividido em m partes iguaes e $C'D'$ em n partes iguaes.	
(6) $\therefore \frac{C'D'}{A'B'} = \frac{n}{m}$	(6) Porque ?
(7) e $\frac{CD}{AB} = \frac{C'D'}{A'B'}$	(7) Porque ?

2º *caso*. — AB e CD são incommensuraveis.

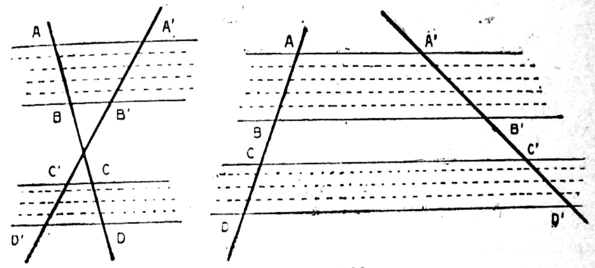


Fig. 188

(1) $\frac{1}{m}$ (na fig. 188, $\frac{1}{5}$) de AB não está contida um numero exacto de vezes em CD; cabe n (na fig. 188, 3 vezes) mas não cabe $n+1$ vezes em CD.

(2) Então $\frac{CD}{AB} = \frac{n}{m}$, a menos de $\frac{1}{m}$ p. f. — (2) N. 193.

(3) Procedendo como em (3) do caso precedente, $A'B'$ fica dividido em m (5 no caso da fig. 188) partes iguaes; $\frac{1}{m}$ de $A'B'$ caberá mais de n vezes e menos de $n+1$ vezes em $C'D'$.

(4) Então $\frac{C'D'}{A'B'} = \frac{n}{m}$ a menos de $\frac{1}{m}$ p. f. — (4) N. 193.

(5) ∴ o valor a menos de $\frac{1}{m}$ de $\frac{CD}{AB}$ é igual ao valor a menos de $\frac{1}{m}$ de $\frac{C'D'}{A'B'}$, qualquer que seja m. — (5) Axioma.

(6) $\frac{CD}{AB} = \frac{C'D'}{A'B'}$ — (6) N. 196.

Fig. 93 Demonstração, Roxo, p. 275-277

Enquanto Sangiorgi considera o tema incomensurável fora do alcance dos conteúdos abordados, em Perez y Marin e Paula e na geometria F.I.C. esse caso não é mencionado; Roxo, Thiré e Mello e Souza explicam que se pode admitir a relação como verdadeira e Roxo é o único autor que demonstra os dois casos.

Mas, o teorema que Sangiorgi nomeou *Tales no triângulo*, nos livros de Perez y Marin e Paula e nos *Elementos de geometria* F.I.C é demonstrado para os dois casos. Na geometria F.I.C., a demonstração é como a seguir,

Theorema.

212. *Toda parallela a um lado de um triangulo divide na mesma razão os outros dois lados.*

Seja ABC um triangulo qualquer, e seja DE uma parallela ao lado BC. Resta provar que

$$\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$$

Supponhamos primeiramente que os segmentos AD e DB tenham uma medida commum, a qual seja contida, por exemplo, 7 vezes em AD e 3 vezes em BD; teremos:

$$\frac{AD}{DB} = \frac{7}{3}$$

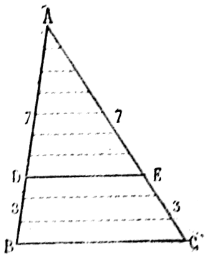


Fig. 157.

Se por todos os pontos de divisão de AB, tiram-se parallelas a BC, a recta AC fica dividida em 10 partes iguaes, das quaes 7 sobre AE e 3 sobre EC (nº 210); podemos pois escrever

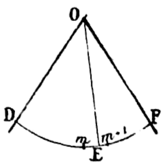
$$\frac{AE}{EC} = \frac{7}{3} \text{ e por consequencia } \frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$$

Como se póde repetir a demonstração, por mais pequena que seja a medida commum entre AD e BD, o theorema é verdadeiro em todos os casos. — Logo *toda a parallela a um lado...* *.

Fig. 94 Teorema, Geometria F.I.C., p. 88-89

O asterisco no final da demonstração, acima, indica a nota referida no teorema nº 144, sobre arcos,

* Para demonstrar o theorema nos casos em que os arcos são *incommensuraveis*, transporta-se o pequeno angulo DOE sobre o grande **DOF**, e suppõe-se o arco DF dividido em um numero qualquer n de partes iguaes. O ponto E se acha entre dois pontos de divisão, por exemplo, entre o mº e o ponto seguinte, marcado $m+1$.



Temos por conseguinte :

$$\frac{m}{n} < \frac{\text{arco DE}}{\text{arco DF}} < \frac{m+1}{n}$$

Se unirmos cada ponto de divisão ao ponto O, o angulo DOE está dividido em n partes iguaes, e o angulo DOE é maior do que m d'esses angulos parciaes, e menor do que $m+1$ d'esses mesmos angulos

Temos pois : $$\frac{m}{n} < \frac{\text{angulo DOE}}{\text{angulo DOF}} < \frac{m+1}{n}$$

Em ambos os casos, as razões extremas $\frac{m}{n}$ e $\frac{m+1}{n}$ ou $\frac{m}{n} + \frac{1}{n}$ **differem de** $1/n$; **por conseguinte, se dividirmos** DE **em grande numero de partes iguaes,** a differença $1/n$ podendo tornar-se tão pequena quanto se queira, **tende para** *zero*, e em todos os casos temos a proporção

$$\frac{\text{angulo DOE}}{\text{angulo DOF}} = \frac{\text{arco DE}}{\text{arco DF}}$$

Fig. 95 Teorema, Geometria F.I.C., p. 49-50

Perez y Marin e Paula também provam os dois casos,

HYP.: DE é parallela a BC.

THESE: $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$.

DEMONSTRAÇÃO: Consideremos os casos: 1.º, em que as partes AD e DB são commensuraveis; 2.º, em que são incommensuraveis.

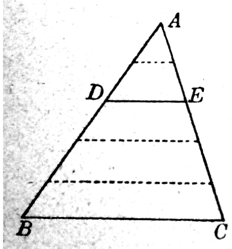


Fig. 90

1.º caso: Supponhamos que a maior medida commum entre AD e DB está contida, por exemplo, duas vezes em AD e tres vezes em DB; temos, pois:

$$\frac{AD}{DB} = \frac{2}{3} \quad (1).$$

Si tirarmos pelos pontos de divisão parallelas a BC, essas parallelas determinarão sobre AC partes tambem eguaes (124);

logo, $\frac{AE}{EC} = \frac{2}{3}$ (2).

2.º caso: Si as parallelas $D'E'$ e $B'C'$ (fig. 91) determinarem sobre $A'B'$ as partes $A'D'$ e $D'B'$ incommensuraveis, podemos dividir uma dellas, $A'D'$ por exemplo, num certo numero de partes eguaes. Levemos uma dessas partes sobre $D'B'$ e supponhamos que o ultimo ponto de divisão é B''; tirando a parallela $B''C''$ a $B'C'$, o triangulo $A'B''C''$ estará comprehendido no 1.º caso, e teremos, por conseguinte:

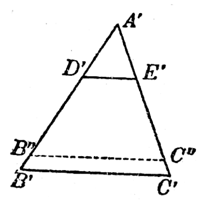


Fig. 91

$$\frac{A'D'}{D'B''} = \frac{A'E'}{E'C''}.$$

Como as partes eguaes em que foi dividida $A'D'$ podem tornar-se muito pequenas, o ponto B'' póde approximar-se de B' tanto quanto se queira; logo, permanecendo as duas razões variaveis da ultima proporção, constantemente eguaes, seus limites tambem serão eguaes, e teremos, portanto:

$$\frac{A'D'}{D'B'} = \frac{A'E'}{E'C'},$$ como se queria demonstrar.

Fig. 96 Teorema, Perez y Marin e Paula, p. 67-69

Em Legendre esse teorema consta do Livro III, *Proporções de figuras*. O autor não menciona a incomensuralidade, como acontece nas outras demonstrações das obras históricas.

PROPOSIÇÃO XV.

THEOREMA.

A linha DE, (fig. 114.) *tirada parallelamente à baſe de hum triangulo* ABC, *divide os lados* AB, AC, *proporcionalmente, de ſorte que temos* AD : DB : : AE : EC.

Ajuntem-ſe BE e DC; os dois triangulos BDE, DEC, tem a meſma baſe DE; tambem tem a meſma altura, porque os vertices B e C eſtão ſituados ſobre huma parallela á baſe. Logo eſtes triangulos são equivalentes (2).

Os triangulos ADE, BDE, que tem o vertice commum E, tem a meſma altura, e eſtão entre ſi como as ſuas baſes AD, DB (6.), aſſim temos,

ADE : BDE : : AD : DB.

Os triangulos ADE, DEC, que tem o vertice commum D, tem igualmente a meſma altura, e eſtão entre ſi como as ſuas baſes AE, EC; logo

ADE : DEC : : AE : EC.

Mas o triangulo BDE = DEC; logo, por cauſa da razão commum neſtas duas proporções, concluiremos AD : DB : : AE : EC.

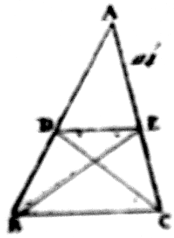


fig. 114

Fig. 97 Teorema, Legendre, p. 77-78

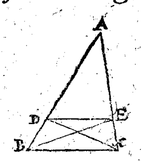
Em Hérigone o que foi designado como teorema de Tales no triângulo, corresponde à proposição 2 do Livro VI, seguindo a ordem dos *Elementos*.

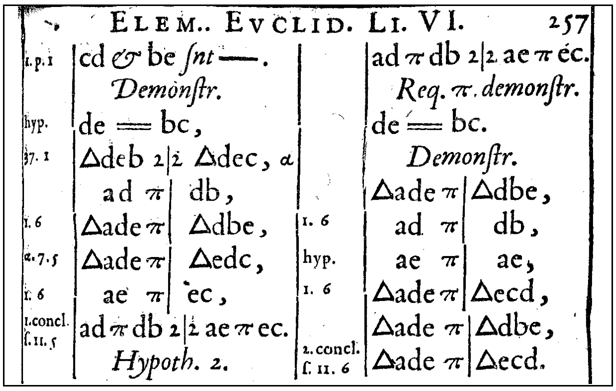
THEOR. II. PROPOS. II.

Si ad vnum trianguli latus parallela ducta fuerit recta quædam linea, hæc proportionaliter ſecabit ipſius trianguli latera. Et ſi trianguli latera proportionaliter ſecta fuerint, quæ ad ſectiones adiuncta fuerit recta linea, erit ad reliquum ipſius trianguli latus parallela.

Si à l'vn des coſtez d'vn triangle on mene quelque ligne droicte parallele, elle couppera les coſtez du triangle proportionellement: Et ſi les coſtez ſont couppez proportionellement, la ligne droicte conioignant les poincts des ſections, ſera parallele à l'autre coſté du triangle.

Hypoth. 1.
abc *eſt* △,
de ═ bc.
Req. π. demonſtr.
ad π db 2|2 ae π ec.
Præpar.





ELEM.. EVCLID. LI. VI. 257

1.p.1	cd & be ſnt —.			ad π db 2|2 ae π éc.	
	Demonſtr.			Req. π. demonſtr.	
hyp.	de ═ bc,			de ═ bc.	
37.1	△deb 2|2 △dec, α			Demonſtr.	
	ad π	db,		△ade π	△dbe,
1.6	△ade π	△dbe,	1.6	ad π	db,
α.7.5	△ade π	△edc,	hyp.	ae π	ae,
1.6	ae π	ec,	1.6	△ade π	△ecd,
1.concl. f.11.5	ad π db 2|2 ae π ec.			△ade π	△dbe,
	Hypoth. 2.		2.concl. f.11.6	△ade π	△ecd.

Fig. 98 Teorema, Hérigone, p. 256-257

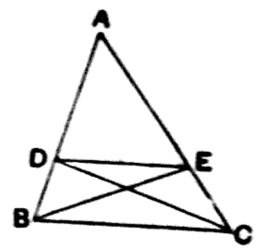
A seguir a explicação da notação usada no teorema acima,

ad $\perp$ bc : ad é perpendicular a bc
ad π| db : ad está para db
ad π db 2|2 ae π ec : ad está para db assim como ae está para ec

O teorema de Tales no triângulo, nos *Elementos* de Euclides tem o seguinte desenvolvimento,

PROPOSIÇÃO 2, Livro VI dos *Elementos* de Euclides

Se uma linha reta for traçada paralela a um dos lados de um triângulo, ela cortará os lados do triângulo proporcionalmente. E se os lados do triângulo forem cortados proporcionalmente, a linha que une os pontos da seção será paralela aos outros lados do triângulo.



Pois seja DE traçada paralela a BC, um dos lados do triângulo ABC.
Eu digo que, assim como BD está para DA, CE está para EA.
Pois sejam BE e CD unidas.

1ª. parte
Portanto, o triângulo BDE é igual ao triângulo CDE, pois eles estão sob a mesma base DE e as mesmas paralela DE, BC. [I, 38]
E o triângulo ADE é outra área.
Mas iguais têm a mesma razão entre si. [V, 7]
Portanto, o triângulo BDE está para o triângulo ADE assim como o triângulo CDE está para o triângulo ADE.
Mas, assim como o triângulo BDE está para ADE, BD está para DA, pois estando sobre a mesma altura, a perpendicular traçada de E até AB, eles estão um para o outro como as suas bases. [[VI, I]

2ª parte
Também, pela mesma razão, como o triângulo CDE está para ADE, assim CE está EA. [V, II]
Outra vez, sejam os lados AB, AC do triângulo ABC, cortados proporcionalmente de modo que, assim como BD está para DA, CE está para EA.
E sejam unidos D, E.
Eu digo que DE é paralelo a BC.
Pois, com a mesma construção, desde que BD está para DA, assim CE está para EA. Mas como BD está para DA, também o triângulo BDE está para o triângulo ADE.
E assim como CE está para EA, o triângulo BDE está para o triângulo ADE, e como CE está para EA, o triângulo CDE está para o triângulo ADE. [V, II]
Portanto, também como o triângulo BDE está para o triângulo ADE, assim o triângulo CDE está para o Triângulo ADE.
Portanto, cada um dos triângulos BDE, CDE estão na mesma razão para com ADE.
Portanto, o triângulo BDE é igual ao triângulo CDE e eles estão sobre a mesma base DE. [V, 9]
Mas, triângulos que estão sobre a mesma base também estão sobre as mesmas paralelas.
Portanto, DE é paralela a BC.
Portanto, etc. Q. E. D.

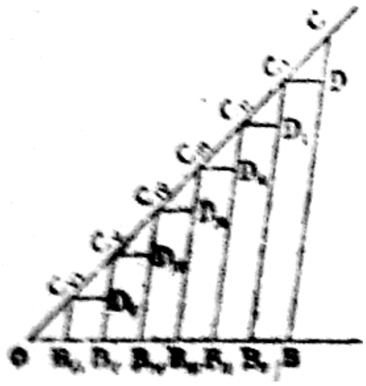
Fig. 99 Teorema, *Elementos* de Euclides, p. 194-195

Observe, no teorema acima, que [I, 38] é a proposição de entrada que confirma a igualdade dos dois triângulos: o triângulo BDE é igual ao triângulo CDE, pois eles estão sob a mesma base DE e entre as mesmas paralelas DE, BC. Mas, na prova do teorema de Pitágoras pelo método da equivalência de áreas, nos *Elementos*, a proposição [I, 41] é um dos passos dedutivos da demonstração que leva à conclusão do teorema, ao estabelecer: o paralelogramo é o dobro do triângulo porque têm a mesma base e estão entre as mesmas paralelas. Essas duas proposições pertencem ao grupo de teoremas do Livro I dos *Elementos* que tratam da transformação e comparação de áreas de paralelogramos e triângulos.

Por outro lado, quando o teorema de Pitágoras é demonstrado com base na semelhança de figuras, fica explícito que na base da prova está a razão dos segmentos que representam os lados do triângulo, que, nesse caso é a razão de semelhança dos triângulos. Ou seja, a proporcionalidade é o fator determinante como bem explicou Legendre, "o quadrado da hipotenusa é uma conseqüência da proporcionalidade dos lados nos triângulos eqüiângulos e, assim, as proposições fundamentais da Geometria se reduzam, por assim, dizer, a esta só, que os triângulos eqüiângulos têm os seus lados homólogos proporcionais" (1808, p. 85). Chega-se assim às relações métricas em triângulos quaisquer, conteúdo presente na escola básica e nos livros-texto dos dias atuais.

A idéia de medida permite trazer reflexões importantes associadas ao teorema de Tales. A experiência aritmético-geométrica que está na base da ciência da medida se manifesta de forma característica no teorema de Tales. Brunschvicg (1922) diz que é conveniente considerar como isso acontece:

> Unindo dois pontos sobre os dois lados BO, CO de um ângulo, se desloca paralelamente e no sentido do vértice O do ângulo o segmento traçado, de modo a obter uma série de segmentos, os menores possíveis (fig. 13).



> A posição ocupada por esses segmentos determina os pontos B_I,..., B_{VI}, obtidos por uma divisão da linha OB em sete partes equivalentes. Sobre o outro lado OC do ângulo, são determinados sete segmentos, OC_{VI},..., C_vC_{VI} que são equivalentes entre si.
>
> Traçando de cada um desses pontos C_{VI}, C_V, etc., uma paralela à OB, é formada uma série de paralelogramos cujos lados são respectivamente iguais, e uma série de triângulos $OB_{VI}C_{VI}$, etc. Ora, esses triângulos podem todos ser superpostos, bastando para isso uma dupla translação retilínea para que os lados dos triângulos coincidam com as direções do ângulo $OC_{VI}B_{VI}$.
>
> Mas, os lados $C_{VI}D_{VI}$, etc, são todos iguais ao lado OB_{VI}, etc., porque é do ponto O e do ponto B que partiram as direções dos lados que se superpõem aos lados dos ângulos $OC_{VI}B_{VI}$. Então é inevitável que o terceiro ângulo coincida.
>
> Nós podemos tomar sobre cada uma das retas OB, OC um segmento correspondente ao número de divisões que se queira e medir a razão desse segmento com o total. Por exemplo, se nós temos,
>
> $$\frac{B_{III}O}{BO}=\frac{4}{7}$$
>
> nós teremos $$\frac{C_{III}O}{CO}=\frac{4}{7}$$
>
> e nós constituiremos a proporção do tipo propriamente geométrica:
>
> $$\frac{C_{III}O}{CO}=\frac{B_{III}O}{BO}$$
>
> (p. 507-508)

Nesse ponto, se pode apreender a virada que transformou a idéia de matemática, porque a proporção de ordem geométrica que se estabelece por intermédio das medidas numéricas, ultrapassa o quadro das operações feitas sobre os números inteiros ou fracionários e, por conseguinte, o quadro da aritmética propriamente dita. Obtém-se a proporção,

$$\frac{C_{III}O}{B_{III}O} = \frac{CO}{BO}$$

lque exprime a proporcionalidade dos lados OC e OC_{III}, OB e OB_{III} nos dois triângulos COB, $C_{III}OB_{III}$, que é independente de uma medida comum entre CO e BO, pela própria construção da figura em que não se impôs qualquer restrição às posições da linha CO em torno de O, ou do segmento BC traçado entre um ponto BO e um ponto CO (idem, p. 508).

Assim, os obstáculos que poderia apresentar a expressão numérica das grandezas, que pareceram insuperáveis durante séculos aos matemáticos, têm no estabelecimento geométrico dessas razões uma base suficiente para a constituição de uma métrica universal ou, segundo a terminologia de Newton, de uma aritmética universal, "tudo o que se refere à unidade como uma linha reta para uma outra reta se chama número" (Wolff, *Elementa aritmeticae*, 1743, p. 18, cf. Brunschvicg, p. 509). E, a aritmética universal implicada na teoria euclidiana das proporções toma a forma de uma álgebra e, segundo Brunschvicg,

> A equação da linha reta, escreve Cournot, é apenas a expressão algébrica do teorema de Tales, sobre a proporcionalidade dos lados nos triângulos equiângulos, teorema cuja invenção ou enunciação formal marca o começo da geometria e de toda a ciência exata" (idem, p. 509).

No entanto, Brunschvicg amplia a discussão sobre a proporcionalidade traduzida pelo teorema de Tales, quando afirma,

> o que faz o interesse capital da teoria da proporcionalidade não é apenas ela ser um instrumento para a comparação de grandezas em geral, mas que ela ainda põe em evidência uma função do pensamento humano em geral. O esforço elementar da inteligência consiste em determinar uma razão entre os termos introduzidos pela intuição ou já isolados pela análise. Assim, a extensão do sistema da inteligência consistirá em compreender, depois, um par de relações que já parecia adequado aos termos dados. (idem, p. 509)

Mas tudo isso diz respeito à interação entre intuitivo e intelectual, na constituição do estudo da geometria plana ou a *n* dimensões, isto é, refere-se à constituição do espaço. Segundo Brunschvicg, o espaço tem sua raiz na experiência e tem sua conclusão na razão intelectual e marca o mais alto grau de poder criativo que o homem foi capaz de conceber e de exercer.