

Regina de Cassia Manso de Almeida

**Demonstrações em geometria plana
em livros-texto no Brasil a partir do século XIX**

Tese de Doutorado

Tese apresentada ao Programa de Pós-graduação em Educação do Departamento de Educação da PUC-Rio como parte dos requisitos parciais para obtenção do título de Doutor em Educação.

Orientador: João Bosco Pitombeira Fernandes de Carvalho

Co-orientador: Gert Schubring

Rio de Janeiro
Abril de 2008



Regina de Cassia Manso de Almeida

**Demonstrações em geometria plana
em livros-texto no Brasil a partir do século XIX**

Tese apresentada como requisito parcial
Para obtenção do grau título de Doutor pelo
Programa de Pós-Graduação em Educação
do Departamento de Educação do Centro
de Teologia e Ciências Humanas da PUC-
Rio. Aprovada pela Comissão Examinadora
abaixo assinada.

Profª Gilda de La Rocque Palis

Presidente

Departamento de Educação - PUC-Rio

Profº João Bosco Pitombeira Fernandes de Carvalho

Orientador

Departamento de Educação - PUC-Rio

Profº Gert Schubring

Co-orientador

Universidade Bielefeld - Alemanha

Profª Maria Laura Mouzinho Leite Lopes - Prof. Emérita

Departamento de Matemática - UFRJ

Profº Victor Augusto Giraldo

Departamento de Matemática - UFRJ

Profº Celso Braga Wilmer

Departamento de Comunicação - PUC-Rio

Profº Paulo Fernando Carneiro de Andrade

Coordenador Setorial do Centro de Teologia e
Ciências Humanas – PUC-Rio

Rio de Janeiro, 29 de abril de 2008

Todos os direitos reservados. É proibida a reprodução total ou parcial do trabalho sem autorização da Universidade, da autora e do orientador.

Regina de Cassia Manso de Almeida

Graduada em matemática pela Faculdade de Filosofia de Itaperuna. Mestre em Educação pela PUC-Rio, professora de matemática no Colégio Técnico Agrícola Ildelfonso Bastos Borges – UFF.

Ficha Catalográfica

Manso Almeida, Regina de Cassia

Demonstrações em geometria plana em livros-texto no Brasil a partir do século XIX / Regina de Cássia Manso de Almeida ; orientador: João Bosco Pitombeira Fernandes de Carvalho ; co-orientador: Gert Schubring. – 2008.

273 f. : il. ; 30 cm

Tese (Doutorado em Educação)–Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2008.

Inclui bibliografia

1. Educação – Teses. 2. Demonstração. 3. Geometria. 4. Livro escolar. 5. Ensino-aprendizagem. 6. História da matemática. I. Carvalho , João Bosco Pitombeira Fernandes de. II. Schubring , Gert. III. Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro. Departamento de Educação. IV. Título.

CDD: 370

*Aos meus pais, Alcides e Nair
– por todos os ensinamentos.*

Agradecimentos

Alegra-me muito dizer *Obrigada!* João Bosco Pitombeira Fernandes de Carvalho – cordialidade, estímulo, apoio, confiança, firmeza no conhecimento, decisivamente fundamentais em minha formação acadêmica e na produção desta Tese – mais que tudo, lhe desejo continuar partilhando bens tão valiosos.

Gert Schubring, co-orientador, *Obrigada! Vielen Dank!*, especialmente pelo convívio agradável e apoio no período fora do Brasil: sua orientação segura e criteriosa foi fundamental em minha formação acadêmica e na elaboração desta Tese.

Maria Aparecida Campos Mamede-Neves, companheirismo, apoio, especialmente importantes em minha trajetória acadêmica. *O-b-r-i-g-a-d-a!*

Ao governo brasileiro, através da CAPES, à Pró-Reitoria de Pesquisa e Pós-Graduação da UFF, ao Programa de Pós-Graduação da PUC-Rio, por viabilizarem a realização deste projeto.

Aos diretores e colegas do CTAIBB/UFF, que me apoiaram. Também com vocês compartilho essa conquista. Muito obrigada!

Bruno Alves Dassie, as trocas quando a gente mais precisa – livros, idéias, leituras, helps com os PCs que pifam em momentos inacreditáveis... (nessa fui sempre receptora!) são legados da amizade, um bem precioso. Obrigada! Valeu!

Andréa Rohrer, amiga sempre atenciosa, entusiasmada. Sem esquecer tantas ajudas, com o idioma, a moradia, especialmente, com você aprendi muito como se leva o dia-a-dia na Alemanha. Muchas gracias!

Uli Werder, atenção e amizade importantes para a estadia agradável fora do Brasil. Obrigada pelas ajudas com o idioma. Silvia e Klaus, *Vielen Dank für Alles!* E, Wania, Super! recebê-la, irmã, em Deutschland!

À minha família, incondicionalmente me apoiando.

Agradeço a Deus, peço que nos abençoe – a todos e em tudo. Espero que esta Tese seja representativa do convívio acadêmico com professores tão exemplares pelo conhecimento e produção nas áreas em que atuam e também pela compreensão, carinho e ajuda de tantas pessoas e, sabemos, esse trabalho é nosso.

Resumo

Manso de Almeida, Regina de Cassia; Carvalho, João Bosco Pitombeira Fernandes. **Demonstrações em geometria plana em livros-texto no Brasil a partir do século XIX**. Rio de Janeiro, 2008, 273 f. Tese de Doutorado – Departamento de Educação. Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

Esta Tese investiga mudanças ocorridas no texto de demonstração em geometria plana elementar, em livros-textos usados no ensino brasileiro a partir do século XIX. O trabalho está organizado em duas partes: a primeira, um estudo histórico de releituras dos *Elementos* de Euclides que, a partir do século XVI, em cada época influenciaram a constituição da matemática escolar em seu sentido mais amplo e a segunda, as análises das demonstrações. A base documental inclui obras históricas e livros relevantes no ensino-aprendizagem da geometria dedutiva no Brasil. As releituras de Euclides e os livros-texto permitiram estabelecer os parâmetros de análise das demonstrações e de inferências de ordem mais geral. As análises das demonstrações mostram evidências que confirmam mudanças de várias ordens: a redação, o método e a justificativa da prova. Foi possível identificar dois tipos básicos de livros-texto que denominamos *elementos de geometria* e *livros de matemática*, e caracterizar a correlação existente entre eles: o estudo dedutivo em geometria, originário no livro tipo *elementos de geometria* que se estrutura conforme o padrão euclidiano teorema-problema, se altera devido à interação geometria-álgebra-aritmética, a qual caracteriza o *livro de matemática* desde a sua origem até a atualidade. Foi possível constatar, ainda, que o estudo dedutivo em geometria tende a desaparecer quase totalmente nos textos tipo livro de matemática. O estudo – texto demonstrativo e suas mudanças – mostra uma história dos conteúdos matemáticos, dos livros-texto e da matemática escolar no Brasil.

Palavras-chave:

Demonstração, geometria, livro escolar, ensino-aprendizagem, história da matemática

Abstract

Manso de Almeida, Regina de Cassia; Carvalho, João Bosco Pitombeira Fernandes. **Proofs of plane geometry found in brazilian textbooks since the XIXth century**. Rio de Janeiro, 2008, 273 f. Doctoral Thesis – Departamento de Educação. Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

This thesis studies changes in proofs of elementary geometry theorems found in brazilian textbooks from the XVIIIth century on. The thesis is composed of two parts. The first one contains a historic survey of “re-readings” of Euclid’s Elements which, from the XVIth century on influenced the constitution of the school mathematics “corpus”, in its wide sense. The second part contains the actual analysis of proofs. We examine both historically important Works and books that were influential in the teaching and learning of deductive geometry in Brazil. The study of Euclid’s Elements and later works enabled us to set up the guidelines for the proofs analysis and all of more general inferences. The proofs analysis shows several types of change: the style, the method and the actual proof. It was possible to identify two basic kinds of text-books, which we call elements of geometry and mathematics books, respectively, and to establish the correlation between the two types: the deductive study of geometry, present in the elements of geometry, that adopted the Euclidean pattern of theorem – problem, changes due to the interaction between geometry, arithmetic and algebra, which characterizes the mathematics book, from their beginnings to the present. It was also possible to establish that the deductive study of geometry almost disappears in the mathematics books. The study of proofs and their changes shows the history of the contents of school mathematics, their text-books and of school mathematics in Brazil.

Key-words

Mathematical proof; geometry; mathematics text-books; learning and teaching of mathematics; history of mathematics.

Sumário

1 INTRODUÇÃO	6
PARTE I – UM CAMINHO PELA HISTÓRIA	20
2 Euclides Revisitado	21
2.1 A estrutura e a demonstração nos <i>Elementos</i> de Euclides	21
2.2 A geometrização das grandezas e o texto de demonstração	27
2.3 A transmissão do texto dos <i>Elementos</i>	29
2.4 Críticas aos <i>Elementos</i> de Euclides conforme Ramus, Arnauld e Legendre	37
2.4.1 A crítica aos <i>Elementos</i> de Euclides conforme Ramus	38
2.4.2 A crítica aos <i>Elementos</i> de Euclides conforme Arnauld	41
2.4.3 A crítica aos <i>Elementos</i> de Euclides conforme Legendre	49
2.5 O trabalho de Christian Wolff – <i>Aula sucinta sobre a arte de ensinar matemática</i>	55
3 Do <i>mostrar ao demonstrar</i>	66
3.1 Origens metodológicas	66
3.2 Exemplificando a passagem <i>do mostrar ao demonstrar</i>	71
3.2.1 A complexidade do problema	73
3.2.2 A síntese do percurso <i>do mostrar ao demonstrar</i>	77
3.3 A figura geométrica em textos chineses antigos, em Euclides e em Arquimedes	78
3.3.1. A figura geométrica em textos chineses antigos	78
3.3.2 A figura geométrica em Euclides	84
3.3.3 A figura geométrica em Arquimedes	91
3.3.4 A quadratura da parábola	95

PARTE II – O TEXTO DEMONSTRATIVO	99
4 Caracterizando a demonstração	100
4.1 Demonstração matemática enquanto processo de prova	100
4.2 Uso específico para a linguagem	104
4.3 Demonstração matemática e argumentação	106
5 A Análise das demonstrações	110
6 Revisitando Euclides com Hérigone e Legendre: a demonstração em obras históricas	114
6.1 A demonstração nos <i>Elementos</i> de Euclides	114
6.2 O <i>Curso de Matemática I</i> de Hérigone	122
6.3 Os <i>Elementos de geometria</i> de Legendre como referencial	128
7 A Demonstração no ensino brasileiro: os <i>elementos de geometria</i>	136
7.1 <i>Elementos de geometria</i> de Paranaguá	136
7.2 <i>Elementos de geometria</i> de Ottoni	141
7.3 <i>Curso de geometria</i> de Timotheo Pereira	145
7.4. <i>Elementos de geometria</i> de Perez y Marin e Paula	147
7.5. <i>Elementos de Geometria</i> F.I.C.	152
7.6 Sínteses a partir dos <i>elementos de geometria</i>	157
7.6.1 Identidade algébrica ou propriedade de objetos geométricos?	157
7.6.2 Correlações entre demonstração, fórmula e questões propostas em <i>elementos de geometria</i>	165
8 Demonstração no ensino brasileiro: os <i>livros de matemática</i>	173
8.1 <i>Curso de Mathematica – 3ª Série – II – Geometria</i> de Roxo	175
8.2 <i>Matemática Ginásial</i> de Roxo, Thiré e Mello e Souza	190
8.3 <i>Curso de Matemática</i> de Maeder	198
8.4 <i>Matemática – Curso Moderno</i> de Sangiorgi	204
8.5 Estratégia didática para o ensino-aprendizagem da demonstração em livros-texto	212

9 Teorema de Tales em livros-texto: que teorema escolher?	227
9.1 <i>Teorema de Tales</i> : diferentes proposições em correlação	230
9.2 A demonstração do <i>teorema de Tales</i> ou <i>teorema fundamental dos triângulos</i> nos livros-texto	235
9.3 A incomensuralidade em demonstrações dos livros-texto	238
10 Considerações Finais	247
Referências Bibliográficas	253
Apêndice 1	260
Apêndice 2	261

Lista de figuras

PARTE I

Fig. 1	28
Fig. 2	71
Fig. 3a	74
Fig. 3b	74
Fig. 3c	74
Fig. 3d	74
Fig. 3e	74
Fig. 4	75
Fig. 5a, Fig. 5b	80
Fig. 6 Figura da hipotenusa	80
Fig. 7 Figura da hipotenusa	82
Fig. 8	85
Fig. 9	85
Fig. 10	86
Fig. 11	88
Fig. 12 Figura em obras matemáticas	91
Fig. 13	96
Fig. 14	97
Fig. 15	97
Fig. 16	97
Fig. 17	97

PARTE II

Fig. 1 Funcionamento ternário de um passo dedutivo	105
Fig. 2 Teorema de Pitágoras, <i>Elementos</i> de Euclides	116
Fig. 3 Teorema de Pitágoras, <i>Elementos</i> de Euclides	121
Fig. 4 <i>Cours Mathématique I</i> , Hérigone	124
Fig. 5 Teorema de Pitágoras, Hérigone	125

Fig. 6 Teorema de Pitágoras, Hérigone	128
Fig. 7 Teorema de Pitágoras, Legendre	131
Fig. 8 Corolário, Legendre	132
Fig. 9 Corolário, Legendre	133
Fig. 10 Escólio, Legendre	134
Fig. 11 Escólio, Legendre	135
Fig.12 Teorema de Pitágoras	138
Fig. 13 Nota, Paranaguá	139
Fig. 14 Explicação, Paranaguá	140
Fig. 15 Teorema de Pitágoras, Ottoni	141
Fig. 16 Theorema, Ottoni	142
Fig. 17 Teorema de Pitágoras	143
Fig. 18 Teorema de Pitágoras, Timotheo Pereira	145
Fig. 19 Teorema de Pitágoras, Timotheo Pereira	147
Fig. 20 Teorema de Pitágoras, Perez y Marin e Paula	148
Fig. 21 Lúnulas de Hipócrates, Perez y Marin e Paula	149
Fig. 22 Projeção ortogonal, Perez y Marin e Paula	150
Fig. 23 Teorema de Pitágoras, Perez y Marin e Paula	151
Fig. 24 Observação, <i>Elementos de Geometria</i> , F.I.C.	153
Fig. 25 Teorema, <i>Elementos de Geometria</i> , F. I. C.	154
Fig. 26 Escólio, <i>Elementos de Geometria</i> , F.I.C.	155
Fig. 27 Escólio, <i>Elementos de Geometria</i> , F.I.C.	155
Fig. 28 Teorema, <i>Elementos de Geometria</i> , F.I.C.	156
Fig. 29 Fórmulas algébricas, <i>Elementos de Geometria</i> , F.I.C.	158
Fig. 30 Teorema, <i>Elementos de Geometria</i> , F.I.C.	158
Fig. 31 <i>Elementos de Geometria</i> , F.I.C.	159
Fig. 32 Teorema, Legendre	160
Fig. 33 Teorema, Legendre	161
Fig. 34 Teorema, <i>Elementos de Euclides</i>	163
Fig. 35 Teorema, Hérigone	164
Fig. 36 Questão proposta, <i>Elementos de Geometria</i> , F.I.C.	166
Fig. 37 Problema, <i>Elementos de Geometria</i> , Perez y Marin e Paula	169
Fig. 38 Problema, <i>Elementos de Geometria</i> , Perez y Marin e Paula	169
Fig. 39 Escólio, <i>Elementos de Geometria</i> , F.I.C.	170

Fig. 40 Questão a resolver, <i>Elementos de Geometria</i> , F.I.C.	171
Fig. 41 Teorema, Roxo	177
Fig. 42 Observações, Roxo	178
Fig. 43 Teorema de Pitágoras, Roxo	179
Fig. 44 Observação, Roxo	179
Fig. 45 Observação, Roxo	180
Fig. 46 Exemplo, Roxo	181
Fig. 47 Exemplo, Roxo	181
Fig. 48 Ilustração, Roxo	182
Fig. 49 Teorema, Roxo	183
Fig. 50 Teorema, Roxo	184
Fig. 51 Demonstração de Pappus	186
Fig. 52 Demonstração visual, Roxo	187
Fig. 53 Demonstração visual, Roxo	187
Fig. 54 Caricatura a partir da figura dos <i>Elementos</i> , Roxo	188
Fig. 55 Média proporcional, Roxo, Thiré, Mello e Souza	192
Fig. 56 Teorema de Pitágoras, Roxo, Thiré, Mello e Souza	193
Fig. 57 Observação, Roxo, Thiré e Mello e Souza	194
Fig. 58 Nota, Roxo, Thiré, Mello e Souza	194
Fig. 59 Teorema de Pitágoras, Roxo, Thiré e Mello e Souza	195
Fig. 60 Nota, Roxo, Thiré, Mello e Souza	196
Fig. 61 Respostas aos exercícios, Roxo, Thiré, Mello e Souza	196
Fig. 62 Roxo, Thiré, Mello e Souza	197
Fig. 63 Teorema, Maeder	199
Fig. 64 Teorema de Pitágoras, Maeder	200
Fig. 65 Teorema, Maeder	202
Fig. 66 Teorema de Pitágoras, Maeder	203
Fig. 67 Teorema de Pitágoras, Sangiorgi	206
Fig. 68 Teorema, Sangiorgi	208
Fig. 69 Semelhança, Sangiorgi	208
Fig. 70 Explicação, Sangiorgi	209
Fig. 71 Explicação, Sangiorgi	209
Fig. 72 Teorema de Pitágoras, <i>Sangiorgi</i>	211
Fig. 73 Explicação, Sangiorgi	219
Fig. 74 Demonstração, Sangiorgi	219

Fig. 75 Explicação, Sangiorgi	220
Fig. 76 Exemplo, Sangiorgi	220
Fig. 77 Explicação, Sangiorgi	221
Fig. 78 Explicação, Sangiorgi	222
Fig. 79 Explicação, Sangiorgi	222
Fig. 80 Demonstração, Sangiorgi	223
Fig.81 Explicação, Sangiorgi	224
Fig. 82 Esquema, Sangiorgi	224
Fig. 83 Teorema, Roxo	225
Fig. 84 Teorema, Sangiorgi	226
Fig. 85 Teorema, Sangiorgi	231
Fig. 86 Teorema, Sangiorgi	232
Fig. 87 Teorema, Sangiorgi	232
Fig. 88 Teorema, Sangiorgi	233
Fig. 89 Teorema, Roxo	235
Fig. 90 Teorema, Roxo, Thiré, Mello e Souza	236
Fig. 91 Teorema, Geometria F.I.C.	236
Fig. 92 Teorema, Perez y Marin e Paula	237
Fig. 93 Demonstração, Roxo	239
Fig. 94 Teorema, Geometria F.I.C.	240
Fig. 95 Teorema, Geometria F.I.C.	240
Fig. 96 Teorema, Perez y Marin e Paula	241
Fig. 97 Teorema, Legendre	242
Fig. 98 Teorema, Hérigone	243
Fig. 99 Teorema, <i>Elementos</i> de Euclides	244