

5

Análise das vibrações não-lineares

Neste capítulo são estudadas as vibrações não-lineares de uma casca cilíndrica submetida, primeiramente, a uma pressão lateral harmônica na forma do modo linear de vibração ou flambagem, ou seja:

$$p = F \cos(n\theta) \sin(q\xi) \cos(\omega_L t) \quad (5.1)$$

onde F é a magnitude da pressão lateral, ω_L é a frequência da excitação e t , o tempo.

A seguir, são analisadas as vibrações não-lineares de uma casca cilíndrica submetida, simultaneamente, a ação de uma carga axial estática e compressiva, P_0 , e à pressão lateral harmônica definida na equação (5.1).

Finalmente estuda-se a influência de uma força harmônica axial, na forma:

$$P = P_0 + P_1 \cos(\omega_e t) \quad (5.2)$$

onde P_1 é a magnitude do carregamento dinâmico e ω_e , a frequência de excitação, na instabilidade paramétrica e vibrações não-lineares da casca cilíndrica.

5.1.

Casca cilíndrica, simplesmente apoiada, submetida a uma pressão lateral harmônica

Os modelos numéricos, utilizados na obtenção dos resultados deste item, são os já apresentados no capítulo anterior. Apresenta-se a seguir a nomenclatura empregada para identificar cada modelo reduzido:

- 6 GDL – é o modelo com seis graus-de-liberdade que é obtido utilizando a expansão modal para os deslocamentos laterais (4.21);
- 2 POMs e 3 POMs – são os modelos derivados a partir da decomposição de Karhunen-Loève que utilizam, respectivamente, dois e três POMs na equação (4.35) para descrever o campo de deslocamento transversal; e,

- 1 GDL – é o modelo com um grau de liberdade, obtido a partir da relação polinomial entre os modos não-lineares de vibração e o modo linear, equação (4.38).

Neste item são analisadas duas configurações da cascas cilíndricas, uma vazia e outra completamente cheia de fluido, submetidas a uma pressão lateral harmônica distribuída na superfície segundo a equação (5.1). Considera-se, nesta análise, apenas o amortecimento viscoso, β_1 , com $\eta_1 = 0,001$. Os resultados aqui obtidos são resultantes do emprego do método de Newton-Raphson e de técnicas de continuação. Comparam-se as respostas entre os quatro modelos reduzidos apresentado anteriormente.

A pressão hidrodinâmica, P_H , é obtida a partir da determinação do potencial de velocidade de cada modelo reduzido utilizado. Para isso basta substituir o campo de deslocamentos laterais, w , de cada modelo nas equações (3.23) e (3.24), obtendo-se a pressão hidrodinâmica consistente com o modelo. Obtém-se convergência na pressão hidrodinâmica com $\bar{M}=5$ em (3.23).

Os resultados numéricos encontrados para uma casca cilíndrica completamente cheia foram obtidos com a relação entre as densidades da casca e do fluido, ρ_S/ρ_F , de 7,85.

As Figura 5.1 e 5.2 ilustram a variação do máximo deslocamento lateral da casca cilíndrica adimensionalizado com relação à espessura da casca, h , com a frequência de excitação, ω_L , para, respectivamente, uma casca cilíndrica vazia e outra completamente cheia, considerando os quatro modelos reduzidos apresentados. A magnitude da pressão lateral, F , é adimensionalizada em relação à pressão crítica estática (Brush e Almroth, 1975), a saber:

$$F_2 = \frac{F}{F_{CR}}, \quad F_{CR} = \frac{Eh}{R} \left[\frac{[(\pi R/L)^2 + n^2]^2}{n^2} \frac{(h/R)^2}{12(1-\nu^2)} + \frac{(\pi R/L)^4}{n^2 [(\pi R/L)^2 + n^2]^2} \right] \quad (5.3)$$

e a frequência da excitação é adimensionalizada com relação à frequência natural mínima da casca vazia, ω_0 , ou seja, $\Omega = \omega_L/\omega_0$.

Nas Figuras 5.1 e 5.2 as linhas contínuas e tracejadas representam, respectivamente, as soluções estáveis e instáveis da casca, segundo a teoria de Floquet (Nayfeh e Balachandran, 1995). Através destas figuras percebe-se que o comportamento não-linear da casca cilíndrica é com perda de rigidez, ou seja, há um aumento dos deslocamentos laterais com a diminuição do parâmetro adimensional de frequência. As curvas de ressonância seguem, como esperado, a tendência indicada pela relação frequência-amplitude ilustrada nas figuras por uma linha fina e tracejada. Como o parâmetro adimensional de frequência, Ω , é

normalizado em relação à frequência natural da casca vazia, essa relação na Figura 5.1 tem a sua origem em $\Omega = 1,0$. No caso da Figura 5.2, situação em que há um fluido interno à casca, a relação frequência-amplitude para a vibração livre tem origem em, aproximadamente, $\Omega = 0,53$. Essa diminuição no valor do parâmetro Ω é provocada pela massa adicionada do fluido nos termos de inércia da casca cilíndrica, o que provoca uma redução da frequência natural.

Comparando-se os modelos reduzidos das Figuras 5.1 e 5.2, observa-se que, qualitativamente, os modelos 1 GDL, 2 POMs e 3 POMs conseguem descrever o comportamento não-linear da casca cilíndrica com boa qualidade se comparados ao modelo de 6 GDL, em particular para valores de $\Gamma_2 \leq 0,50$.

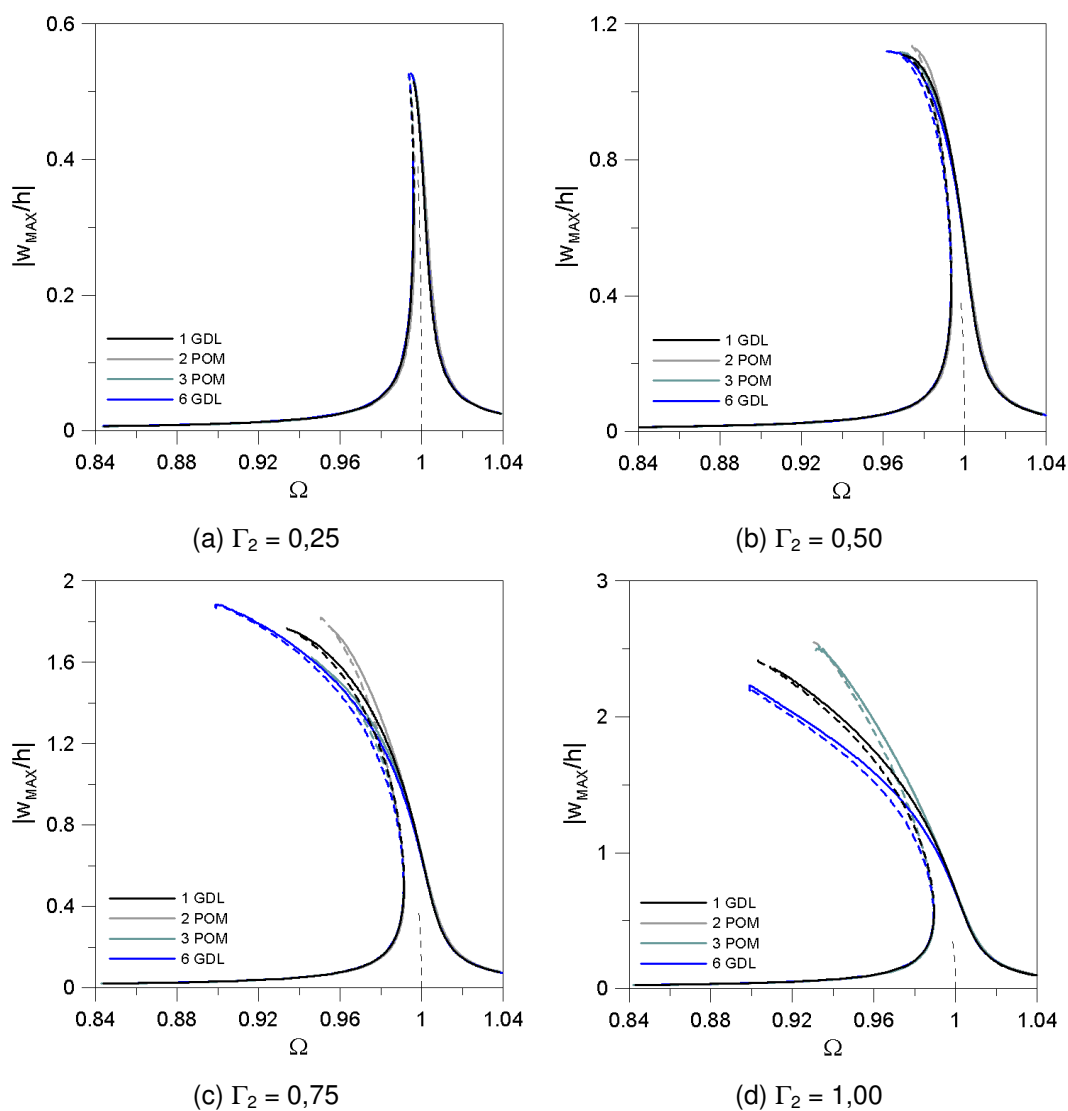


Figura 5.1 – Máximo deslocamento lateral versus frequência de excitação para uma casca vazia.

Diz-se que um sistema dinâmico apresenta um comportamento com maior ou menor perda de rigidez de acordo com a inclinação das curvas de ressonância apresentadas nas Figuras 5.1 e 5.2. Diante disto, observa-se nas Figuras 5.1c e 5.1d que, quando a magnitude da pressão lateral aproxima-se do valor crítico, o modelo com 6 GDL apresenta maior perda da rigidez, isto é, maior não-linearidade que o modelo com 1 GDL que, por sua vez, apresenta maior não-linearidade que os modelos com 2 ou 3 POMs. A mudança desta característica do sistema em função do modelo reduzido não ocorre na casca com o fluido interno, como pode ser observado na Figura 5.2.

Em ambos os casos, observa-se que a não-linearidade da resposta cresce, à medida que a magnitude da pressão, Γ_2 , cresce, seguindo novamente a tendência ditada pela relação frequência-amplitude. Cabe ressaltar que em aplicações práticas, em virtude dos necessários coeficientes de segurança, não se deve esperar valores de Γ_2 próximos de um.

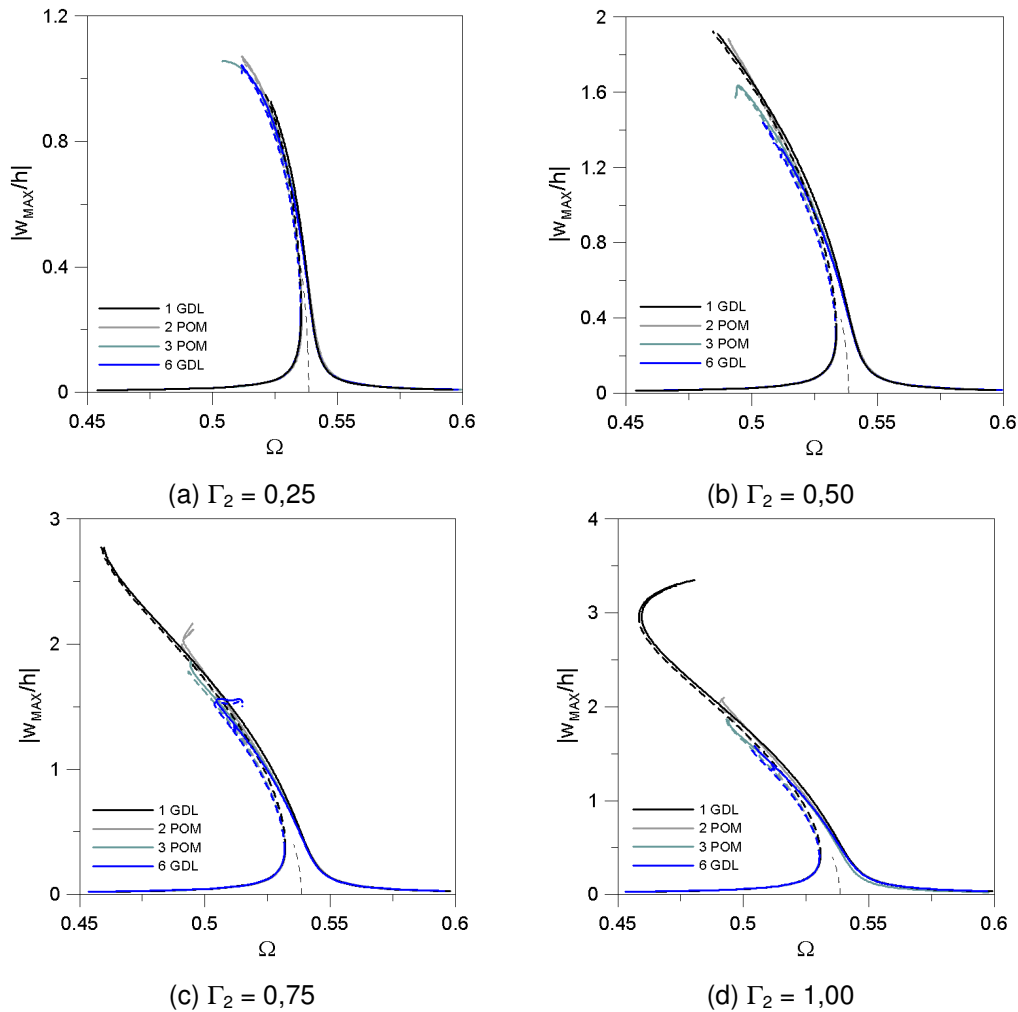


Figura 5.2 – Máximo deslocamento lateral versus frequência de excitação para uma casca completamente cheia.

Cabe ressaltar, diante das Figura 5.1 e 5.2, a importância da presença do fluido interno na magnitude dos deslocamentos laterais. Fica claro que o acréscimo da magnitude da pressão lateral provoca, também, um acréscimo nos deslocamentos laterais. Quando duas cascas cilíndricas, uma vazia e a outra completamente cheia, submetidas à mesma pressão lateral são comparadas, observa-se que, para valores de Γ_2 até 0,50, a massa adicionada pelo fluido é preponderante na resposta da casca e provoca maiores deslocamentos na casca cheia (Figura 5.2a, b) do que na casca vazia (Figura 5.1a, b).

Para valores elevados de Γ_2 , bem próximos do valor limite de 1,0, o máximo deslocamento lateral não segue mais um padrão bem definido. Para $\Gamma_2 = 0,75$, com exceção do modelo com 6 GDL, o máximo deslocamento lateral em uma casca cilíndrica completamente cheia (Figura 5.2c) ainda é superior ao máximo deslocamento lateral da casca vazia (Figura 5.1c). Já para $\Gamma_2 = 1,00$ os deslocamentos máximos laterais registrados para a casca vazia (Figura 5.1d) são superiores aos da casca completamente cheia (Figura 5.2d), sendo a exceção, neste caso, o modelo com 1 GDL. A Tabela 5.1 apresenta os máximos deslocamentos laterais normalizados registrados nas Figuras 5.1 e 5.2.

Tabela 5.1 – Máximo deslocamento lateral registrado nas Figuras 5.1 e 5.2.

Modelo	Máximo ($ w_{MAX}/h $)							
	1 GDL		2 POMs		3 POMs		6 GDL	
	Vazia	cheia	vazia	cheia	Vazia	cheia	vazia	Cheia
$\Gamma_2 = 0,25$	0,50	0,95	0,51	1,06	0,52	1,04	0,52	1,04
$\Gamma_2 = 0,50$	1,10	1,92	1,13	1,88	1,11	1,62	1,11	1,29
$\Gamma_2 = 0,75$	1,74	2,82	1,82	2,11	1,62	1,78	1,88	1,53
$\Gamma_2 = 1,00$	2,41	3,34	2,55	2,10	2,52	1,87	2,20	1,56

5.1.1.

Influência do pré-carregamento axial, Γ_0 .

Em muitas aplicações práticas a casca encontra-se submetida a um pré-carregamento axial estático, Γ_0 . Assim, neste item, procura-se observar a influência dessa carga estática no comportamento da casca cilíndrica vazia e completamente cheia, além da qualidade das respostas obtidas com os quatro modelos reduzidos citados no início deste capítulo.

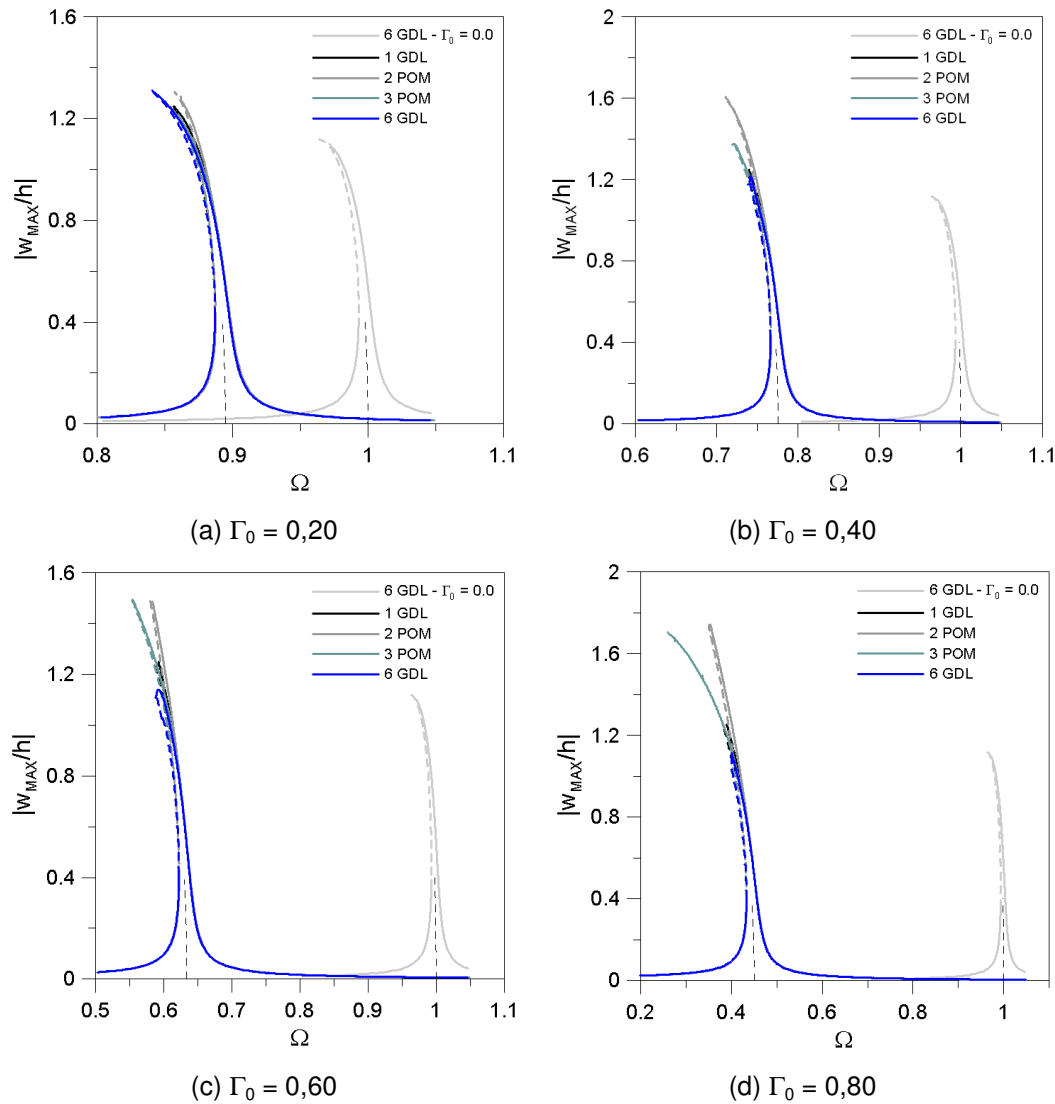


Figura 5.3 – Máximo deslocamento lateral versus freqüência de excitação para uma casca vazia e $\Gamma_2 = 0,50$.

As Figuras 5.3 e 5.4 apresentam a variação do máximo deslocamento lateral com o parâmetro de freqüência de excitação, Ω , para valores crescentes do pré-carregamento estático, Γ_0 . Para efeito de comparação, apresenta-se, nessas figuras, a variação do máximo deslocamento lateral do modelo com 6 GDL e sem pré-carregamento estático, permitindo que se observe a influência da carga estática na freqüência natural e no comportamento não-linear da casca cilíndrica.

As linhas tracejadas nessas figuras ilustram o início das curvas que relacionam a freqüência com a amplitude de vibração para a vibração livre da casca cilíndrica, sendo que o valor da abscissa é a freqüência natural da casca carregada. A partir das Figura 5.3 e 5.4, observa-se que o acréscimo do

parâmetro de pré-carregamento estático provoca um decréscimo na frequência natural da casca tanto vazia quanto completamente cheia.

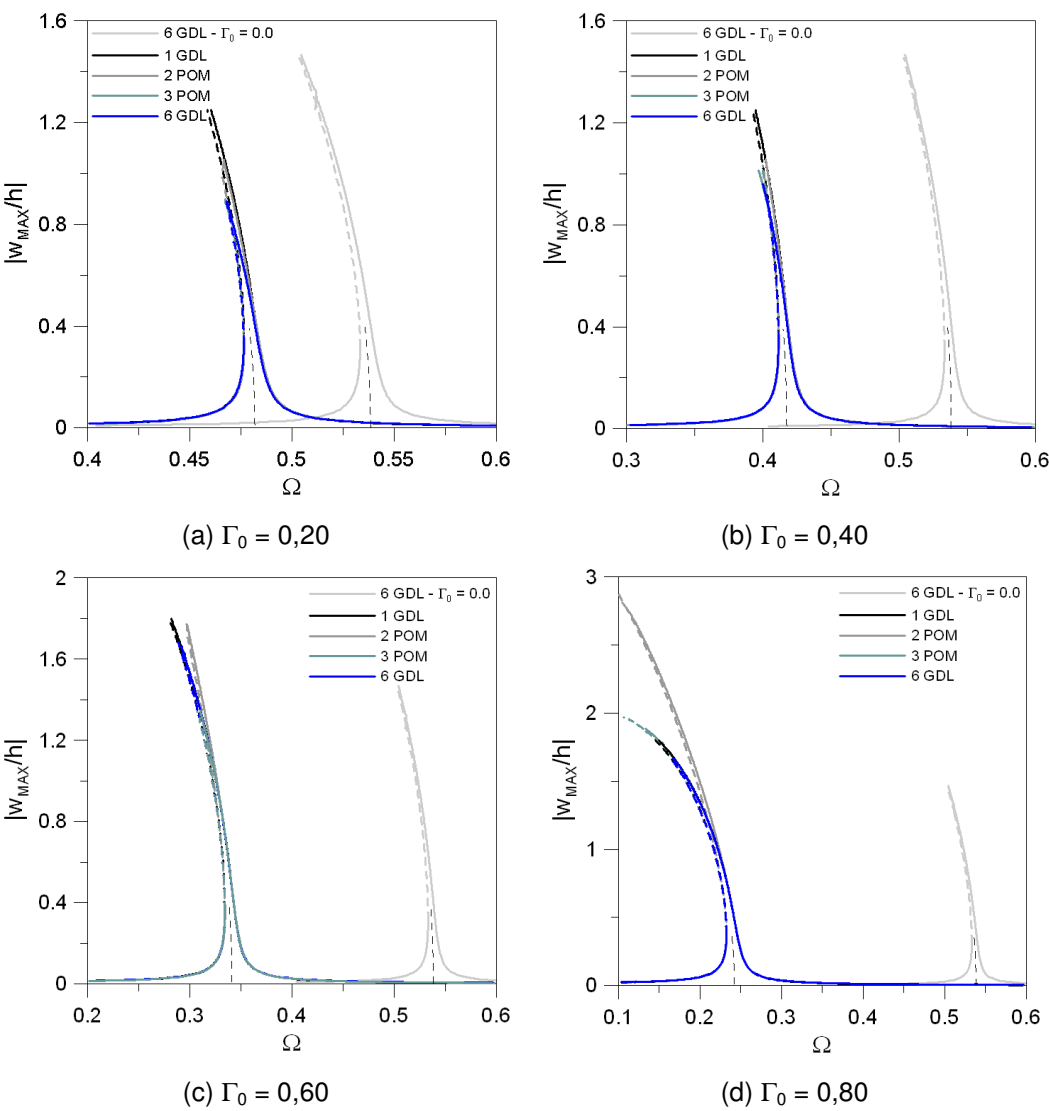


Figura 5.4 – Máximo deslocamento lateral versus frequência de excitação para uma casca completamente cheia e $\Gamma_2 = 0,50$.

Tabela 5.2 – Frequência natural da casca cilíndrica variando o pré-carregamento estático, Γ_0 , para uma casca cilíndrica vazia e outra completamente cheia.

Γ_0	Vazia		Cheia	
	Ω	Varição Rel. (%)	Ω	Varição Rel. (%)
0,00	1,00	0,0	0,54	0,0
0,20	0,89	11,0	0,45	16,0
0,40	0,77	23,0	0,36	33,0
0,60	0,63	37,0	0,32	41,0
0,80	0,45	55,0	0,23	57,0

A Tabela 5.2 apresenta a variação do valor da frequência natural mínima com o parâmetro de pré-carregamento estático. Nota-se que o parâmetro Γ_0 provoca um decréscimo relativo da frequência natural, ligeiramente superior na casca cilíndrica completamente cheia que na mesma casca vazia.

O máximo deslocamento lateral na casca cilíndrica vazia é, em média, 1,2 vezes a espessura da casca, independentemente do nível de pré-carregamento estático, Figura 5.3, excetuando-se os valores máximos registrados pelos modelos reduzidos com 2 POMs e 3 POMs que mostram um acréscimo no valor de pico da curva de ressonância com o acréscimo do parâmetro de carga Γ_0 .

Já para a casca cilíndrica completamente cheia, o máximo deslocamento lateral cresce com o acréscimo de pré-carregamento estático, Figura 5.4, sendo que todos os modelos reduzidos apresentam boa concordância entre eles, exceto o modelo com 2 POMs que registra deslocamentos máximos superiores aos demais quando $\Gamma_0 = 0,80$, Figura 5.4d, valor próximo à carga crítica estática ($\Gamma_{0CR} = 1,0$).

Apesar de pequenas diferenças encontradas nas respostas dos modelos reduzidos para o máximo deslocamento lateral, Figura 5.3 e 5.4, todos eles foram capazes de descrever o mesmo tipo de comportamento para a casca cilíndrica submetida a uma pressão lateral, captando adequadamente as influências do fluido interno e do pré-carregamento estático que atuam na casca.

5.1.2.

Modelo reduzido *versus* Método dos elementos finitos

A Figura 5.5 apresenta a comparação entre a curva de ressonância obtida com o modelo reduzido com 6 GDL e com o modelo em elementos finitos do Abaqus®. Neste caso mostra-se a variação do máximo deslocamento lateral de um ponto no centro da casca cilíndrica, $(x, \theta) = (L/2; 0)$, em função do parâmetro Ω .

Conforme observado no capítulo anterior, existem diferenças na teoria utilizada para descrever o campo de deformações de ambas as formulações, bem como diferenças numéricas na formulação dos modelos como, por exemplo, o amortecimento. Mas, diante dessas diferenças, observa-se que os resultados obtidos por elementos finitos apresentam o comportamento não-linear esperado para a casca cilíndrica.

O que se deve destacar é a dificuldade de se construir, através do método dos elementos finitos, uma curva de ressonância como a apresentada na Figura 5.5. Cada ponto dessa figura representa uma análise completa com o Abaqus.

O procedimento adotado consiste em aplicar uma pressão lateral com a forma definida em (5.1), fixando-se um valor para a magnitude da pressão lateral e variando-se para cada ponto da curva o valor do parâmetro de frequência. Em seguida, gera-se a resposta no tempo do modelo com um tempo de integração capaz de garantir que a resposta nos estágios finais da integração esteja no regime permanente. Após isto, observa-se o máximo deslocamento lateral obtido em um determinado ponto da casca cilíndrica.

A dificuldade de se utilizar o método dos elementos finitos está justamente no esforço computacional envolvido na obtenção de cada ponto da Figura 5.5 que necessita de um passo de integração pequeno e um tempo máximo de análise muito grande (se comparado com o passo de integração) para garantir que a resposta do sistema esteja no regime permanente. Além disto, a obtenção dessas respostas deve ser feita pela integração direta das equações de movimento, que, para uma malha suficientemente boa para a análise de cascas pelo método dos elementos finitos, resulta em um número elevado de equações diferenciais (24876, no presente exemplo).

Adicionalmente, torna-se praticamente impossível se obter, usando os programas de elementos finitos disponíveis, o ramo superior da curva de ressonância na região onde há multiplicidade de soluções, já que a resposta estável de grande amplitude está associada a uma pequena bacia de atração. Para se obter a resposta permanente seria necessário impor condições iniciais relativas a cada grau de liberdade – duas por cada grau de liberdade - que se encontrem no interior desta bacia de atração. O número de coordenadas do ponto fixo de uma solução periódica é igual a duas vezes o número de graus de liberdade. Como ilustração, mostra-se na Figura 5.6 as bacias de atração das duas soluções estáveis para $\Omega = 0,92$ e $\Omega = 0,96$, usando-se o modelo com 1 GDL. Verifica-se que a bacia relativa à solução de grande amplitude é bem menor que a bacia da solução de pequena amplitude e que, para se obter esta solução, necessita-se de um conjunto de condições iniciais não-homogêneas. Finalmente, os programas de elementos finitos disponíveis não permitem a obtenção do ramo instável da curva de ressonância.

No caso dos modelos reduzidos, além do número de coordenadas do ponto fixo ser bastante pequeno, se pode fazer o uso eficiente de algoritmos de continuação para a obtenção de diagramas de bifurcação para se obter todos os

ramos da curva de ressonância, inclusive os instáveis (Seydel, 1988; Nayfeh e Balachandran, 1995; Del Prado, 2001).

Diante disto, justifica-se o estudo de modelos reduzidos de dimensão reduzida que, com um esforço computacional menor, é capaz de descrever com precisão o comportamento dinâmico não-linear da casca cilíndrica.

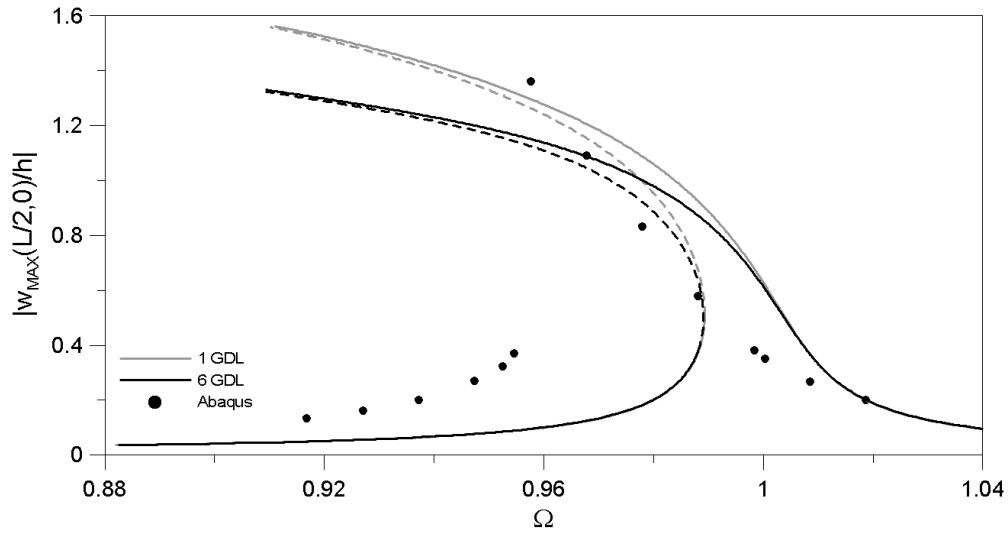


Figura 5.5 – Comparação entre os modelos de 1 GDL, 6 GDL e os resultados do Abaqus para o deslocamento lateral do ponto de coordenada $(x, \theta) = (L/2; 0)$ de uma casca cilíndrica vazia. $\Gamma_2 = 1,0$.

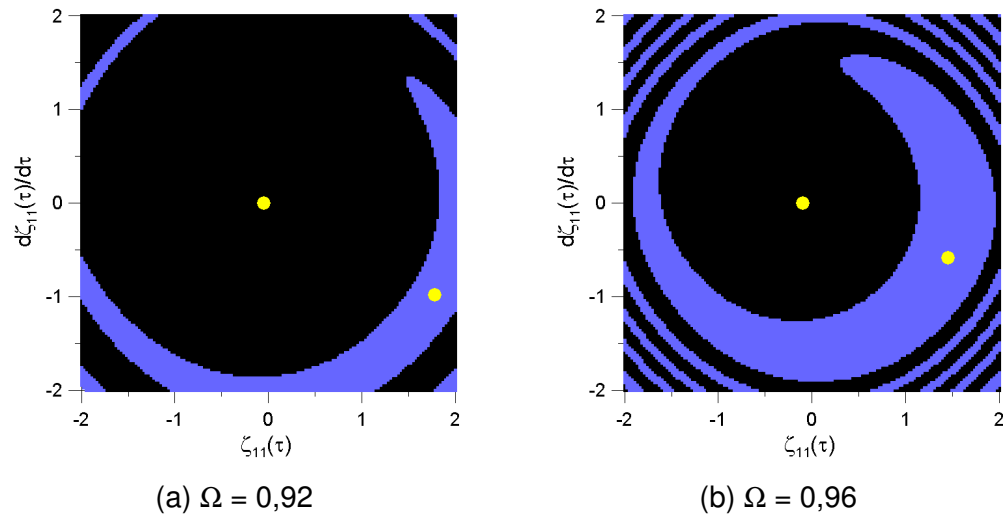


Figura 5.6 – Bacia de atração para a casca cilíndrica vazia. ($\Gamma_2 = 1,00$). Modelo com 1 GDL. ■ - solução de pequena amplitude. ■ - solução de grande amplitude,

5.2.

Casca cilíndrica, simplesmente apoiada, submetida a uma carga axial harmônica

Neste item estuda-se uma casca cilíndrica submetida a uma carga axial harmônica, conforme descrita pela equação (5.3), tanto para uma casca cilíndrica vazia quanto para uma casca completamente cheia de fluido.

Para o estudo da estabilidade paramétrica e posterior escape do vale pré-flambagem (*snap-through buckling*) de cascas cilíndricas, submetidas a um carregamento axial, é necessário o conhecimento prévio do caminho pós-crítico da estrutura sob carga axial. A partir do conhecimento do trecho inicial instável, é possível conhecer a amplitude máxima segura para as vibrações da casca cilíndrica em um determinado nível de pré-carregamento estático.

Em função do caminho pós-crítico da casca cilíndrica, algumas modificações nos modelos reduzidos são necessárias para a melhoria da qualidade dos resultados apresentados daqui por diante. O modelo com 1 GDL, antes definido pela equação (4.38), passa a ser definido pela equação (4.34). Essa substituição fornece resultados mais precisos se comparados com o modelo reduzido de 6 GDL. Isto se explica pelo fato do modelo (4.34) levar em conta os termos de energia potencial da carga axial que têm papel relevante na energia total e no comportamento não-linear da casca, como mostra Santee (1988).

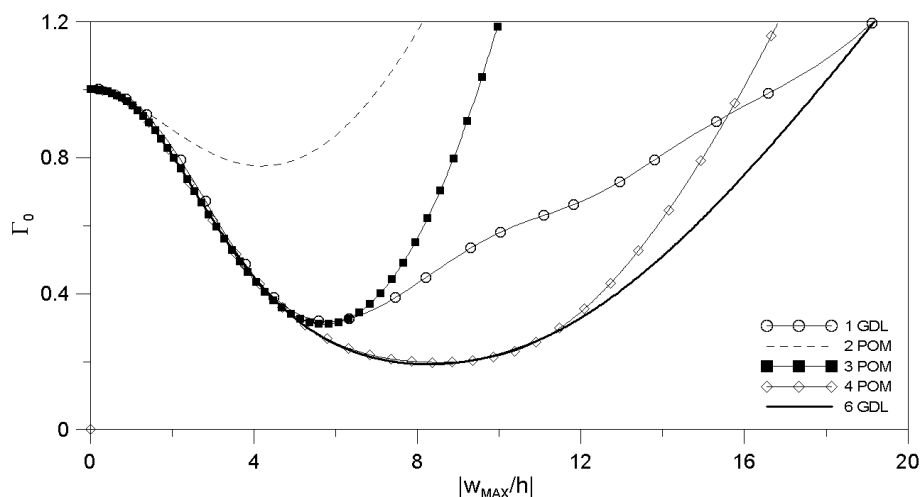


Figura 5.7 – Caminho pós-crítico da casca cilíndrica variando a expansão modal para os deslocamentos laterais.

Já os modelos reduzidos derivados a partir da decomposição de Karhunen-Loève são escolhidos a partir dos POMs obtidos na análise dinâmica não-linear, Tabela 4.2, pois os modelos gerados com os POMs da análise

estática não-linear, Tabela 4.1, não conseguem capturar a variação temporal dos modos não-lineares da casca, sendo incapazes de descrever o comportamento dinâmico não-linear, e apresentam erros junto ao ponto de bifurcação.

Assim a Figura 5.7 ilustra os caminhos pós-críticos derivados a partir dos modelos reduzidos com os POMs da Tabela 4.2. Nota-se, nessa figura, que o modelo com 2 POMs não consegue descrever com perfeição o caminho pós-crítico da casca cilíndrica quando o comparamos com o modelo de 6 GDL, indicando que o número de POMs deve ser aumentado para que se capturem os modos não-lineares adequados do sistema. Os modelos com 1 GDL e 4 POM descrevem com precisão todo o ramo instável do caminho pós-crítico, permitindo um estudo preciso da instabilidade dinâmica.

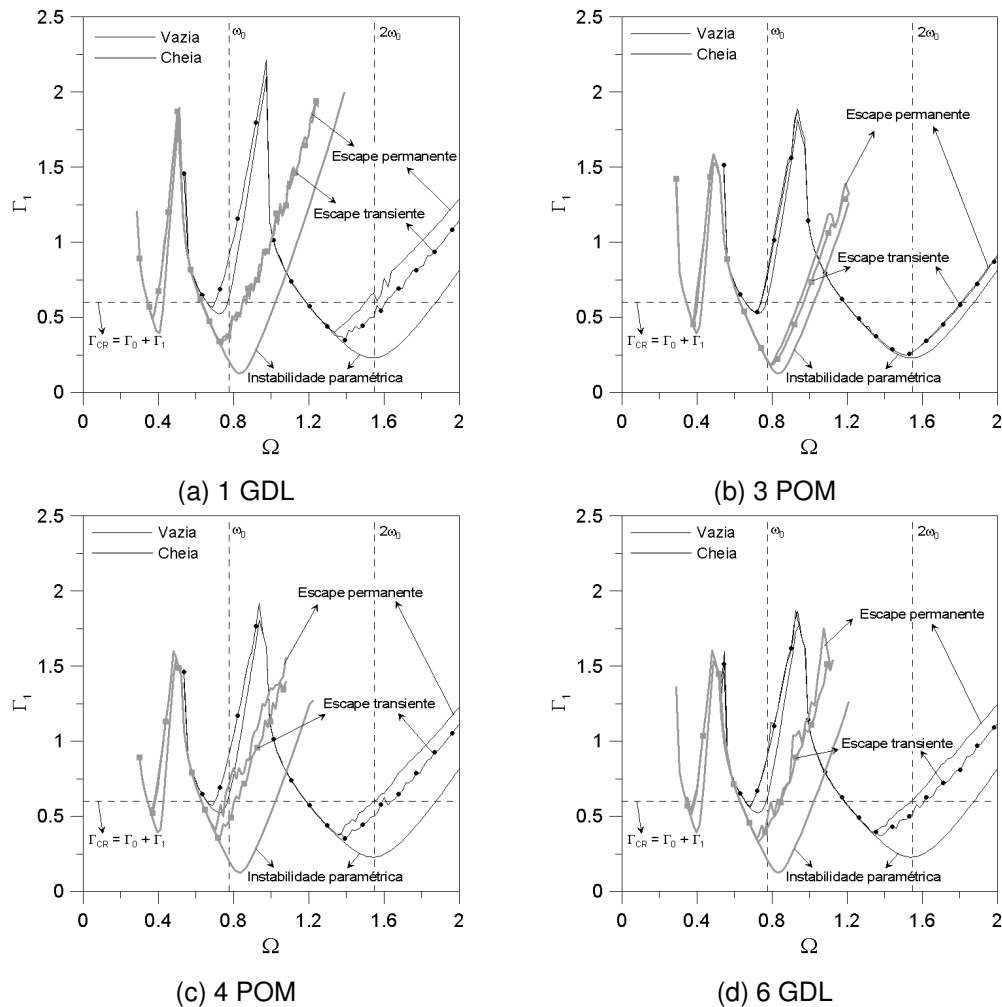


Figura 5.8 – Fronteiras de instabilidade paramétrica e de escape para uma casca cilíndrica vazia e outra completamente cheia. Carregamento brusco. $\Gamma_0 = 0,40$.

($\Gamma_0 > \Gamma_{\text{MIN}} - 6 \text{ GDL} = 0,20$).

Para a casca sem carregamento axial estático ou sob uma carga estática inferior ao mínimo pós-crítico ocorre apenas o fenômeno de instabilidade paramétrica. A configuração axissimétrica da casca sob carga axial harmônica (modo de arfagem) torna-se instável, dando origem a um movimento vibratório caracterizado por um certo número de ondas circunferenciais e axiais. Considerando uma formulação linearizada, o problema de instabilidade paramétrica é descrito por um sistema de equações de Mathieu (Bolotin, 1964) e a amplitude da solução pós-crítica cresce exponencialmente com o tempo. Considerando-se os termos não-lineares, após um crescimento exponencial inicial, a solução pós-crítica converge para uma solução periódica.

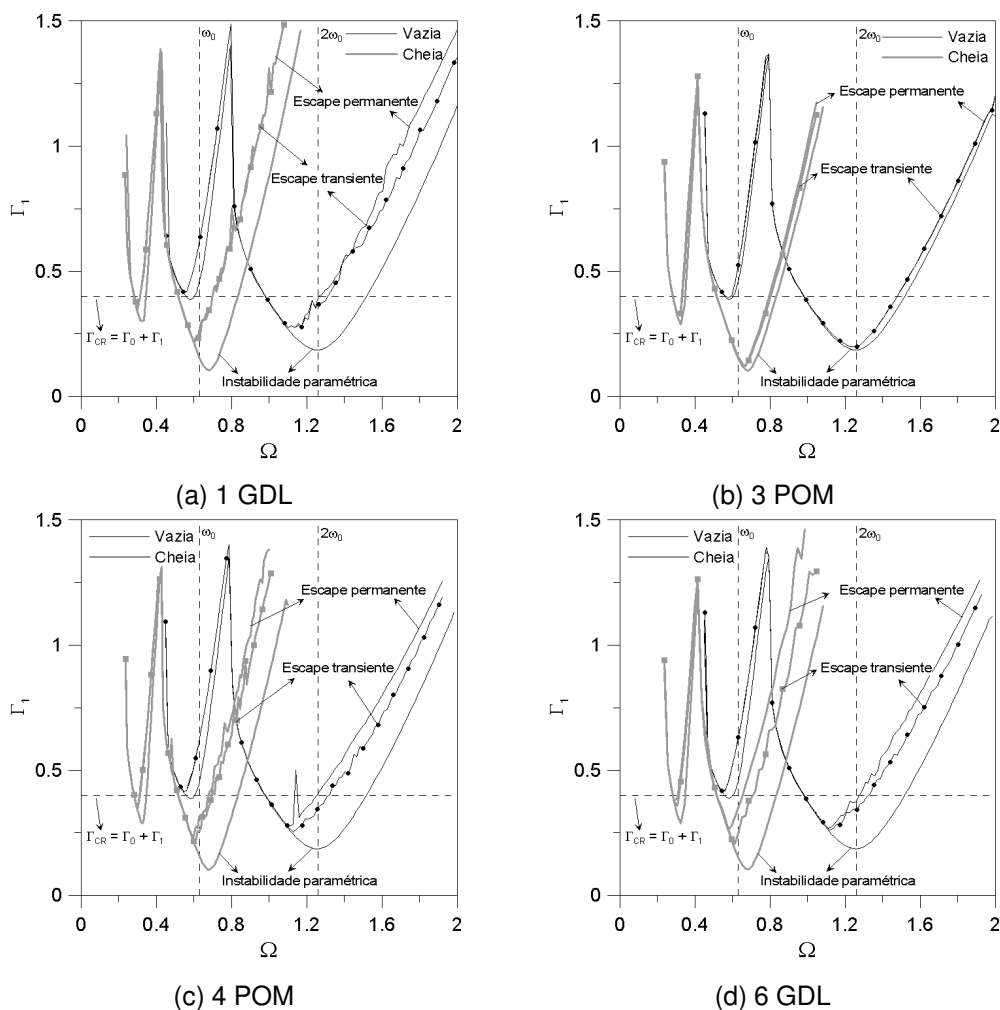


Figura 5.9 – Fronteiras de instabilidade paramétrica e de escape para uma casca cilíndrica vazia e outra completamente cheia. Carregamento brusco. $\Gamma_0 = 0,60$. ($\Gamma_0 > \Gamma_{\text{MIN}} - 6 \text{ GDL} = 0,20$).

Para um pré-carregamento estático entre a carga crítica e o mínimo pós-crítico ($\Gamma_{\text{MIN}} < \Gamma_1 < \Gamma_{\text{CR}}$), além da instabilidade paramétrica, pode existir

instabilidade dinâmica caracterizada por escape do vale potencial pré-flambagem (*snap-through buckling*). O escape pode ocorrer somente durante o regime transiente, estando a solução permanente no interior do vale pré-flambagem – este fenômeno denomina-se escape transiente. Caso a solução permanente se encontre em um vale pós-crítico ou a casca exiba movimentos de grande amplitude envolvendo mais de um vale potencial (*cross-well motions*), tem-se o chamado escape permanente.

As Figuras 5.8-5.10 ilustram as fronteiras de instabilidade paramétrica e de escape, permanente e transiente, para a casca cilíndrica, vazia e completamente cheia. Varia-se, nessas figuras, o parâmetro de pré-carregamento estático, Γ_0 , e o modelo reduzido empregado. As curvas identificadas como de instabilidade paramétrica, escape transiente e escape permanente, são referentes a uma mesma configuração inicial de repouso. Para se obter uma solução não-trivial considera-se para cada grau de liberdade, em cada modelo, um deslocamento e uma velocidade inicial de 1×10^{-4} . Simula-se assim uma carga axial aplicada bruscamente à estrutura. Os coeficientes de amortecimento utilizados para obtenção destes resultados foram: $\eta_1 = 0,0008$ (casca vazia) e $\eta_1 = 0,003$ (casca completamente cheia) e $\eta_2 = 0,0001$ (Pellicano e Amabili, 2003).

Nas Figuras 5.8-5.10 as retas horizontais tracejadas representam o carregamento crítico estático, $\Gamma_{CR} = \Gamma_0 + \Gamma_1$, enquanto que as retas verticais e tracejadas representam a menor frequência natural da casca vazia, que está associado ao vale da região secundária de instabilidade paramétrica, e o dobro da menor frequência natural, que é associado ao vale da região principal de instabilidade paramétrica. Os valores de ω_0 em função de Γ_0 encontram-se na Tabela 5.2.

Sabe-se que a massa do fluido adicionada aos termos de inércia da casca cilíndrica provoca uma redução da frequência natural. Essa redução da frequência natural provoca um deslocamento para a esquerda das fronteiras de instabilidade paramétrica e de escape, além de um decréscimo no valor das correspondentes cargas críticas.

A região abaixo da fronteira de instabilidade paramétrica corresponde à região estável do modo de arfagem descrito pelo campo de deslocamentos axissimétrico que, na análise dinâmica, é descrito por uma solução trivial das equações de movimento (perturbação nula). Na região entre a fronteira de instabilidade paramétrica e a de escape transiente, o carregamento aplicado é capaz de levar a casca cilíndrica a uma nova configuração de equilíbrio, que

apresenta vibrações periódicas e a amplitude dessas vibrações são inferiores aos limites da fronteira do vale pré-flambagem. Os limites da região do vale pré-flambagem são estabelecidos a partir do caminho pós-crítico da casca cilíndrica, Figura 5.7, que, para cada modelo reduzido e para cada valor de pré-carregamento estático, apresenta um valor para a máxima amplitude de vibração.

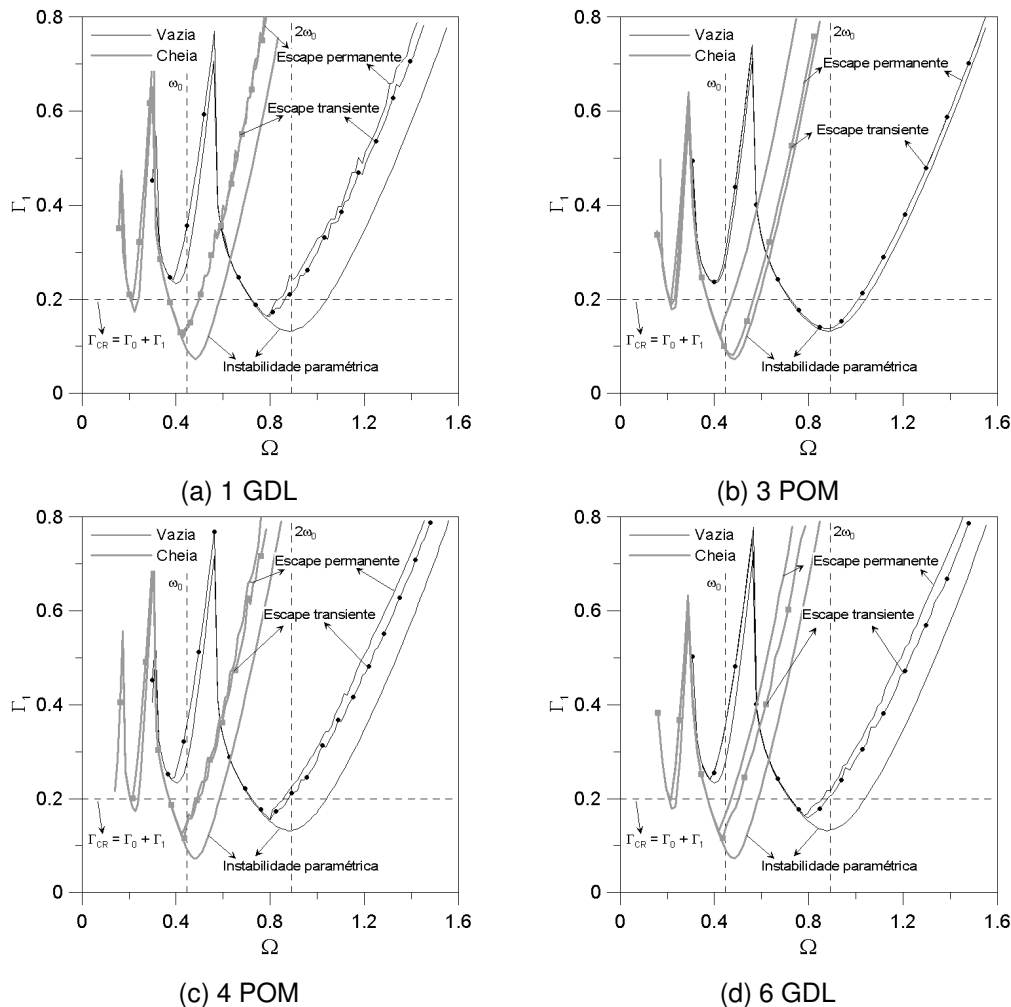


Figura 5.10 – Fronteiras de instabilidade paramétrica e de escape para uma casca cilíndrica vazia e outra completamente cheia. Carregamento brusco. $\Gamma_0 = 0,80$. ($\Gamma_0 > \Gamma_{\text{MIN}} - 6 \text{ GDL} = 0,20$).

O que diferencia a curva de escape transiente da curva de escape permanente é que a curva de escape transiente garante que não haverá vibrações maiores que os limites do vale pré-flambagem tanto no regime transiente quanto no permanente. Enquanto que na região entre as curvas de escape transiente e as de escape permanente, apenas as amplitudes de vibração no regime permanente serão menores que os limites do vale pré-

flambagem. Isto é, ocorre o escape do vale potencial pré-flambagem durante a resposta transiente.

A região acima da curva de escape permanente indica que a resposta da casca cilíndrica encontra-se fora do vale pré-flambagem no regime permanente.

As Figuras 5.11 e 5.12 mostram para, respectivamente, uma casca cilíndrica vazia e uma completamente cheia a resposta no tempo e o respectivo plano de fase considerando o modelo reduzido com 6 GDL. Essas figuras exemplificam como são definidas as regiões das fronteiras de instabilidade paramétrica e de escape, Figuras 5.8-5.10.

As Figuras 5.11 e 5.12 foram obtidas fixando-se o parâmetro de pré-carregamento estático, Γ_0 , em 0,40 e o valor do parâmetro da frequência de excitação, Ω , em 1,60 para a casca vazia e 0,92 para a casca completamente cheia, em seguida, variou-se o parâmetro da amplitude da excitação, Γ_1 . No plano de fase de cada figura as retas verticais tracejadas representam o valor máximo que a amplitude de vibração pode atingir sem que haja escape do vale potencial pré-flambagem e os pontos destacados são os pontos fixos do mapa de Poincaré da solução permanente.

Nas Figuras 5.11a e 5.12a observa-se que, após a perturbação inicial (1×10^{-4}), a resposta converge para a solução trivial, indicando que o modo de arfagem é estável.

Já as Figuras 5.11b, c e 5.12b, c ilustram uma resposta dinâmica característica da região entre a fronteira de instabilidade paramétrica e de escape transiente. Nota-se, nessas figuras, que, após a perturbação inicial (1×10^{-4}), o modo de arfagem se torna instável e a resposta converge para uma solução periódica de período $2T$, como mostram os pontos fixos do mapa de Poincaré nos planos de fase. Deve-se destacar que as respostas ilustradas nas Figuras 5.11b e 5.12b, tanto no regime transiente quanto no permanente permanecem dentro dos limites máximos definidos pelas retas verticais tracejadas. Já nas Figuras 5.11c e 5.12c as amplitudes de vibração no regime transiente ultrapassam esses limites máximos, indicando que houve um escape transiente.

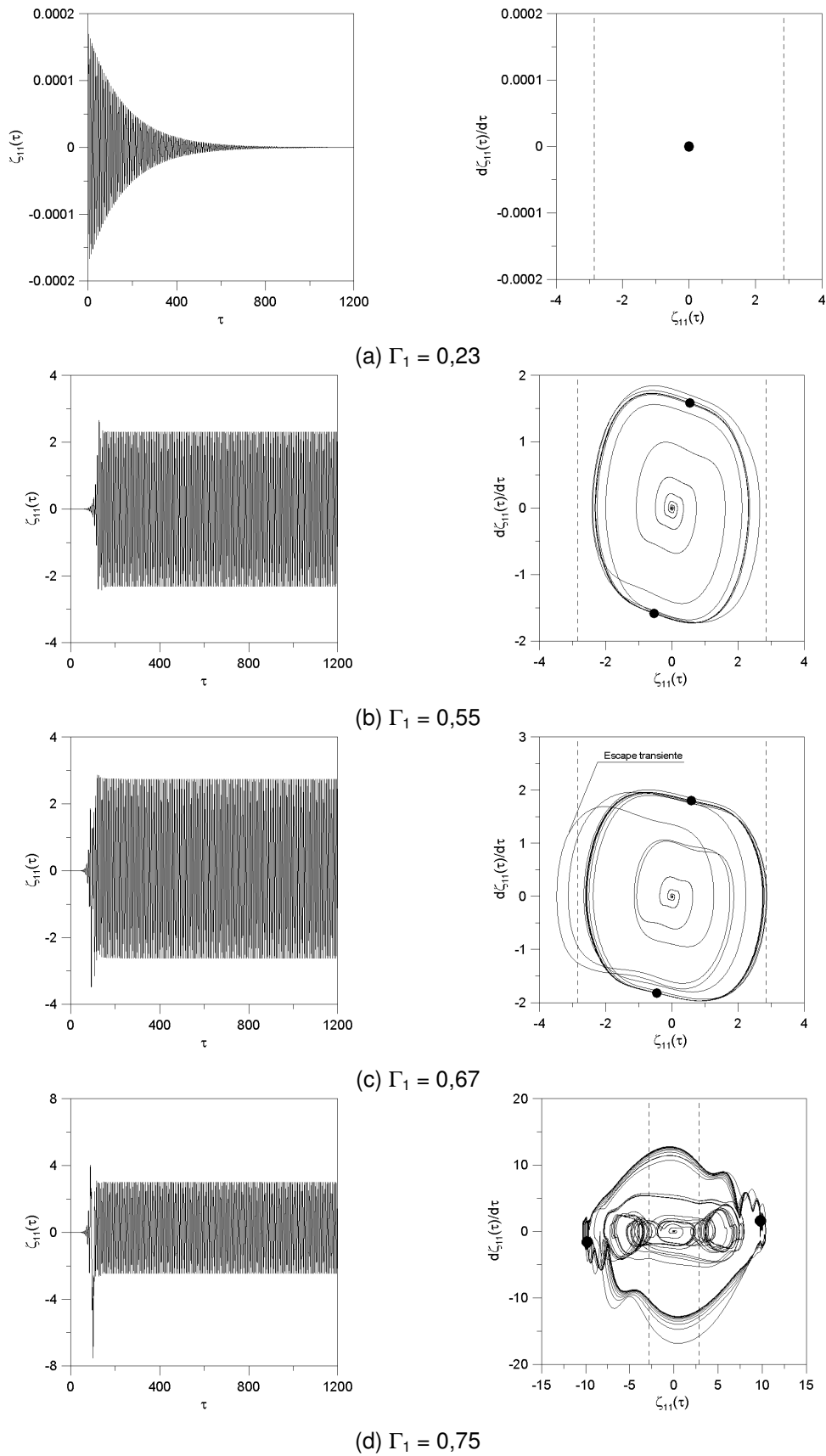


Figura 5.11 – Respostas no tempo e planos de fase para uma casca cilíndrica vazia. Modelo reduzido de 6 GDL. $\Gamma_0 = 0,40$ e $\Omega = 1,60$. • - pontos fixos do mapa de Poincaré da resposta permanente.

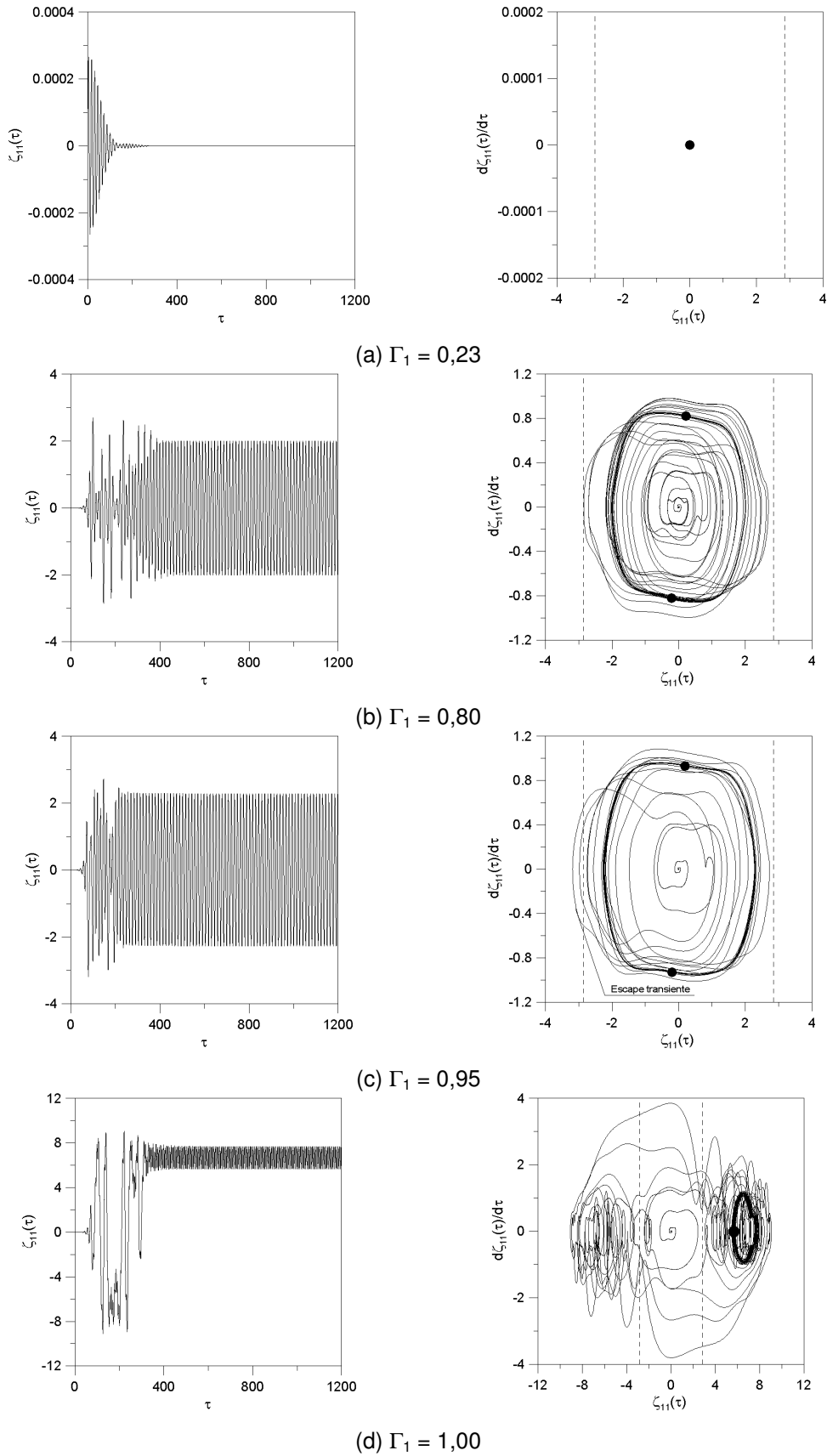


Figura 5.12 – Respostas no tempo e planos de fase para uma casca cilíndrica completamente cheia. Modelo reduzido de 6 GDL. $\Gamma_0 = 0,40$ e $\Omega = 0,92$. • - pontos fixos do mapa de Poincaré da resposta permanente.

Finalmente, as Figuras 5.11d e 5.12d ilustram a resposta dinâmica da casca cilíndrica para um carregamento axial além da fronteira de escape permanente. Nessas figuras, observa-se que as amplitudes de vibração tanto no regime transiente quanto no permanente são superiores ao limite máximo definido pela fronteira do vale potencial pré-flambagem.

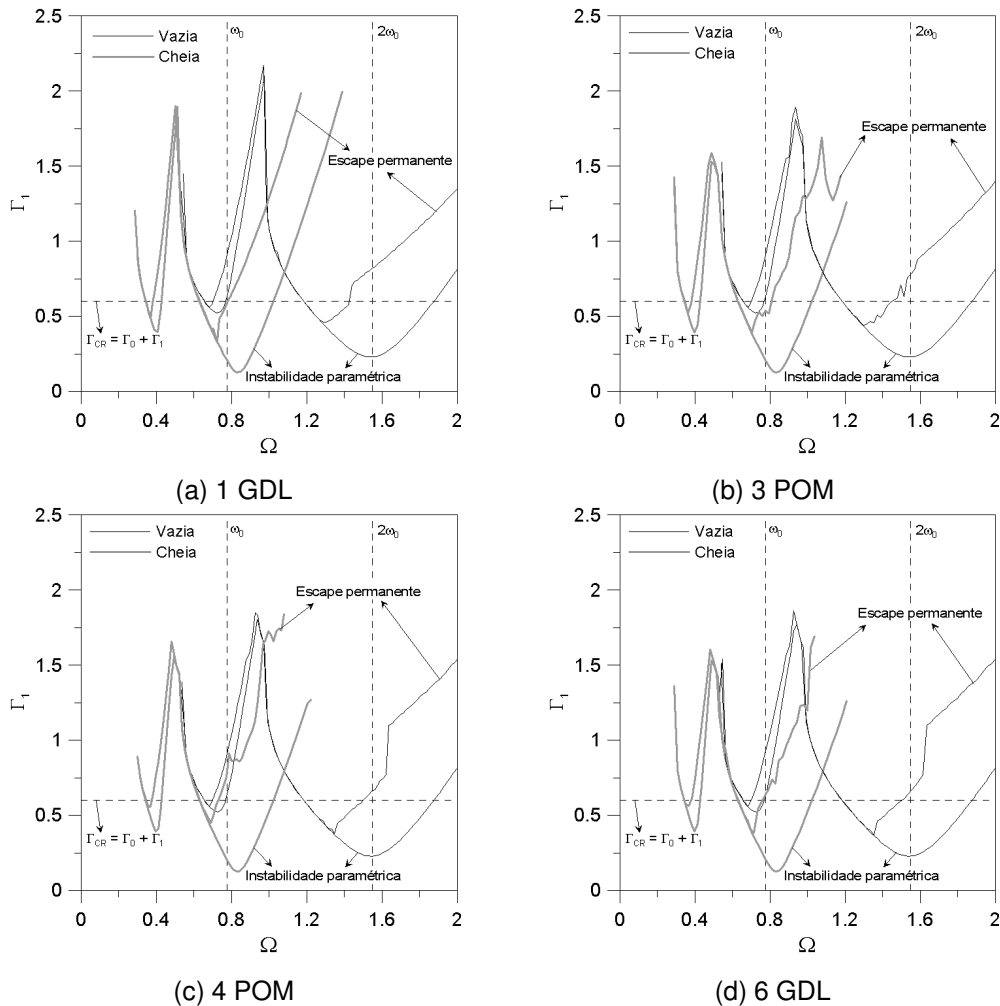


Figura 5.13 – Fronteiras de instabilidade paramétrica e de escape para uma casca cilíndrica vazia e outra completamente cheia. Carregamento gradual. $\Gamma_0 = 0,40$. ($\Gamma_0 > \Gamma_{\text{MIN}} - 6 \text{ GDL} = 0,20$).

A Figura 5.13 ilustra a fronteira de escape permanente para uma força aplicada gradualmente à casca cilíndrica. Ao se comparar os resultados dessa figura com os apresentados na Figura 5.8, observa-se que o escape permanente para um carregamento aplicado gradualmente ocorre para um carregamento superior ao de uma carga aplicada bruscamente, como pode ser observado na Figura 5.14.

Outra característica das fronteiras de escape que deve ser destacada é a sua possível fractalidade, como ilustrado nas Figuras 5.8-5.10. Essa característica explica a obtenção, em alguns casos, de uma fronteira de escape de forma irregular.

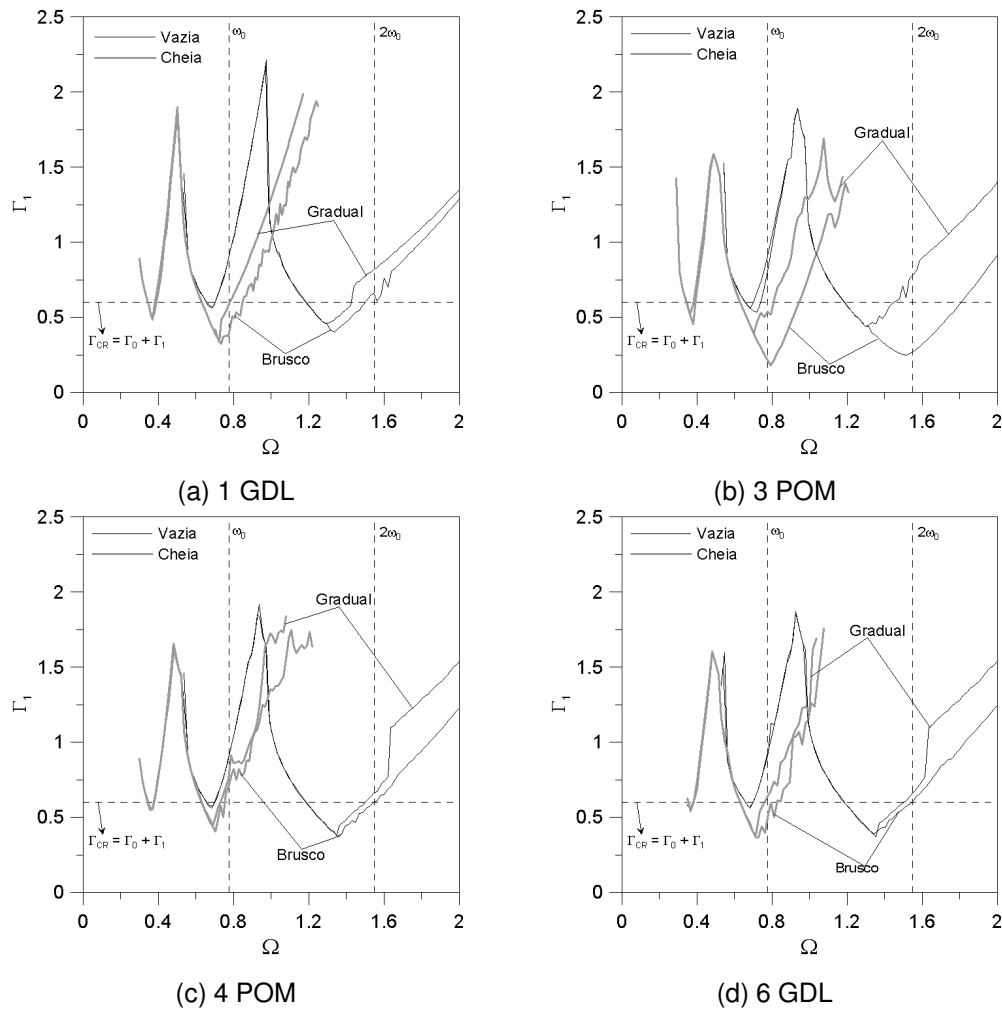


Figura 5.14 – Fronteiras de escape permanente para uma casca cilíndrica vazia e outra completamente cheia. Comparação entre um carregamento gradual e um carregamento brusco. $\Gamma_0 = 0,40$. ($\Gamma_0 > \Gamma_{\text{MIN}} - 6 \text{ GDL} = 0,20$).

A topologia da fronteira é obtida discretizando-se o plano (Ω, Γ_1) em diversas células e aplicando a técnica de mapeamento celular (Hsu, 1980a, b; Del Prado, 2001). Para isto, tomam-se os parâmetros relativos ao centro de cada célula como carregamento aplicado e estuda-se a evolução da resposta após uma pequena perturbação de 1×10^{-4} .

As Figura 5.15 e 5.16 ilustram a fractalidade das fronteiras de escape permanente para, respectivamente, uma casca cilíndrica vazia e uma

completamente cheia. Nessas figuras a região branca indica que não há escape permanente, enquanto que a região preta corresponde ao escape.

Observa-se, a partir das Figura 5.15 e 5.16, que os modelos reduzidos com 1 GDL e com 3 POMs, tanto para a casca cilíndrica vazia quanto para a completamente cheia, levam a uma fronteira de escape suave.

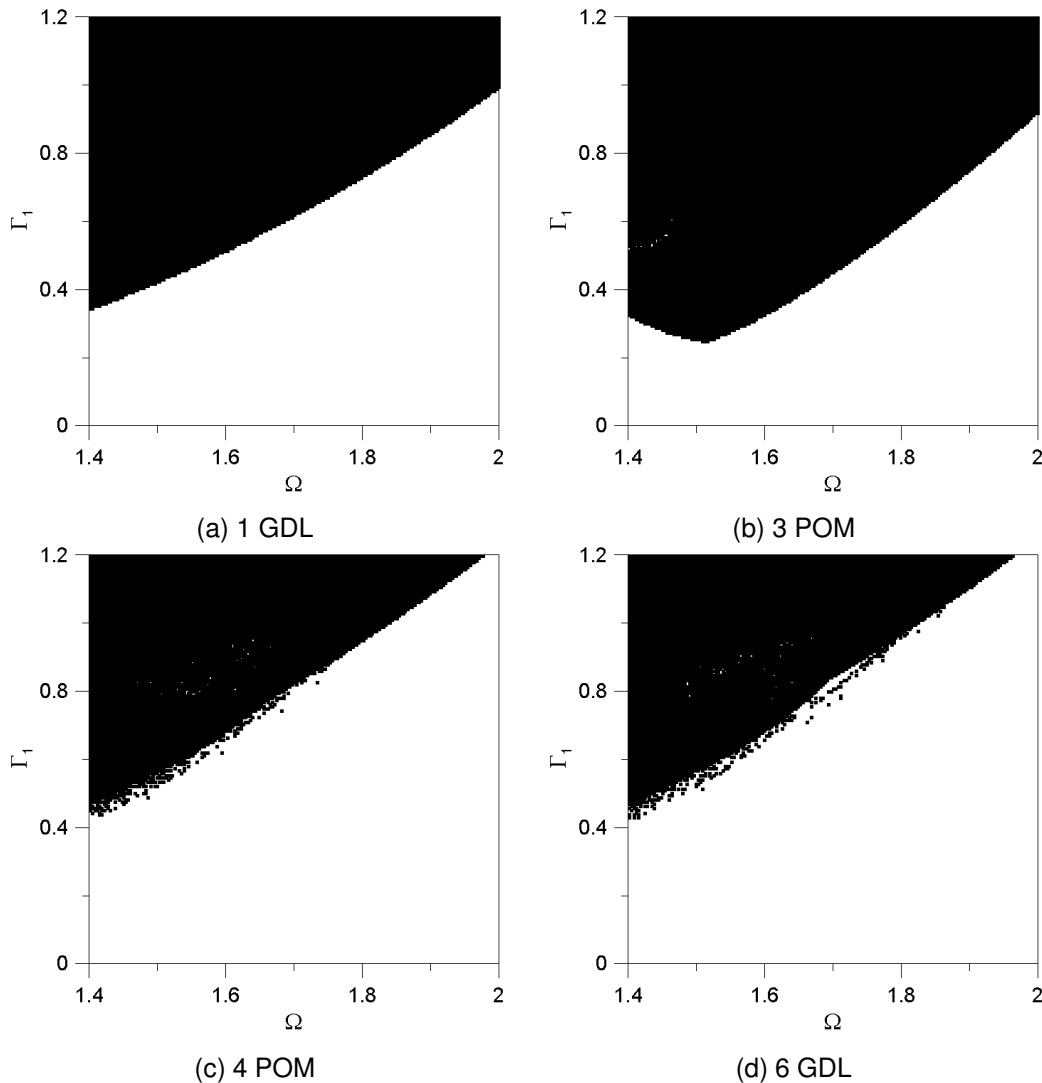


Figura 5.15 – Fractalidade das fronteiras de escape permanente de uma casca cilíndrica vazia e $\Gamma_0 = 0,40$. Carregamento brusco.

Já para os modelos com 4 POMs e 6 GDL observa-se uma maior fractalidade, em particular para a casca cilíndrica completamente cheia, Figuras 5.16c e d, respectivamente.

As Figuras 5.17 e 5.18 ilustram os diagramas de bifurcação para, respectivamente, uma casca cilíndrica vazia e uma completamente cheia. Esses diagramas apresentam a variação da amplitude de vibração do modo

fundamental $\zeta_{11}(\tau)$, para os modelos com 1 GDL e 6 GDL, e do modo $A_1(\tau)$, para os modelos reduzidos a partir da expansão de Karhunen-Loève.

Nas Figuras 5.17 e 5.18 o parâmetro de controle é a amplitude da excitação harmônica, Γ_1 . O parâmetro de pré-carregamento estático, Γ_0 , é fixado em 0,40 e os valores da frequência de excitação, Ω , são 1,20, 1,50 e 1,80 para a casca cilíndrica vazia e 0,60, 0,82 e 0,90, para a casca completamente cheia, valores associados à região principal de instabilidade paramétrica.

A partir desses diagramas, que foram obtidos utilizando-se o método de Newton-Raphson com técnicas de continuação, é possível conhecer evolução da solução permanente da casca cilíndrica variando-se um determinado parâmetro de controle, e as bifurcações associadas às fronteiras de instabilidade paramétrica e escape.

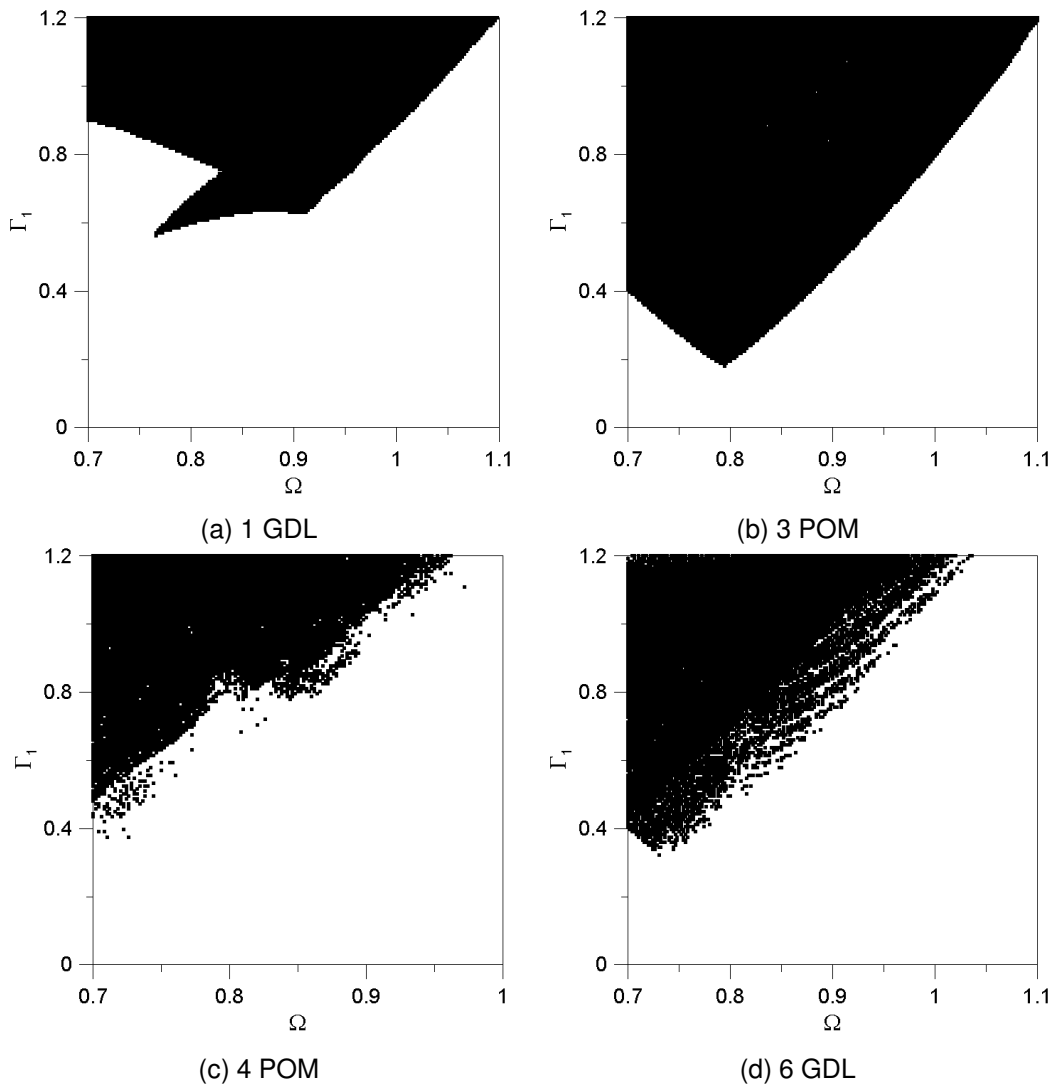


Figura 5.16 – Fractalidade das fronteiras de escape permanente de uma casca cilíndrica completamente cheia e $\Gamma_0 = 0,40$. Carregamento brusco.

Os diagramas de bifurcação das Figuras 5.17a-d e 5.18a-d para, respectivamente, a casca vazia e a casca completamente cheia, são característicos do ramo descendente da região principal de instabilidade paramétrica. Neste caso, quando a amplitude da excitação atinge o valor crítico ocorre uma bifurcação subcrítica, dando origem a uma solução periódica instável de período $2T$. Neste caso ocorre a coincidência da carga de instabilidade paramétrica e da carga de escape, sendo o escape inevitável.

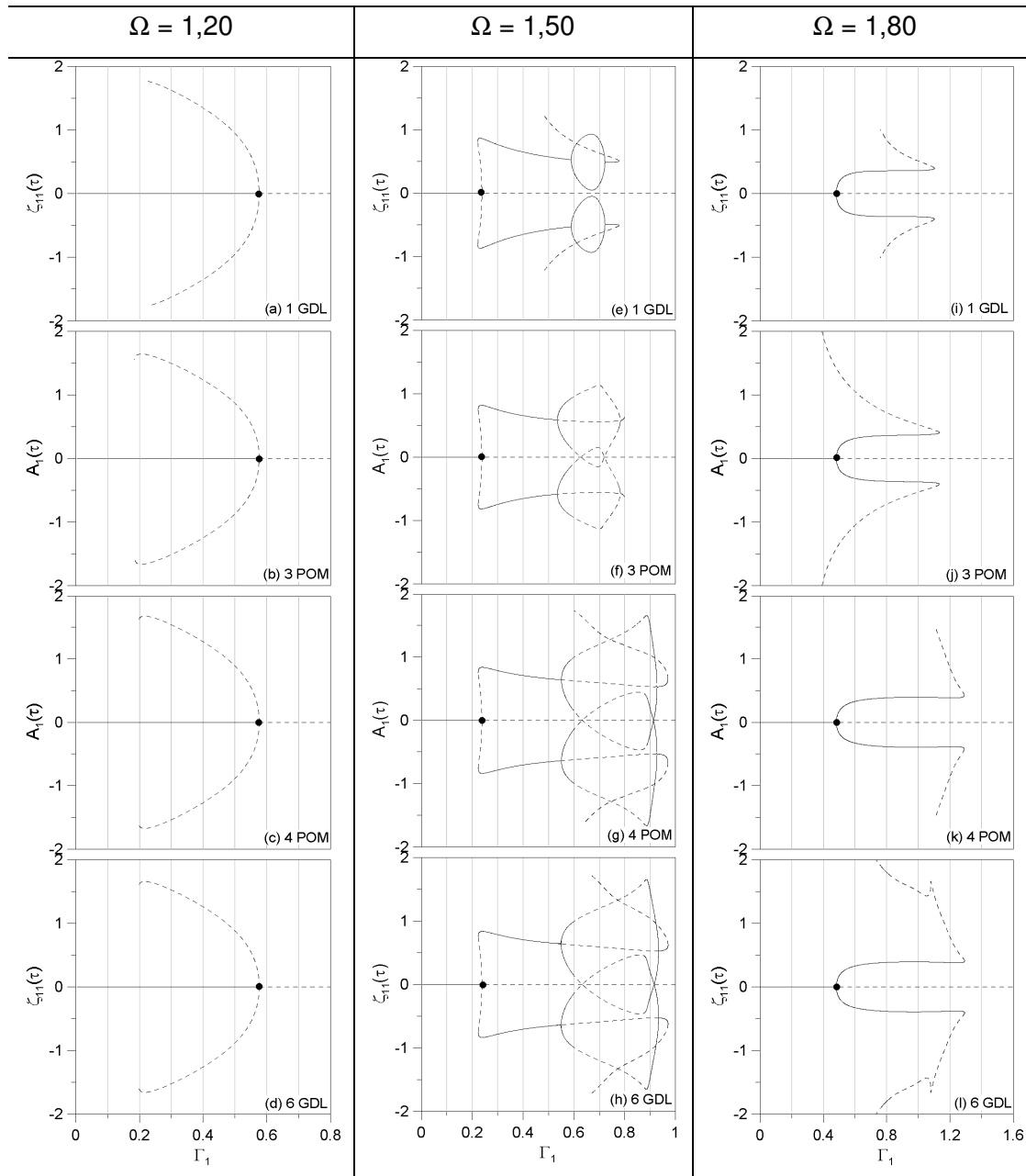


Figura 5.17 – Diagramas de bifurcação para uma casca cilíndrica vazia. $\Gamma_0 = 0,40$.

Região principal de instabilidade paramétrica.

Os diagramas ilustrados nas Figuras 5.17e-h e 5.18e-h correspondem ainda ao trecho descendente da região principal de instabilidade, mas para um valor de Ω próximo ao mínimo do vale. Tem-se novamente uma bifurcação subcrítica. Entretanto, neste caso, ao longo dos ramos inicialmente instáveis ocorre uma bifurcação nó-sela, tornando-se a solução pós-crítica estável. Assim, ao se atingir a carga de instabilidade paramétrica, pode ocorrer escape ou a solução permanecer no vale pré-flambagem (solução periódica de período $2T$).

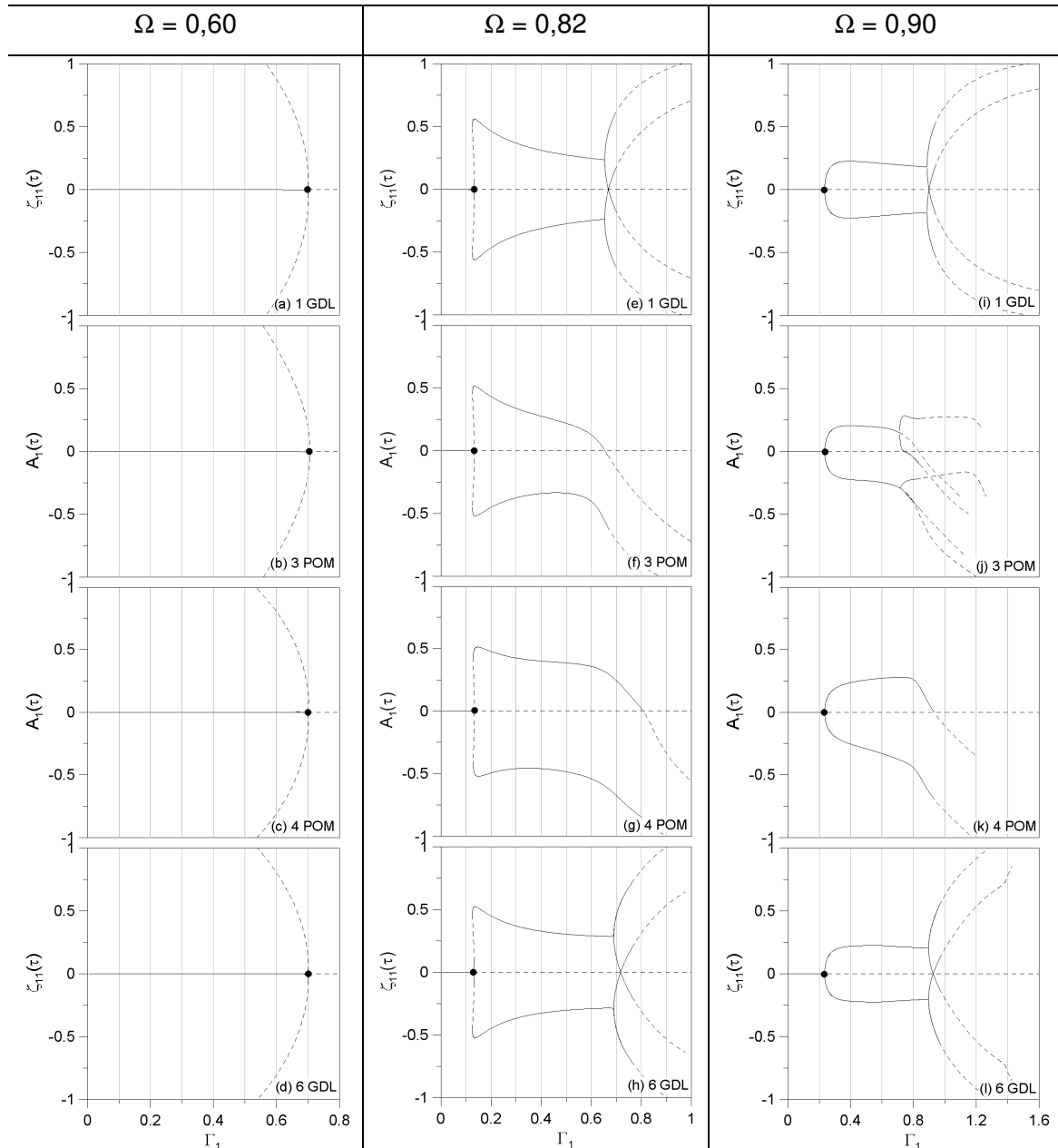


Figura 5.18 – Diagramas de bifurcação para uma casca cilíndrica completamente cheia.

$\Gamma_0 = 0,40$. Região principal de instabilidade paramétrica.

Já as Figuras 5.17i-l e 5.18i-l são os diagramas de bifurcação, característicos do ramo ascendente da região principal de instabilidade. Nesse caso, a bifurcação é do tipo supercrítica, ou seja, a magnitude das amplitudes de vibração aumentam gradualmente após Γ_1 ultrapassar o valor crítico até que a solução estável de período $2T$ se torna instável e ocorre o escape.

Conclui-se, que o ramo descendente da fronteira de instabilidade paramétrica está associado a bifurcações subcríticas, enquanto o ramo ascendente está associado a bifurcações supercríticas.

A partir das Figuras 5.17 e 5.18, observa-se que os modelos reduzidos utilizados nesta análise apresentam, qualitativamente, o mesmo mecanismo de instabilidade paramétrica e escape. Todos os modelos registram o mesmo valor para a carga crítica de instabilidade paramétrica. Observa-se também que todos os modelos identificam o mesmo tipo de bifurcação (subcrítica ou supercrítica) para uma dada frequência de excitação. Também se observa que todos os modelos apresentam a mesma evolução da resposta pós-crítica até se atingir o escape. Nota-se, entretanto, uma variação no valor da carga de escape em função do modelo adotado.

Comparando os resultados dos modelos reduzidos com 1 GDL, 3 POMs e 4 POMs com os resultados do modelo com 6 GDL, observa-se que o valor do parâmetro de controle, Γ_1 , onde ocorre o escape no modelo com 6 GDL, é superior aos valores dos demais modelos, indicando que os outros modelos reduzidos estão a favor da segurança.

As Figuras 5.17b, c, f, g, j, k, representativas dos modelos reduzidos com 3 POMs e 4 POMs para uma casca cilíndrica vazia, apresentam uma assimetria, praticamente imperceptível, na variação da amplitude de vibração $A_1(\tau)$ com o parâmetro de controle Γ_1 . O que era esperado, já que o modo $A_1(\tau)$ é uma composição de funções harmônicas, equação (4.35), que resulta em um modo não simétrico. Essa assimetria se intensifica na casca cilíndrica completamente cheia, Figuras 5.18b, c, f, g, j, k, devido às mudanças na inércia da casca cilíndrica provocada pela massa adicionada do fluido.

Nos diagramas apresentados nas Figuras 5.17 e 5.18 observa-se que, após a instabilidade paramétrica surge uma solução periódica de período $2T$, como já ilustrado nas Figuras 5.11 e 5.12. Esta é uma característica da região principal de instabilidade paramétrica de qualquer sistema estrutural (Bolotin, 1964). A evolução desta solução até o escape está ligada ao valor da frequência de excitação Ω . Na Figura 5.17, para $\Omega = 1,50$, antes do escape observa-se uma

duplicação de período dando origem a uma solução estável de período $4T$. O escape ocorre logo após esta solução se tornar instável. Para $\Omega = 1,80$, observa-se que o escape ocorre através de uma bifurcação nó-sela.

Os resultados apresentados nas Figuras 5.17h e i são agora obtidos a partir do método da Força Bruta e apresentados na Figura 5.19 onde se observa a evolução da resposta permanente quando se aumenta gradualmente Γ_1 .

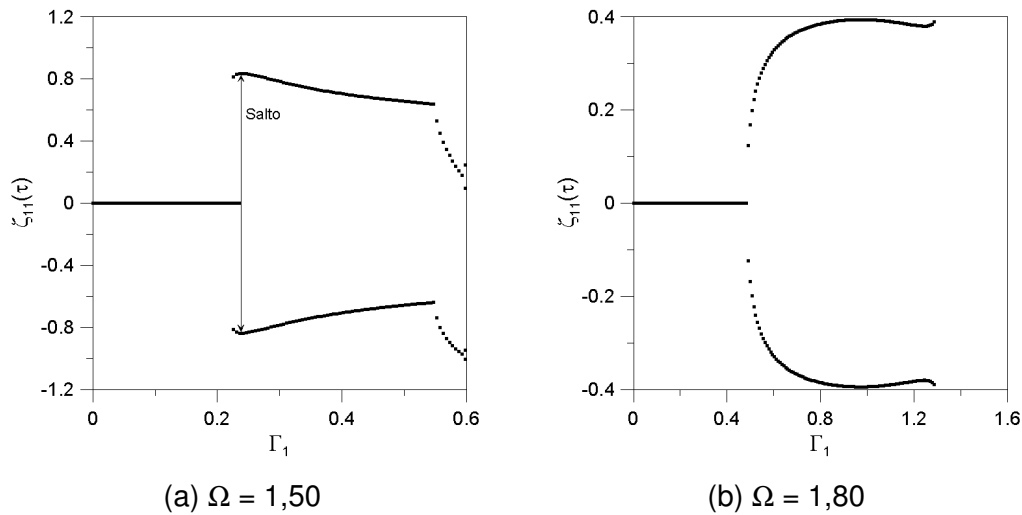


Figura 5.19 – Diagrama de bifurcação, para uma casca cilíndrica vazia, obtido pelo método da Força Bruta. ($\Gamma_0 = 0,40$).

A Figura 5.20 apresenta os diagramas de bifurcação característica da região secundária de instabilidade paramétrica para uma casca cilíndrica vazia, descrita segundo o modelo com 6 GDL. Nas Figuras 5.20a, b tem-se bifurcações do tipo subcrítica, característica do ramo descendente da região secundária de instabilidade paramétrica, sendo o valor de Ω da Figura 5.20b próxima ao mínimo dessa região. Já as Figuras 5.20c, d são bifurcações supercríticas características do ramo ascendente da região secundária de instabilidade paramétrica.

Existe uma diferença marcante no tipo de bifurcação entre a região principal e a região secundária de instabilidade paramétrica. Na região principal, como visto nos planos de fase das Figuras 5.11 e 5.12, após o parâmetro de controle Γ_1 , atingir o valor crítico, a resposta trivial da casca torna-se instável dando origem a uma solução de período $2T$ (bifurcação tipo flip). Já na região secundária de instabilidade paramétrica, após Γ_1 atingir o valor crítico, tem-se duas soluções distintas de período $1T$ (bifurcação pitchfork), como pode ser

visto nos planos de fase da Figura 5.21 que apresentam órbitas distintas associadas a cada ponto fixo do mapeamento de Poincaré.

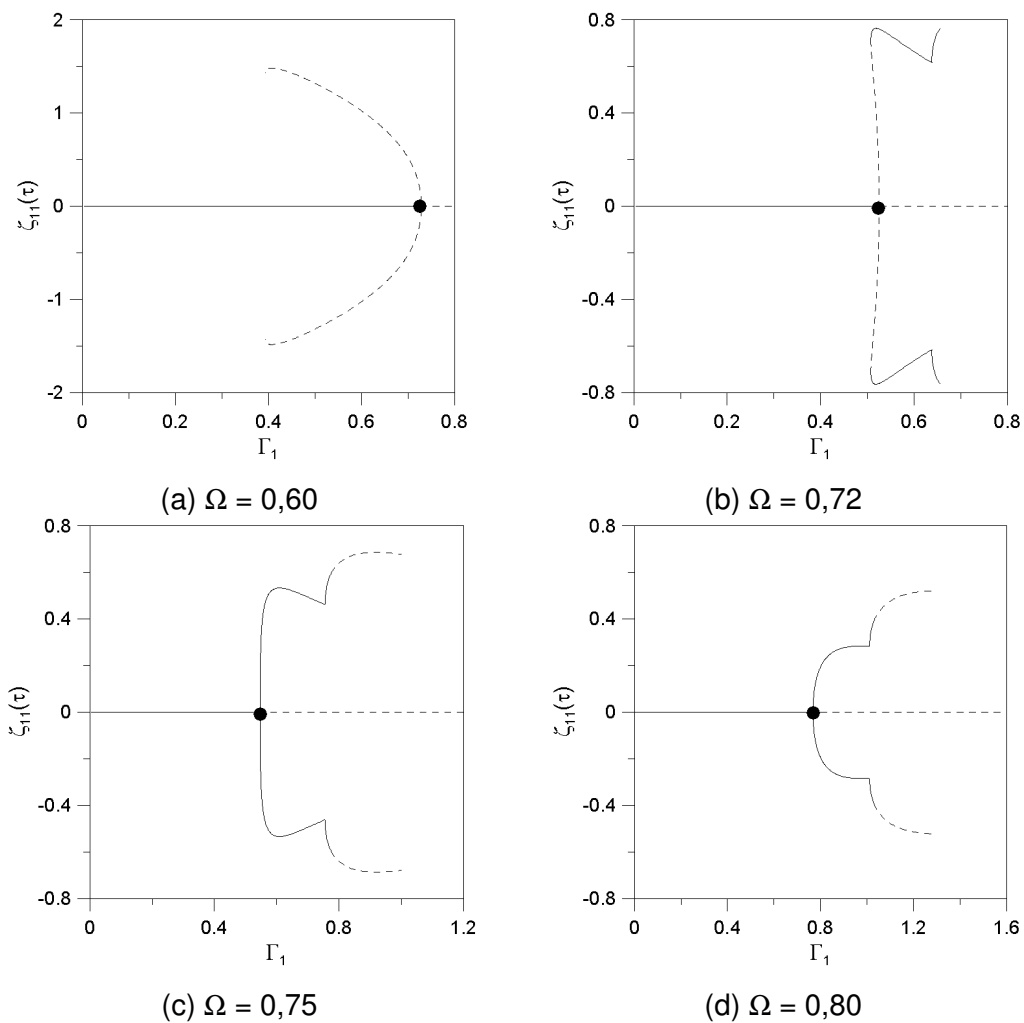
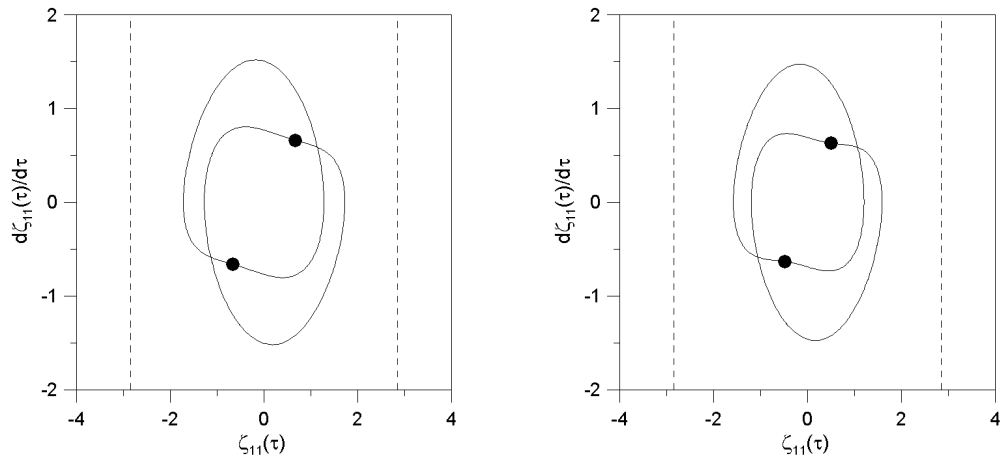


Figura 5.20 – Diagramas de bifurcação para uma casca cilíndrica vazia. Modelo com 6 GDL. $\Gamma_0 = 0,40$. Região secundária de instabilidade paramétrica

Segundo a teoria de Floquet, pode-se analisar como uma solução periódica perde sua estabilidade a partir dos autovalores da matriz de monodromia. Para isto, observa-se a evolução dos multiplicadores de Floquet com o parâmetro de controle, e de como esses multiplicadores deixam o círculo de raio de unitário, como ilustrado na Figura 5.22 (Machado, 1993; Del Prado, 2001).

Nas bifurcações flip ou por duplicação de período, características da região principal de instabilidade paramétrica, um de seus multiplicadores é um número real e abandona o círculo unitário através de -1. Neste tipo de bifurcação, a solução trivial estável que existia antes do ponto de bifurcação, torna-se instável

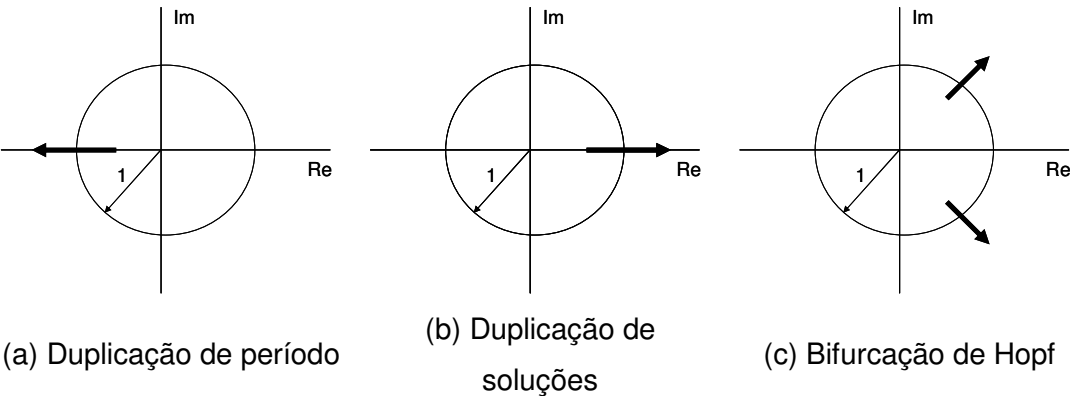
após a bifurcação. Exatamente neste ponto surgem soluções de período $2T$ que podem ser estáveis (bifurcação supercrítica) ou instáveis (bifurcação subcrítica).



(a) $\Gamma_1 = 0,60$ e $\Omega = 0,72$

(a) $\Gamma_1 = 0,70$ e $\Omega = 0,75$

Figura 5.21 – Planos de fase da região secundária de instabilidade paramétrica da casca cilíndrica vazia. Modelo com 6 GDL. ($\Gamma_0 = 0,40$).



(a) Duplicação de período

(b) Duplicação de soluções

(c) Bifurcação de Hopf

Figura 5.22 – Formas como os multiplicadores de Floquet podem sair do círculo de raio unitário.

Tabela 5.3 – Multiplicador de Floquet crítico para o diagrama de bifurcação da Figura 5.17l. ($\Gamma_0 = 0,40$ e $\Omega = 1,80$).

Γ_1	$\zeta_{11}(\tau)$	Estabilidade	λ
0,476	0	estável	-0,984
0,481	0	estável	-0,994
0,486	0	instável	-1,005
0,491	0	instável	-1,015

Apresenta-se, na Tabela 5.3, a variação do multiplicador de Floquet crítico, isto é, o que abandona o círculo unitário, com o parâmetro de controle Γ_1 para o

diagrama de bifurcação da Figura 5.17i. Como esperado, ocorre uma bifurcação por duplicação de período.

Já nas bifurcações pitchfork ou por quebra de simetria, características da região secundária de instabilidade paramétrica, um de seus multiplicadores de Floquet abandona o círculo unitário através de +1. Neste tipo de bifurcação, a solução trivial que existia antes do ponto de bifurcação passa a ser instável logo após este ponto. Porém surgem, neste ponto, duas soluções estáveis (bifurcação supercrítica) ou instáveis (bifurcação subcrítica) de período $1T$. A evolução do multiplicador de Floquet crítico com o parâmetro de controle, Γ_1 , e como ele abandona o círculo de raio unitário está apresentado na Tabela 5.4. Como pode ser observado, o autovalor deixa o círculo unitário em +1.

Tabela 5.4 – Multiplicador de Floquet crítico para o diagrama de bifurcação da Figura 5.20d. ($\Gamma_0 = 0,40$ e $\Omega = 0,80$).

Γ_1	$\zeta_{11}(\tau)$	Estabilidade	λ
0,759	0	estável	0,981
0,764	0	estável	0,993
0,773	0	instável	1,011
0,778	0	instável	1,023