

4

Modelos reduzidos para a casca cilíndrica

Tradicionalmente, no estudo das vibrações não-lineares de cascas cilíndricas e de sua interação com um meio fluido, adota-se um campo de deslocamentos radiais w , e a partir deste, obtém-se a função de tensão com o auxílio da equação de compatibilidade (2.30) ou os deslocamentos axiais e circunferenciais.

A solução a partir da equação de compatibilidade é um procedimento clássico para o problema de cascas abatidas com uma precisão tão eficiente quanto for a escolha criteriosa dos modos que constituirão os deslocamentos radiais, $w(x, \theta, t)$, e do método usado para determinar os coeficientes dependentes do tempo. Dada uma determinada função $w(x, \theta, t)$, facilmente se obtém a solução particular da equação bi-harmônica (2.30) que relaciona a função de tensão (f) com os deslocamentos radiais w , em seguida, substitui-se essa solução particular na equação (2.29) para que, através de um método numérico, por exemplo, o de Galerkin, se determine os coeficientes dependentes no tempo. Deve-se destacar que este procedimento atende apenas na média as condições de contorno (2.22) e (2.26), ou seja,

$$\int_0^{2\pi} v R d\theta = 0 \quad x=0, L \quad (4.1)$$

$$N_x^I = \int_0^{2\pi} f_{,\theta\theta} R d\theta = 0 \quad x=0, L \quad (4.2)$$

além de não garantir a continuidade dos deslocamentos no sentido circunferencial da casca, condição (2.22).

A literatura apresenta diversos trabalhos que demonstram que o acoplamento entre os modos de $w(x, \theta, t)$ podem levar a resultados distintos (Chu, 1961; Nowinski, 1963; Evensen, 1963; Olson, 1965; Dowell e Ventres, 1968; Atluri, 1972) e, dependendo da escolha desses modos, podem apresentar comportamentos totalmente incompatíveis com resultados experimentais de cascas cilíndricas (Evensen, 1967). Isso se deve ao acoplamento modal que é caracteristicamente não-linear.

Nesta tese, a escolha dos termos que irão compor os deslocamentos, principalmente os radiais, será inicialmente feita através de técnicas de perturbação (Gonçalves e Batista, 1988; Gonçalves e Del Prado, 2004, 2005) que são capazes de fornecer os principais termos que devem estar presentes nos deslocamentos u , v e w da casca cilíndrica. Assim, o sistema dinâmico é reduzido a um sistema discretizado com n -graus de liberdade, sendo que o número total de graus de liberdade é dado pela soma dos graus de liberdade presentes na solução de cada componente do deslocamento.

4.1.

Solução geral do campo de deslocamento da casca pelo método da perturbação

As equações não lineares de movimento para uma casca cilíndrica, equações (2.32)-(2.34), podem ser escritas em termos do vetor deslocamentos $\mathbf{U}=\{U, V, W\}^T$ como:

$$\mathbf{L}(\mathbf{U}) - \mathbf{U}_{,tt} = \delta \mathbf{D}_1(\mathbf{U}) + \delta^2 \mathbf{D}_2(\mathbf{U}) \quad (4.3)$$

onde $\mathbf{L}(\mathbf{U})$ é o operador diferencial linear, $\mathbf{D}_1(\mathbf{U})$ é um operador diferencial não-linear que gera termos não-lineares quadráticos e $\mathbf{D}_2(\mathbf{U})$ é um operador diferencial que gera os termos não-lineares cúbicos.

Considera-se que as componentes do vetor de deslocamentos, \mathbf{U} , podem ser expandidas em função de um dado parâmetro de perturbação δ como:

$$U = \sum_{i=0}^{\infty} \delta^i U_i(\xi, \theta, t); \quad V = \sum_{i=0}^{\infty} \delta^i V_i(\xi, \theta, t); \quad W = \sum_{i=0}^{\infty} \delta^i W_i(\xi, \theta, t) \quad (4.4)$$

Substituindo a equação (4.4) na equação (4.3), agrupando os termos com a mesma potência de δ e os equacionando a zero, obtém-se o seguinte sistema linear de equações diferenciais parciais:

$$\begin{aligned} \mathbf{L}(\mathbf{U}^0) - \mathbf{U}^0_{,tt} &= \mathbf{0} \\ \mathbf{L}(\mathbf{U}^1) - \mathbf{U}^1_{,tt} &= \mathbf{D}_1(\mathbf{U}^0) \\ \mathbf{L}(\mathbf{U}^2) - \mathbf{U}^2_{,tt} &= \mathbf{D}_1(\mathbf{U}^0, \mathbf{U}^1) + \mathbf{D}_2(\mathbf{U}^0) \end{aligned} \quad (4.5)$$

A solução da primeira equação em (4.5) com as devidas condições de contorno permite a determinação dos modos de vibração, \mathbf{U}^0 , e das respectivas frequências naturais da casca.

Para uma casca cilíndrica simplesmente apoiada ou infinitamente longa, os modos de vibração são dados por:

$$\begin{aligned}
U_0 &= \bar{U}_0 f(t) \cos(n\theta) \cos(q\xi) \\
V_0 &= \bar{V}_0 f(t) \sin(n\theta) \sin(q\xi) \\
W_0 &= \bar{W}_0 f(t) \cos(n\theta) \sin(q\xi)
\end{aligned} \tag{4.6}$$

onde \bar{U}_0, \bar{V}_0 e \bar{W}_0 são as amplitudes modais, n é o número de ondas circunferenciais e q é o parâmetro adimensional que relaciona as semi-ondas longitudinais, m , com a geometria da casca ($q = m\pi R/L$).

Substituindo a equação (4.6) na segunda equação de (4.5), chega-se a um sistema de equações diferenciais lineares não-homogêneas em \mathbf{U}^1 . A solução particular deste sistema fornece os modos de segunda ordem da expansão (4.4) que são:

$$\begin{aligned}
U_1 &= f(t)^2 \left[\bar{U}_1 \sin(2q\xi) + \bar{U}_2 \sin(2q\xi) \cos(2n\theta) \right] \\
V_1 &= f(t)^2 \left[\bar{V}_1 \sin(2n\theta) + \bar{V}_2 \cos(2q\xi) \sin(2n\theta) \right] \\
W_1 &= f(t)^2 \left[\bar{W}_1 \cos(2q\xi) + \bar{W}_2 \cos(2n\theta) \right. \\
&\quad \left. \bar{W}_3 \cos(2n\theta) \cos(2q\xi) + \bar{W}_4 \right]
\end{aligned} \tag{4.7}$$

Em (4.7) as amplitudes modais, $\bar{U}_i, \bar{V}_i, \bar{W}_i$, são funções das amplitudes \bar{U}_0, \bar{V}_0 e \bar{W}_0 , sendo, entretanto, neste estágio, mantidas como incógnitas do problema.

Substituindo \mathbf{U}^0 e \mathbf{U}^1 na terceira equação de (4.5), obtêm-se os termos de terceira ordem \mathbf{U}^2 . São eles:

$$\begin{aligned}
U_2 &= f(t)^3 \left[\bar{U}_3 \cos(n\theta) \cos(q\xi) + \bar{U}_4 \cos(n\theta) \cos(3q\xi) + \right. \\
&\quad \left. \bar{U}_5 \cos(3n\theta) \cos(q\xi) + \bar{U}_6 \cos(3n\theta) \cos(3q\xi) \right] \\
V_2 &= f(t)^3 \left[\bar{V}_3 \sin(n\theta) \sin(q\xi) + \bar{V}_4 \sin(n\theta) \sin(3q\xi) + \right. \\
&\quad \left. \bar{V}_5 \sin(3n\theta) \sin(q\xi) + \bar{V}_6 \sin(3n\theta) \sin(3q\xi) \right] \\
W_2 &= f(t)^3 \left[\bar{W}_5 \cos(n\theta) \sin(q\xi) + \bar{W}_6 \cos(n\theta) \sin(3q\xi) \right. \\
&\quad \left. + \bar{W}_7 \cos(3n\theta) \sin(q\xi) + \bar{W}_8 \cos(3n\theta) \sin(3q\xi) \right]
\end{aligned} \tag{4.8}$$

Estas soluções têm uma composição modal bem definida e, por inspeção das soluções de $\mathbf{U}^1, \mathbf{U}^2, \mathbf{U}^3, \dots$, pode-se continuar o desenvolvimento dos termos de mais alta ordem até a precisão desejada. Com base nesta análise, a solução geral para o campo de deslocamentos é escrita da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
U &= \sum_{i=1,3,5} \sum_{j=1,3,5} \bar{U}_{ij}(t) \cos(in\theta) \cos(jq\xi) + \\
&\quad \sum_{k=0,2,4} \sum_{l=0,2,4} \bar{U}_{kl}(t) \cos(kn\theta) \sin(lq\xi) \\
V &= \sum_{i=1,3,5} \sum_{j=1,3,5} \bar{V}_{ij}(t) \sin(in\theta) \sin(jq\xi) + \\
&\quad \sum_{k=2,4,6} \sum_{l=0,2,4} \bar{V}_{kl}(t) \sin(kn\theta) \cos(lq\xi) \\
W &= \sum_{i=1,3,5} \sum_{j=1,3,5} \bar{W}_{ij}(t) \cos(in\theta) \sin(jq\xi) + \\
&\quad \sum_{k=0,2,4} \sum_{l=0,2,4} \bar{W}_{kl}(t) \cos(kn\theta) \cos(lq\xi)
\end{aligned} \tag{4.9}$$

Esta é a solução para uma casca infinitamente longa já que nenhuma condição de contorno foi imposta durante a determinação dos termos de alta ordem. As potências do parâmetro de perturbação δ e da função $f(t)$ estão incluídas nas amplitudes modais na forma:

$$U^n \propto \delta^n f(t)^{n+1} + \text{termos de alta ordem} \tag{4.10}$$

Impondo as condições de contorno (2.24) e (2.25), o campo de deslocamentos radiais de uma casca simplesmente apoiada pode ser escrito na forma:

$$\begin{aligned}
W &= \sum_{i=1,3,5} \sum_{j=1,3,5} \zeta_{ij}(t) \cos(in\theta) \sin(jq\xi) \\
&+ \sum_{\alpha=0,2,4} \sum_{\beta=0} \zeta_{\alpha(2+6\beta)}(t) \cos(\alpha n\theta) \left\{ \frac{(3+6\beta)}{(4+12\beta)} \cos(6\beta q\xi) \right. \\
&\quad \left. - \cos((2+6\beta)q\xi) + \frac{(1+6\beta)}{(4+12\beta)} \cos((4+6\beta)q\xi) \right\}
\end{aligned} \tag{4.11}$$

4.2.

Determinação do campo de deslocamentos u e v

As equações (2.32)-(2.34) podem ser resolvidas substituindo-se as expansões modais obtidas pela técnica de perturbação, (4.9), e se aplicando o método de Galerkin (Gonçalves e Batista, 1988). Entretanto, o número de graus de liberdade pode ser reduzido obtendo-se analiticamente as amplitudes modais dos deslocamentos u e v em função das amplitudes modais de w . Esse procedimento é similar ao usado na literatura quando as equações de Donnell são escritas em função dos deslocamentos transversais e de uma função de tensão, equações (2.29) e (2.30). Apresenta-se, a seguir, como obter os

deslocamentos u e v em função das amplitudes modais de w satisfazendo as equações de equilíbrio, (2.32) e (2.33), as condições de contorno, de simetria e de continuidade da casca cilíndrica simplesmente apoiada. Cabe ressaltar que este é um procedimento original que permite reduzir de forma acentuada o número de incógnitas do problema.

Considera-se, primeiramente, a equação (2.33). A partir dela é possível escrever a derivada parcial do deslocamento axial, $U_{,\xi\theta}$, em função de V e W , como:

$$U_{,\xi\theta} = -\frac{2}{(1+\nu)} \left[V_{,\theta\theta} + W_{,\theta} + \frac{(1-\nu)}{2} V_{,\xi\xi} + \delta \left(\frac{(1+\nu)}{2} W_{,\xi\theta} W_{,\xi} + W_{,\theta\theta} W_{,\theta} + \frac{(1-\nu)}{2} W_{,\xi\xi} W_{,\theta} \right) \right] \quad (4.12)$$

Derivando a equação (4.12) duas vezes com relação à variável ξ e duas vezes com relação à variável θ , obtém-se respectivamente:

$$U_{,\xi\xi\xi\xi} = -\frac{2}{(1+\nu)} \left[V_{,\xi\xi\theta\theta} + W_{,\xi\xi\theta} + \frac{(1-\nu)}{2} V_{,\xi\xi\xi\xi} + \delta \left(\frac{(1+\nu)}{2} W_{,\xi\xi\xi\theta} W_{,\xi} + (1+\nu) W_{,\xi\xi\theta} W_{,\xi\xi} + \frac{(1+\nu)}{2} W_{,\xi\theta} W_{,\xi\xi\xi} + W_{,\xi\xi\theta\theta} W_{,\theta} + 2 W_{,\xi\theta\theta} W_{,\xi\theta} + W_{,\theta\theta} W_{,\xi\xi\theta} + \frac{(1-\nu)}{2} W_{,\xi\xi\xi\xi} W_{,\theta} + (1-\nu) W_{,\xi\xi\xi} W_{,\xi\theta} + \frac{(1-\nu)}{2} W_{,\xi\xi\xi} W_{,\xi\xi\theta} \right) \right] \quad (4.13)$$

$$U_{,\xi\theta\theta\theta} = -\frac{2}{(1+\nu)} \left[V_{,\theta\theta\theta\theta} + W_{,\theta\theta\theta} + \frac{(1-\nu)}{2} V_{,\xi\xi\theta\theta} + \delta \left(\frac{(1+\nu)}{2} W_{,\xi\theta\theta\theta} W_{,\xi} + \frac{3(1+\nu)}{2} W_{,\xi\theta\theta} W_{,\xi\theta} + W_{,\theta\theta\theta\theta} W_{,\theta} + 3 W_{,\theta\theta\theta} W_{,\theta\theta} + \frac{(1-\nu)}{2} W_{,\xi\xi\theta\theta} W_{,\theta} + (1-\nu) W_{,\xi\xi\theta} W_{,\theta\theta} + \frac{(1-\nu)}{2} W_{,\xi\xi} W_{,\theta\theta\theta} \right) \right] \quad (4.14)$$

Derivando a equação (2.32) com a relação às variáveis ξ e θ e substituindo as equações (4.13) e (4.14) na equação resultante, chega-se à seguinte equação diferencial:

$$\nabla^4 V = -\delta \left[2(2+\nu) W_{,\xi\theta\theta} W_{,\xi\theta} - \nu W_{,\xi\xi} W_{,\theta\theta\theta} + (2-\nu) W_{,\theta\theta} W_{,\xi\xi\theta} + 2 W_{,\xi\xi\theta\theta} W_{,\theta} + W_{,\xi\xi\theta} W_{,\xi\xi} + W_{,\xi\xi\xi\xi} W_{,\theta} + 2 W_{,\xi\theta} W_{,\xi\xi\xi} + W_{,\theta\theta\theta\theta} W_{,\theta} + 3 W_{,\theta\theta\theta} W_{,\theta\theta} \right] - (2+\nu) W_{,\xi\xi\theta} - W_{,\theta\theta\theta} \quad (4.15)$$

onde $\nabla^4 V = V_{,\xi\xi\xi\xi} + 2 V_{,\xi\xi\theta\theta} + V_{,\theta\theta\theta\theta}$.

Definida a expansão modal para os deslocamentos radiais w e substituindo-a na equação (4.15), obtém-se uma equação diferencial parcial linear em v . A solução para os deslocamentos circunferenciais, v , é obtida a partir da soma de uma solução particular, v_p , e de uma solução homogênea, v_h , sendo esta última considerada nula para satisfazer a continuidade dos deslocamentos na direção circunferencial da casca. A solução particular é obtida substituindo a expansão modal de w na equação (4.15), expandindo os produtos e potencias das funções trigonométricas e equacionando os coeficientes das funções harmônicas. Assim, a solução modal para os deslocamentos circunferenciais, v , é obtida como uma função não-linear dos deslocamentos radiais. A solução resultante satisfaz a condição de contorno (2.22) na média:

$$\int v(0, \theta) R d\theta = \int v(L, \theta) R d\theta = 0 \quad (4.16)$$

Substituindo as soluções modais de v e w na equação (4.13), a derivada parcial de u é obtida em termos das amplitudes modais de w . Integrando a equação resultante, obtém-se:

$$\begin{aligned} U = & \int \left\{ \int \left\{ \int \left[-\frac{2}{(1+\nu)} \left[V_{,\xi\xi\theta\theta} + W_{,\xi\xi\theta} + \frac{(1-\nu)}{2} V_{,\xi\xi\xi\xi} \right. \right. \right. \\ & + \delta \left(\frac{(1+\nu)}{2} W_{,\xi\xi\xi\theta} W_{,\xi} + (1+\nu) W_{,\xi\xi\theta} W_{,\xi\xi} + \frac{(1+\nu)}{2} W_{,\xi\theta} W_{,\xi\xi\xi} + W_{,\xi\xi\theta\theta} W_{,\theta} \right. \\ & + 2W_{,\xi\theta\theta} W_{,\xi\theta} + W_{,\theta\theta} W_{,\xi\xi\theta} + \frac{(1-\nu)}{2} W_{,\xi\xi\xi\xi} W_{,\theta} + (1-\nu) W_{,\xi\xi\xi} W_{,\xi\theta} \\ & \left. \left. \left. + \frac{(1-\nu)}{2} W_{,\xi\xi\xi} W_{,\xi\xi\theta} \right) \right] d\xi \right\} d\xi \right\} R d\theta + F(\xi) + G(\xi, \theta) \end{aligned} \quad (4.17)$$

Os deslocamentos axiais ficam totalmente definidos desde que se determinem as funções $F(\xi)$ e $G(\xi, \theta)$, sendo que $F(\xi)$ e $G(\xi, \theta)$ são parcelas da solução homogênea da equação diferencial parcial (4.17) com

$$G(\xi, \theta) = \xi^2 F_1(\theta) + \xi F_2(\theta) + F_3(\theta) \quad (4.18)$$

Substituindo (4.17) na equação (2.32), obtém-se uma equação diferencial ordinária não-homogênea de segunda ordem em $F(\xi)$. Esta equação pode ser escrita como:

$$F(\xi)_{,\xi\xi} = f(\xi) \quad (4.19)$$

Resolvendo a equação (4.19), obtém-se:

$$F(\xi) = \int \left\{ \int f(\xi) d\xi \right\} d\xi + C_1 \xi + C_2 \quad (4.20)$$

As constantes de integração C_1 e C_2 , bem como as funções $F_1(\theta)$, $F_2(\theta)$ e $F_3(\theta)$, são obtidas impondo a condição de antimetria (2.21) e a condição de contorno não-linear (2.27). Usando-se inicialmente a condição de contorno não-linear (2.27) em $\xi = 0$ e L/R , obtém-se, por inspeção dos termos, a constante C_1 e as funções $F_1(\theta)$ e $F_2(\theta)$, sendo que $F_1(\theta) = 0$. Em seguida, a condição de simetria (2.21) fornece o valor da constante C_2 e da função $F_3(\theta)$. Desta maneira, o campo de deslocamentos axiais fica totalmente definido.

Finalmente, substituindo a expansão modal dos deslocamentos radiais w juntamente com as expansões modais obtidas para u e v na equação de movimento (2.34) e aplicando o método de Galerkin, obtém-se um sistema discretizado de equações diferenciais ordinárias.

Resta, então, determinar a expansão modal dos deslocamentos radiais a ser utilizada neste trabalho. Para grandes deslocamentos, em torno de duas vezes a espessura da casca, obtém-se uma boa convergência dos resultados se os modos até quarta ordem forem retidos na equação (4.11). Desta forma, tem-se que:

$$\begin{aligned}
 W = & \zeta_{11}(t) \cos(n\theta) \operatorname{sen}(q\xi) + \zeta_{13}(t) \cos(n\theta) \operatorname{sen}(3q\xi) \\
 & + \zeta_{31}(t) \cos(3n\theta) \operatorname{sen}(q\xi) + \zeta_{33}(t) \cos(3n\theta) \operatorname{sen}(3q\xi) \\
 & + \zeta_{02}(t) \left[\frac{3}{4} - \cos(2q\xi) + \frac{1}{4} \cos(4q\xi) \right] \\
 & + \zeta_{22}(t) \cos(2n\theta) \left[\frac{3}{4} - \cos(2q\xi) + \frac{1}{4} \cos(4q\xi) \right]
 \end{aligned} \tag{4.21}$$

As justificativas para a escolha da expansão (4.21) são apresentadas mais adiante neste capítulo e no Apêndice A encontra-se, para exemplificar, o código utilizado para a determinação dos campos de deslocamentos U e V em função do modo fundamental do campo de deslocamentos (4.21).

4.3. Redução do problema pelo método de Karhunen-Loève

Como apresentado anteriormente, o campo de deslocamentos obtido a partir do método da perturbação identifica todos os modos que se acoplam com um dado modo de vibração através das não-linearidades quadráticas e cúbicas presentes nas equações de movimento. O método é capaz de descrever corretamente o comportamento com perda de rigidez da casca cilíndrica com um número relativamente pequeno de modos, além de indicar a importância de

cada modo no comportamento não-linear através da potência do parâmetro de perturbação.

Entretanto, para se construir um modelo de dimensão reduzida, é necessário identificar a importância de cada modo na energia total do sistema e a participação de cada modo da expansão modal (4.21) nos modos não-lineares de vibração.

O método de Karhunen-Loève, também conhecido como decomposição ortogonal completa (POD, em inglês, *proper orthogonal decomposition*), é uma maneira de quantificar a participação desses modos na energia total do sistema. Várias aplicações do método podem ser encontradas na literatura para modelar sistemas complexos, por exemplo, Wolter (2001), Amabili et al. (2003) e Rega e Troger (2005). O método consiste na análise de uma série de dados da resposta do sistema obtida da solução de um modelo matemático preciso ou de um resultado experimental. Nesta tese, os dados são obtidos a partir das equações de movimento discretizadas.

A formulação matemática do método de Karhunen-Loève está apresentada, detalhadamente, nos trabalhos de Sirovich (1987a-c) e Bellizi e Sampaio (2006). Neste trabalho, utiliza-se o método direto de Karhunen-Loève que é apresentado de forma concisa a seguir.

Considere um campo vetorial real que descreve os deslocamentos radiais da casca, $\bar{\mathbf{w}}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}, t)$. Este campo vetorial é decomposto em duas partes: uma média invariante no tempo $E[\bar{\mathbf{w}}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}, t)]$ e

$$\bar{\mathbf{v}}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}, t) = \bar{\mathbf{w}}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}, t) - E[\bar{\mathbf{w}}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}, t)] \quad (4.22)$$

que é a variação temporal com relação à média.

O campo de deslocamentos em problemas dinâmicos é, usualmente, descrito no tempo e no espaço na forma separada:

$$\bar{\mathbf{v}}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \bar{\xi}_k(t) \bar{f}_k(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}) \quad (4.23)$$

Para a aplicação do método, o campo de deslocamentos contínuo, em um certo instante, deve ser aproximado por um campo discreto. Para obter um vetor representativo do campo de deslocamentos da casca, a superfície da casca é discretizada e os deslocamentos são avaliados em N_T pontos espaciais distribuídos uniformemente ao longo de x e θ , como se segue:

$$\bar{\mathbf{w}}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}, t) = \bar{\mathbf{w}}(x_i, \theta_j, t), \begin{cases} x_i = iL/n_x & i=0, \dots, n_x \\ \theta_j = j2\pi/n_\theta & j=0, \dots, n_\theta \end{cases} \quad (4.24)$$

onde $\bar{\mathbf{w}}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}, t)$ é o vetor dos deslocamentos radiais da casca medidos em cada ponto (x_i, θ_j) usando, por exemplo, a expansão modal (4.21). As amplitudes $\zeta_{ij}(t)$, presentes na expansão (4.21), são obtidas da solução das equações de movimento da casca. Assim, para cada instante de tempo é obtido um vetor com $n_x \times n_\theta = N_T$ elementos, $\bar{w}_1(t), \bar{w}_2(t), \dots, \bar{w}_{N_T}(t)$. Tomando-se M intervalos de tempos igualmente espaçados $t_M = M\bar{\tau}$ (t_1, t_2, \dots, t_M), onde $\bar{\tau}$ é um período de amostragem, obtém-se a seguinte matriz de amostragem de dimensão $M \times N_T$:

$$\bar{\mathbf{W}} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{w}}_1 & \bar{\mathbf{w}}_2 & \dots & \bar{\mathbf{w}}_{N_T} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{w}_1(t_1) & \bar{w}_2(t_1) & \dots & \bar{w}_{N_T}(t_1) \\ \bar{w}_1(t_2) & \bar{w}_2(t_2) & \dots & \bar{w}_{N_T}(t_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \bar{w}_1(t_M) & \bar{w}_2(t_M) & \dots & \bar{w}_{N_T}(t_M) \end{bmatrix} \quad (4.25)$$

onde cada coluna representa a variação temporal do deslocamento em um determinado ponto da superfície da casca e cada linha representa o campo de deslocamentos da casca em um certo instante de tempo t_M .

Usando as hipóteses de ergodicidade (Sirovich, 1987a-c; Bellizi e Sampaio, 2006), o valor médio do campo vetorial é obtido somando-se a variação temporal de cada ponto amostrado e dividindo o resultado pelo número de linhas da matriz de amostragem. A variação do campo vetorial com relação ao valor médio é dada por:

$$\bar{\mathbf{V}} = \bar{\mathbf{W}} - \frac{1}{M} \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^M \bar{w}_1(t_i) & \sum_{i=1}^M \bar{w}_2(t_i) & \dots & \sum_{i=1}^M \bar{w}_{N_T}(t_i) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{i=1}^M \bar{w}_1(t_i) & \sum_{i=1}^M \bar{w}_2(t_i) & \dots & \sum_{i=1}^M \bar{w}_{N_T}(t_i) \end{bmatrix} \quad (4.26)$$

Finalmente, como o método de Karhunen-Loève é um processo ergódico (Sirovich, 1987a-c; Bellizi e Sampaio, 2006), a matriz de correlação espacial pode ser escrita da seguinte forma:

$$\mathbf{R} = \frac{1}{M} \bar{\mathbf{V}}^T \bar{\mathbf{V}} \quad (4.27)$$

onde \mathbf{R} é uma matriz simétrica e positiva definida. Os autovetores de (4.27), que são ortogonais devido a matriz \mathbf{R} ser simétrica, são os modos ortogonais próprios ou POMs (do inglês, *proper orthogonal modes*) e os autovalores associados são os valores ortogonais próprios ou POVs (do inglês, *proper orthogonal values*) e fornecem a medida da energia média contida em cada

modo, ou seja, cada autovalor λ_k pode ser interpretado como a medida da energia média do sistema projetada no eixo φ_k do espaço funcional. O conceito de energia vem do fato de nas primeiras aplicações em turbulência, o campo \bar{v} representar a velocidade de escoamento do fluido e, portanto, neste caso, cada autovalor representa o dobro da energia cinética média contida no respectivo modo. A energia média do campo é igual à soma de todos os autovalores.

Usando os autovalores e os autovetores da matriz de correlação espacial, a dinâmica do sistema original pode ser reconstruída a partir de:

$$\bar{w}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}, t) \approx \sum_{k=1}^K a_k(t) \varphi_k(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}) + E[\bar{w}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}, t)] \quad (4.28)$$

onde $\varphi_k(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta})$ é o k-ésimo autovetor e $a_k(t)$ é o k-ésimo coeficiente dependente do tempo que é definido como:

$$a_k(t) = \langle \bar{V}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}, t), \varphi_k(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}) \rangle \quad (4.29)$$

Nesta tese, um dos principais interesses é encontrar um conjunto de estruturas coerentes (modos) capaz de capturar a maior parte da energia do sistema.

A expansão de Karhunen-Loève é ótima no que diz respeito à reconstrução do campo de deslocamentos original (Sirovich, 1987a-c). Isto é, nenhuma decomposição linear do campo vetorial é mais eficiente que a expansão de Karhunen-Loève, ou seja, dado um número de modos, a projeção da dinâmica no subespaço gerado pelos modos de qualquer decomposição linear não pode conter uma maior quantidade de energia que a projeção no subespaço gerado pelos POMs.

4.4.

Obtenção dos modelos reduzidos para cascas cilíndricas

Sempre houve um grande interesse em se obterem modelos de dimensão reduzida capazes de descrever corretamente o comportamento não-linear de cascas cilíndricas tanto em análises estáticas quanto dinâmicas. Estes modelos permitem o uso de diversas ferramentas teóricas e numéricas especialmente indicadas para a análise de sistemas de dimensão reduzida. Assim, na literatura destinada a este assunto, são propostos diversos modelos reduzidos, que em alguns casos, levam a respostas fisicamente inconsistentes (Evensen, 1963, 1965; Olson, 1965; Varadan et al., 1989).

Os resultados obtidos nesta tese são para uma casca cilíndrica com $L/R = 2$, $R/h = 100$ e $\nu = 0,3$. Para esta casca a menor carga de flambagem, assim como a menor frequência natural são obtidas para $(m, n) = (1, 5)$ (Gonçalves e Del Prado, 2005). Esses valores são utilizados, sem perda de generalidade, em toda a análise numérica.

4.4.1. Análise estática não-linear

A Figura 4.1 apresenta a convergência da expansão modal (4.11) à medida que se aumenta o número de modos. Nota-se que há uma convergência no valor da amplitude do modo fundamental até grandes deflexões quando todos os modos na expansão modal definida em (4.21) são considerados. Os resultados foram obtidos resolvendo-se as equações de equilíbrio discretizadas através do método de Newton-Raphson.

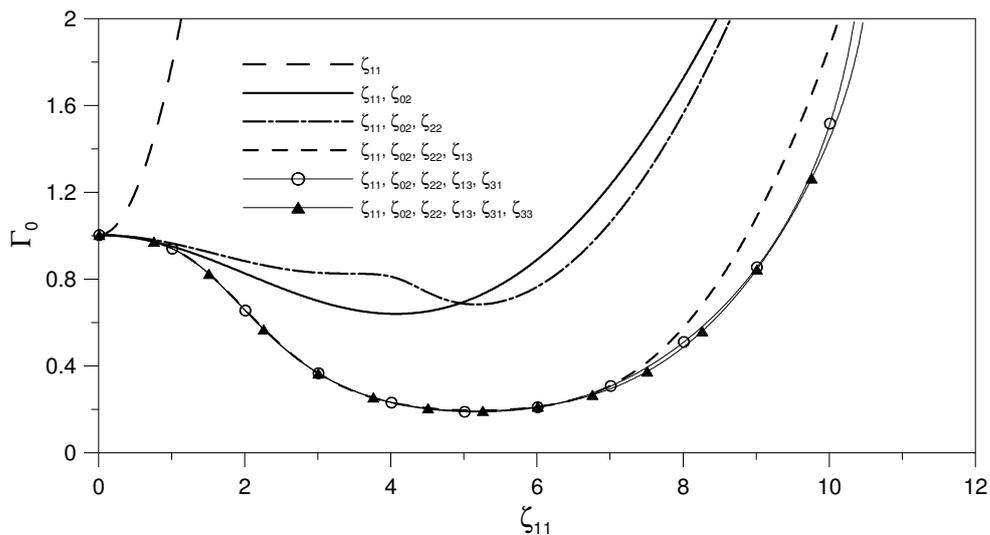


Figura 4.1 – Caminho pós-crítico da casca cilíndrica, considerando diferentes expansões para os deslocamentos radiais.

A partir da Figura 4.1, observa-se uma mudança qualitativa no comportamento da casca, mudando o caminho pós-crítico com ganho de rigidez para um caminho pós-crítico com perda de rigidez, quando acrescenta-se ao modo crítico, ζ_{11} , o modo axi-simétrico ζ_{02} . À medida que mais modos são acrescentados a resposta converge para uma solução com acentuada perda de rigidez, sendo o mínimo pós-crítico aproximadamente 20% da carga crítica da casca.

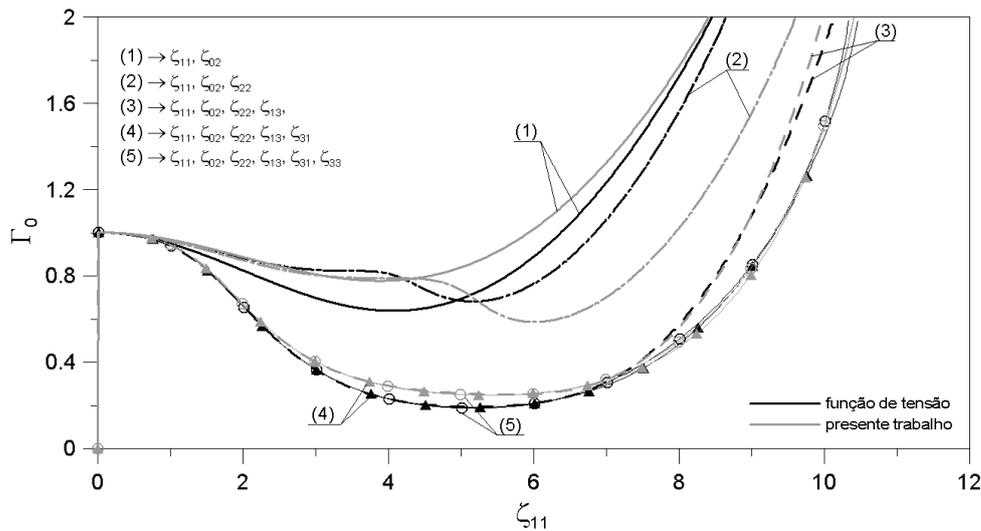


Figura 4.2 – Caminho pós-crítico da casca cilíndrica. Comparação entre a formulação por função de tensão e a formulação com u e v em função de w .

A Figura 4.2 compara os caminhos pós-críticos obtido através da solução clássica, que utiliza função de tensão, e a solução apresentada neste trabalho que considera u e v em função de w . Observa-se nesta figura que há uma diferença quantitativa entre os resultados, principalmente no valor do mínimo pós-crítico. Porém o comportamento não-linear da casca é similar em ambas as formulações, inclusive na convergência com número de modos.

A diferença entre os resultados é explicada pelos termos que surgem a mais na formulação utilizada neste trabalho que são oriundos do atendimento da condição de contorno não-linear (2.27) e da continuidade dos deslocamentos na direção circunferencial (2.22). Pela formulação através de função de tensão essas restrições não são atendidas.

Escreve-se, com a ajuda das equações (2.1), (2.6) e (2.28) as deformações da superfície média da casca em função da função de tensões da seguinte maneira:

$$\begin{aligned}
 u_{,x} + \frac{1}{2}w_{,x}^2 &= \frac{1}{Eh} \left(\frac{f_{,\theta\theta}}{R^2} - \nu f_{,xx} \right) \\
 \frac{1}{R}(v_{,\theta} + w) + \frac{1}{2R^2}w_{,\theta}^2 &= \frac{1}{Eh} \left(f_{,xx} - \nu \frac{f_{,\theta\theta}}{R^2} \right) \\
 v_{,x} + \frac{1}{R}(u_{,\theta} + w_{,x}w_{,\theta}) &= -2 \frac{(1-\nu)f_{,x\theta}}{EhR}
 \end{aligned} \tag{4.30}$$

Dada uma expansão modal para w , a partir da equação (2.30) chega-se à função de tensão correspondente à expansão adotada que, por sua vez, permite determinar $u_{,x}$, a partir de (4.30). Ao comparar este resultado de $u_{,x}$ obtido a

partir de w , apresentado anteriormente, é possível identificar os termos que diferem nas duas formulações.

Por exemplo, considerando, para efeitos de comparação, apenas os termos ζ_{11} e ζ_{02} na expansão modal (4.21), observa-se que os termos:

$$-\frac{q^2 \delta^2 (1-v^2)}{8} \zeta_{11}^2 \cos(2n\theta) - \frac{n^2 \delta^2 v}{8} \zeta_{11}^2 + \frac{3\delta v}{4} \zeta_{02} \quad (4.31)$$

não estão presentes no resultado de $u_{,x}$ quando considera-se a formulação com função de tensão. Esses termos são obtidos quando se impõe a condição de contorno não-linear (2.27).

O mesmo pode ser feito para se comparar $v_{,\theta}$ em ambas as formulações.

Neste caso, nota-se que os termos:

$$\frac{\delta^2 n^2}{8} \zeta_{11}^2 - \frac{3\delta}{4} \zeta_{02} \quad (4.32)$$

aparecem na solução obtida a partir da função de tensão. Esses termos inserem uma descontinuidade nos deslocamentos circunferenciais.

A partir dos caminhos pós-críticos apresentados na Figura 4.1, observa-se que a importância de cada modo em (4.21) é proporcional à potência do parâmetro de perturbação, mas nada pode se inferir sobre o quão importante é cada modo na resposta não-linear do sistema.

Para estudar a importância relativa de cada modo da expansão modal (4.21) no caminho pós-crítico da casca cilíndrica é empregado o método de Karhunen-Loève. Para se obter a matriz de amostragem, (4.25), foi utilizada a expansão modal (4.21) juntamente com os coeficientes modais ζ_{ij} obtidos na solução das equações de equilíbrio não-lineares do caminho pós-crítico. A superfície da casca é discretizada de acordo com a equação (4.24), usando $n_x=n_\theta=40$. O intervalo de amostragem no método de Karhunen-Loève é usualmente em função do tempo. Entretanto, podem-se considerar, em uma análise não-linear estática, os deslocamentos em função do parâmetro de carga estática Γ_0 . Desta forma, a matriz de amostragem (4.25) é obtida em intervalos uniformes do carregamento axial aplicado à casca.

A Figura 4.3 ilustra os quatro primeiros POMs e seus respectivos POVs. Eles representam 99,999% da energia total do sistema. De fato, a maior parte da energia (99,89%) está concentrada nos dois primeiros modos. A partir destes resultados pode-se derivar um modelo de dimensão reduzida para a análise do caminho pós-crítico da casca e identificar a importância relativa de cada modo da expansão (4.21).

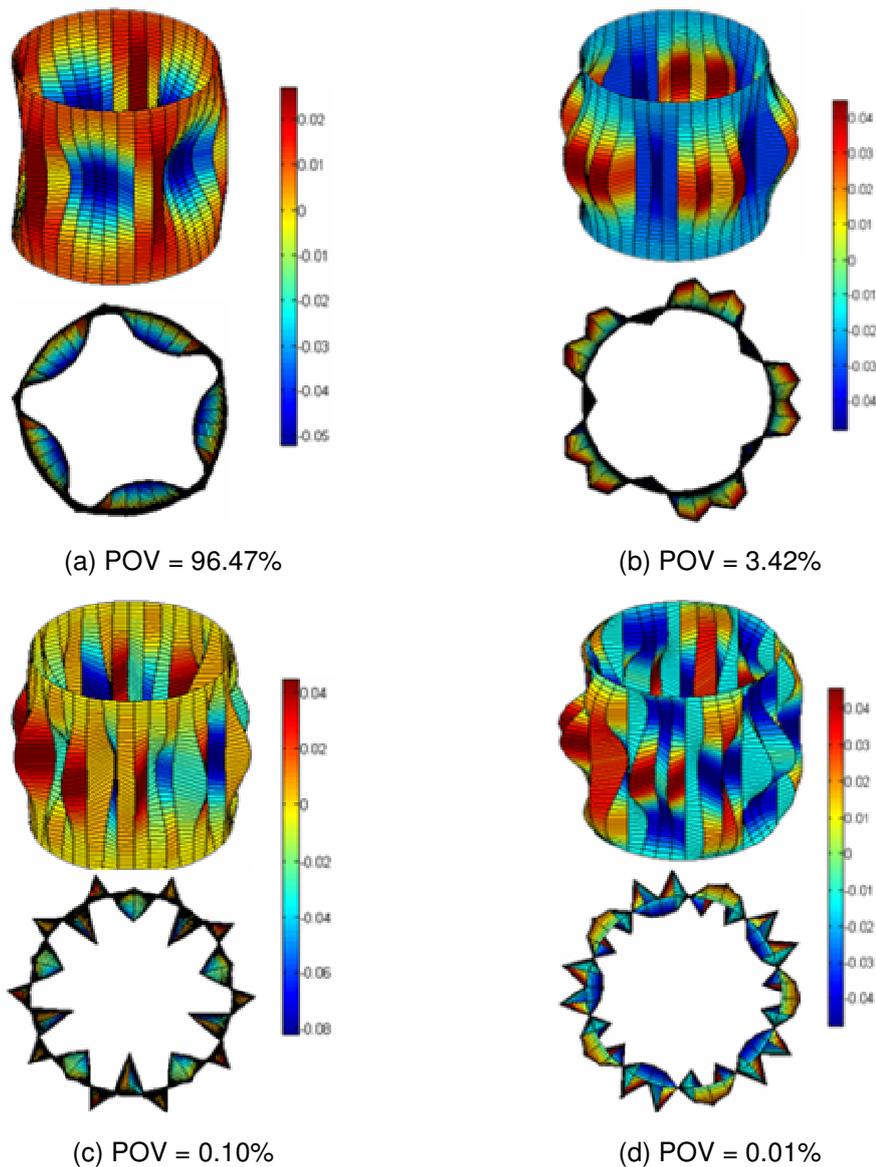


Figura 4.3 – Quatro primeiros POMs com os seus respectivos POVs para a resposta não-linear pós-crítica.

Para quantificar a importância relativa de cada modo em (4.21) em cada POM, cada um deles é expandido em séries usando os modos presentes em (4.21). A Tabela 4.1 apresenta os coeficientes modais para cada POM ilustrado na Figura 4.3. As duas principais contribuições para o primeiro POM, que é responsável por 96,47 % da energia total, são basicamente o modo fundamental de flambagem ζ_{11} juntamente com o modo axi-simétrico ζ_{02} , confirmando a importância destes dois modos, como afirmado em trabalhos anteriores sobre o assunto. Há, também, no segundo POM contribuições significativas destes dois modos. Isso explica porque modelos aproximados, usando somente o modo

crítico e um modo axissimétrico (Hunt et al., 1986; Popov et al., 1998; Gonçalves e Del Prado, 2004, 2005), são capazes de descrever, ao menos qualitativamente, a resposta não-linear da casca. O terceiro POM é dominado pelo modo de segunda ordem, ζ_{22} . As amplitudes dominantes no quarto POM são as dos modos de terceira ordem ζ_{13} , ζ_{31} e ζ_{33} . Estes resultados estão de acordo com a solução obtida pelo método da perturbação.

Tabela 4.1 – Participação dos modos usados na expansão modal dos quatro primeiros POMs no caminho pós-crítico da casca.

POM	POV	ζ_{11}	ζ_{02}	ζ_{22}	ζ_{13}	ζ_{31}	ζ_{33}
1	96,47 %	16,029	8,767	-3,029	-2,462	1,067	-0,455
2	3,42 %	17,622	-6,725	5,643	-4,271	-3,879	1,176
3	0,10 %	-1,592	3,194	14,537	1,437	9,631	0,503
4	0,01 %	4,878	-2,212	-2,888	17,025	13,139	-8,137

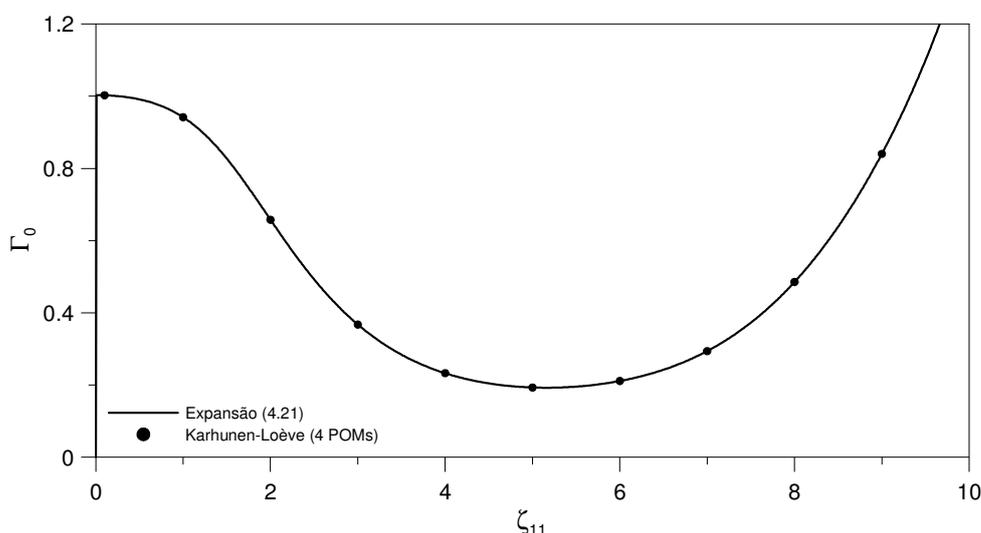


Figura 4.4 – Comparação entre a solução pós-crítica da casca a partir da expansão (4.21) com a reconstrução da resposta usando os quatro primeiros POMs.

Na Figura 4.4 é apresentada a reconstrução da resposta pós-crítica da casca cilíndrica utilizando os quatro primeiros POMs ilustrados na Figura 4.3. Observa-se que há uma excelente concordância entre os resultados da resposta pós-crítica obtida usando a expansão modal (4.21) e usando os quatro primeiros POMs da expansão de Karhunen-Loève.

Há uma diferença básica entre um modelo mecânico discreto com n -graus de liberdade e a solução (4.21). Selecionado um modo de flambagem (m, n), todos os modos de mais alta ordem em (4.21) são oriundos do acoplamento modal, como mostrado pelo método da perturbação, levando à representação do

modo não-linear de flambagem. Assim, as amplitudes modais dos modos não-lineares podem ser escritos em função da coordenada ζ_{11} , na forma:

$$\begin{aligned}\zeta_{02} &= f_1(\zeta_{11}) \\ \zeta_{22} &= f_2(\zeta_{11}) \\ \zeta_{13} &= f_3(\zeta_{11}) \\ \zeta_{31} &= f_4(\zeta_{11}) \\ \zeta_{33} &= f_5(\zeta_{11})\end{aligned}\quad (4.33)$$

onde f_i , $i = 1, \dots, 5$ são funções polinomiais de ζ_{11} .

Estas funções poderiam ser obtidas analiticamente a partir da solução do sistema (4.5), não fossem as dificuldades, ou mesma a impossibilidade, de se obter uma solução analítica para o sistema de equações diferenciais parciais juntamente com as condições de contorno. Entretanto, pode-se obter as funções $f_i(\zeta_{11})$ através de aproximações polinomiais com base nos resultados obtidos da análise não-linear.

Tem-se assim um modelo reduzido a partir de um modelo reduzido já existente obtido pelo método da perturbação e pela decomposição de Karhunen-Loève. Neste sentido, diz-se que esse modelo da casca é reduzido-reduzido. (Gonçalves et al., 2008).

Para se obter os coeficientes do polinômio de aproximação, as amplitudes modais para cada valor do parâmetro de carregamento estático são projetadas no plano $\zeta_{11} \times \zeta_{ij}$ e um polinômio é ajustado pelo método dos mínimos quadrados para minimizar os erros. Obtêm-se, assim, para a casca em estudo, os seguintes polinômios:

$$\begin{aligned}\zeta_{02} &= 4.12 \times 10^{-2} \zeta_{11}^2 - 1.33 \times 10^{-4} \zeta_{11}^4 + 2.67 \times 10^{-6} \zeta_{11}^6 \\ \zeta_{22} &= 1.54 \times 10^{-2} \zeta_{11}^2 - 7.37 \times 10^{-4} \zeta_{11}^4 + 4.05 \times 10^{-6} \zeta_{11}^6 \\ \zeta_{13} &= -1.12 \times 10^{-2} \zeta_{11}^3 + 2.01 \times 10^{-4} \zeta_{11}^5 - 1.03 \times 10^{-6} \zeta_{11}^7 \\ \zeta_{31} &= 3.16 \times 10^{-4} \zeta_{11}^3 - 1.72 \times 10^{-6} \zeta_{11}^5 + 1.02 \times 10^{-7} \zeta_{11}^7 \\ \zeta_{33} &= 5.04 \times 10^{-4} \zeta_{11}^3 - 1.65 \times 10^{-5} \zeta_{11}^5 + 8.89 \times 10^{-8} \zeta_{11}^7\end{aligned}\quad (4.34)$$

Em consonância com o método da perturbação, os polinômios que ajustam as amplitudes ζ_{02} e ζ_{22} começam com o termo quadrático de ζ_{11} , observado nas equações (4.5) e (4.7), e incluem apenas os termos com potências pares de ζ_{11} . Já os polinômios que ajustam as amplitudes ζ_{13} , ζ_{31} e ζ_{33} começam com o termo cúbico de ζ_{11} , e incluem apenas os termos com potências ímpares de ζ_{11} , como observado nas equações (4.5) e (4.8).

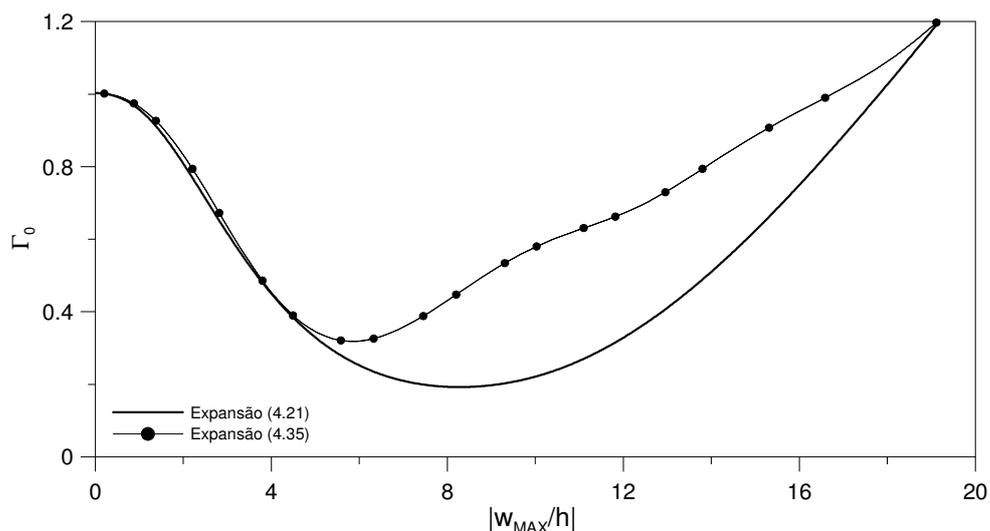


Figura 4.5 – Comparação do caminho pós-crítico utilizando a expansão modal (4.21) e o modelo com apenas um grau de liberdade (4.34).

A partir da equação (4.34), obtém-se um modelo com apenas um grau de liberdade para a casca cilíndrica. A Figura 4.5 ilustra a comparação dos resultados obtidos para o caminho pós-crítico da casca utilizando a expansão modal (4.21) e o modelo com um grau de liberdade definido pelas equações (4.34). Observa-se que o modelo simplificado consegue capturar, de forma qualitativa, o comportamento não-linear da casca até mesmo para grandes amplitudes.

Em particular, este modelo aproxima de forma precisa o trecho instável do caminho pós-crítico. Desta forma, ele pode ser usado para o estudo da sensibilidade a imperfeição, e das medidas de integridade, baseadas na evolução das bacias de atração das configurações pré-flambagem.

4.4.2. Análise dinâmica não-linear

Utiliza-se na análise não-linear das vibrações livres da casca cilíndrica um procedimento semelhante ao desenvolvido na análise estática não linear para a determinação de modelos de dimensão reduzida.

A relação frequência-amplitude é obtida, usualmente, adotando-se uma função harmônica aproximada que relaciona a variação da amplitude com o tempo, transformando a análise no domínio do tempo em uma análise no domínio da frequência. Em geral, neste processo, são utilizadas técnicas de perturbação tal como o método de Lindstedt-Poincaré ou método das múltiplas escalas (Nayfeh e Balachandran, 1995) ou a expansão das amplitudes

dependentes do tempo em séries de harmônicos, tal como o método do balanço harmônico (Meirovitch, 1975) ou método de Galerkin-Urabe (Urabe e Reiter, 1966; Bouc, 1972). Porém, nesta tese, é utilizado o método do tiro (Mattos, 1984; Li e Xu, 2005) para determinar a relação freqüência-amplitude da casca sem que seja necessária a discretização temporal das amplitudes modais.

Neste método é feita, inicialmente, a escolha dos valores das condições iniciais que são livres (deslocamentos), desconhecidas a priori, e prescritas (velocidades) em um ponto inicial, t_1 , do domínio de integração. Tem-se que as condições prescritas devem ser nulas a cada período da resposta. As equações diferenciais de movimento são integradas numericamente como em um problema de valor inicial. Tem-se no ponto final do domínio, t_2 , em geral, discrepâncias entre as variáveis obtidas por integração numérica em t_2 e os respectivos valores prescritos neste ponto, já que os valores das condições iniciais livres não são conhecidos a priori.

Torna-se então necessário efetuar um ajuste das condições iniciais livres em t_1 em função das discrepâncias detectadas em t_2 , o que é feito através do método de Newton-Raphson. Os procedimentos de integração das equações e de ajuste das condições iniciais são repetidos sistematicamente até que todas as condições prescritas em t_2 sejam satisfeitas com o grau de precisão desejado. No caso de vibração livre tem-se que $\zeta_{ij}(0) = \zeta_{ij}(T)$ onde T é o período da solução.

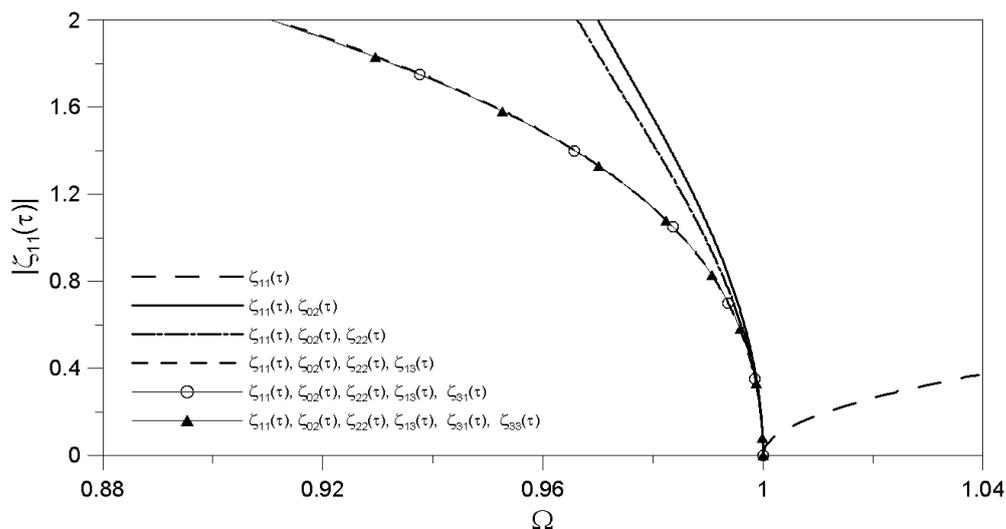


Figura 4.6 – Relação freqüência-amplitude para a casca cilíndrica, considerando diferentes expansões para os deslocamentos radiais.

A Figura 4.6 apresenta a relação frequência-amplitude da casca cilíndrica obtida a partir do método do tiro. Observa-se, como na análise estática não-linear, uma mudança no comportamento dinâmico não-linear da casca quando é somado, ao modo fundamental (ζ_{11}), o termo axi-simétrico ζ_{02} , passando a relação frequência-amplitude com ganho de rigidez para uma relação frequência-amplitude com perda de rigidez. A adição do termo de segunda ordem ζ_{02} e dos termos de terceira ordem (ζ_{13} , ζ_{31} , ζ_{33}) não impõe mudanças qualitativas ao comportamento não-linear da casca, mas intensifica a característica de perda de rigidez do sistema. Consta-se, também, que há uma convergência nos resultados da amplitude máxima de vibração do modo fundamental quando se chega à expansão modal definida em (4.21) até uma amplitude igual a duas vezes a espessura da casca ($\zeta_{11} = 2$).

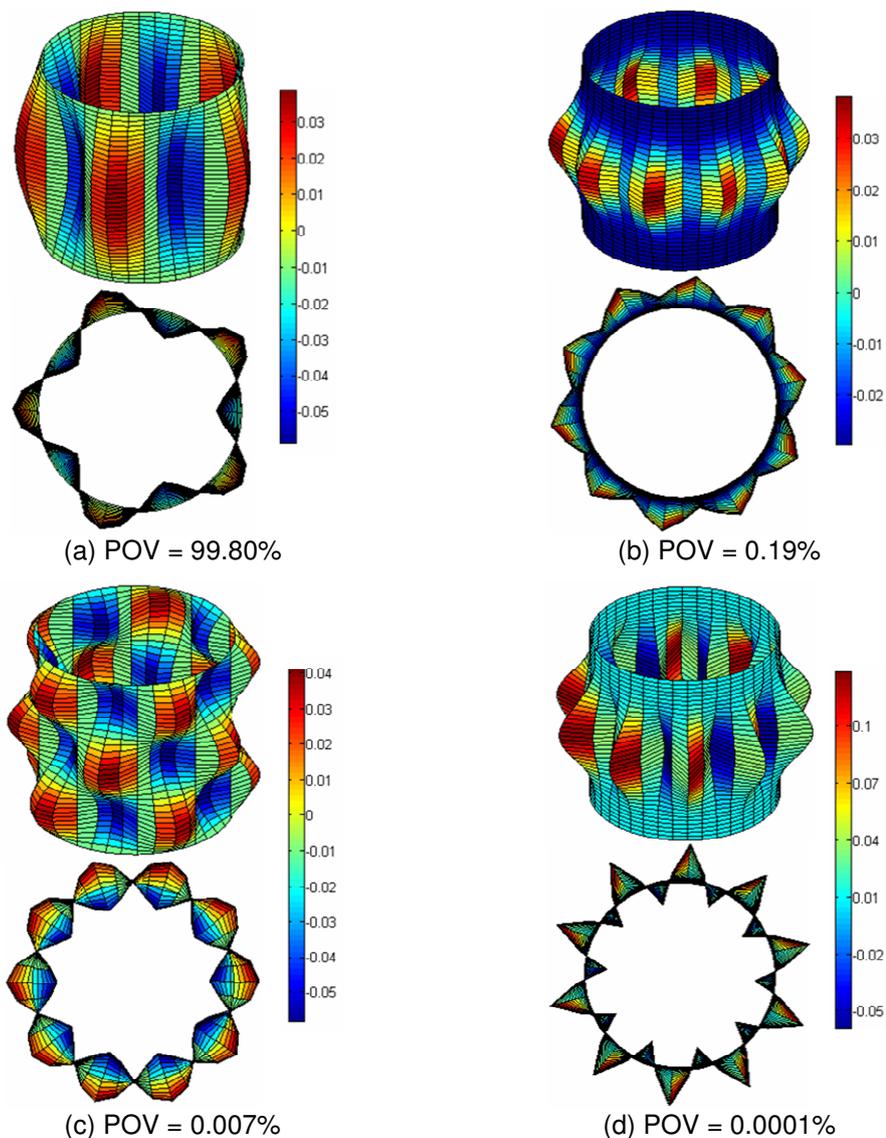


Figura 4.7 – Quatro primeiros POMs e seus respectivos POVs para a vibração livre não-linear da casca cilíndrica.

Tabela 4.2 – Participação dos modos usados na expansão modal dos quatro primeiros POMs na relação freqüência-amplitude da casca.

POM	POV	$\zeta_{11}(t)$	$\zeta_{02}(t)$	$\zeta_{22}(t)$	$\zeta_{13}(t)$	$\zeta_{31}(t)$	$\zeta_{33}(t)$
1	99,80 %	-24,39	-0,00011	-0,00001	0,282	-0,11	-0,003
2	0,19 %	-1,075	-10,997	-5,541	0,003	-0,001	0,00006
3	0,007 %	0,298	-0,224	-0,102	24,374	-0,773	0,270
4	0,0001 %	0,726	-4,323	15,566	-0,350	0,012	-0,004

Os quatro primeiros POMs e seus respectivos POVs, para o problema de vibração livre, são apresentados na Figura 4.7. Para a obtenção destes resultados os intervalos de amostragem para a construção da matriz de amostragem, (4.25), são obtidos em intervalos constantes da relação freqüência-amplitude, Figura 4.6, juntamente, com a expansão modal (4.21). Assim como na análise estática não-linear, os dois primeiros POMs são responsáveis pela maior parte da energia do sistema (99,99%). Novamente, cada POM é expandido em séries, sendo os resultados apresentados na Tabela 4.2.

Observa-se na Figura 4.7 que o primeiro POM é dominante (99,80%). As contribuições dos demais POMs, apesar de menores, são fundamentais para descrever o comportamento não-linear da casca, como ilustrado a seguir.

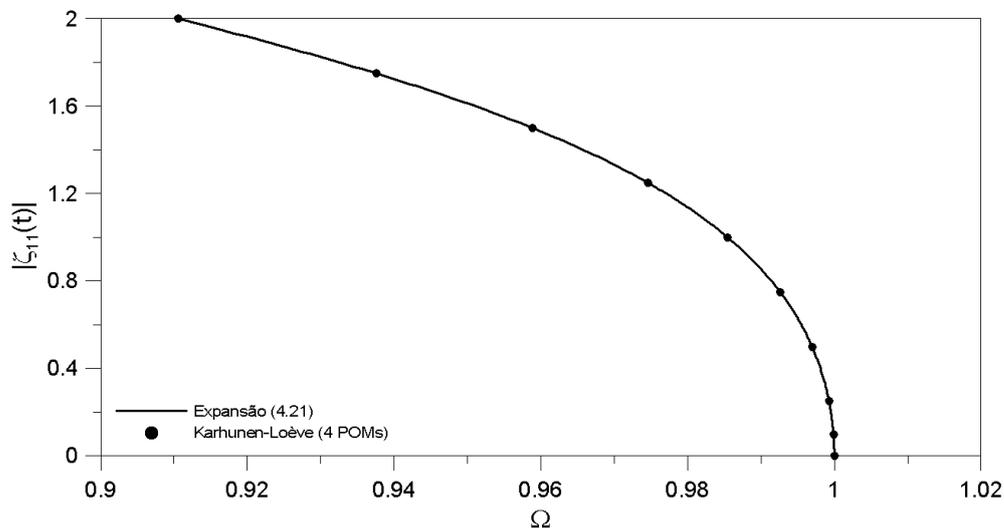


Figura 4.8 – Relação freqüência-amplitude para a casca cilíndrica usando a expansão modal obtida pelo método da perturbação e pela expansão de Karhunen-Loève.

A partir da Tabela 4.2, constata-se que o primeiro POM tem participação predominante do modo de vibração linear. O segundo POM é basicamente uma combinação dos dois modos de segunda ordem, ζ_{02} e ζ_{22} , enquanto que o

terceiro POM é dominado pelo modo de terceira ordem ζ_{13} . Novamente, os resultados estão em conformidade com o método da perturbação.

Cabe ressaltar que, partindo de uma formulação linear, o método de Karhunen-Loève fornece os modos e freqüências de vibração da estrutura (Wolter, 2001) e pode ser usado para identificar as características modais da estrutura a partir de uma resposta no tempo.

Apresenta-se na Figura 4.8 a reconstrução da relação freqüência-amplitude da casca cilíndrica utilizando os quatro primeiros POMs ilustrados na Figura 4.7. Observa-se que há uma excelente concordância, assim como na análise estática não-linear, entre a relação freqüência-amplitude obtida usando a expansão modal (4.21) e usando os quatro primeiros POMs da expansão de Karhunen-Loève.

Utilizando-se os coeficientes da Tabela 4.2 e a equação

$$\begin{aligned}
 W = \sum_{k=1}^4 A_k \left\{ \zeta_{11}^{(k)} \cos(n\theta) \text{sen}(q\xi) + \zeta_{13}^{(k)} \cos(n\theta) \text{sen}(3q\xi) \right. \\
 + \zeta_{31}^{(k)} \cos(3n\theta) \text{sen}(q\xi) + \zeta_{33}^{(k)} \cos(3n\theta) \text{sen}(3q\xi) \\
 + \zeta_{02}^{(k)} \left[\frac{3}{4} - \cos(2q\xi) + \frac{1}{4} \cos(4q\xi) \right] \\
 \left. + \zeta_{22}^{(k)} \cos(2n\theta) \left[\frac{3}{4} - \cos(2q\xi) + \frac{1}{4} \cos(4q\xi) \right] \right\} \quad (4.35)
 \end{aligned}$$

é possível escrever os deslocamentos radiais da casca como uma soma dos POMs, reduzindo o número de incógnitas do problema. Nessa equação, $\zeta_{ij}^{(k)}$ é a amplitude modal relativa ao k -ésimo POM.

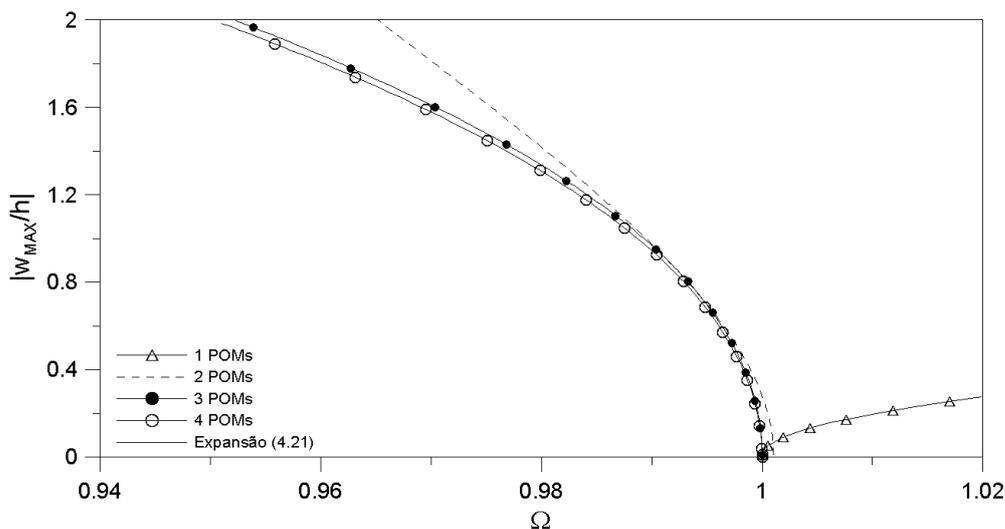


Figura 4.9 – Convergência da relação freqüência-amplitude usando um modelo de dimensão reduzida com o aumento do número de POMs.

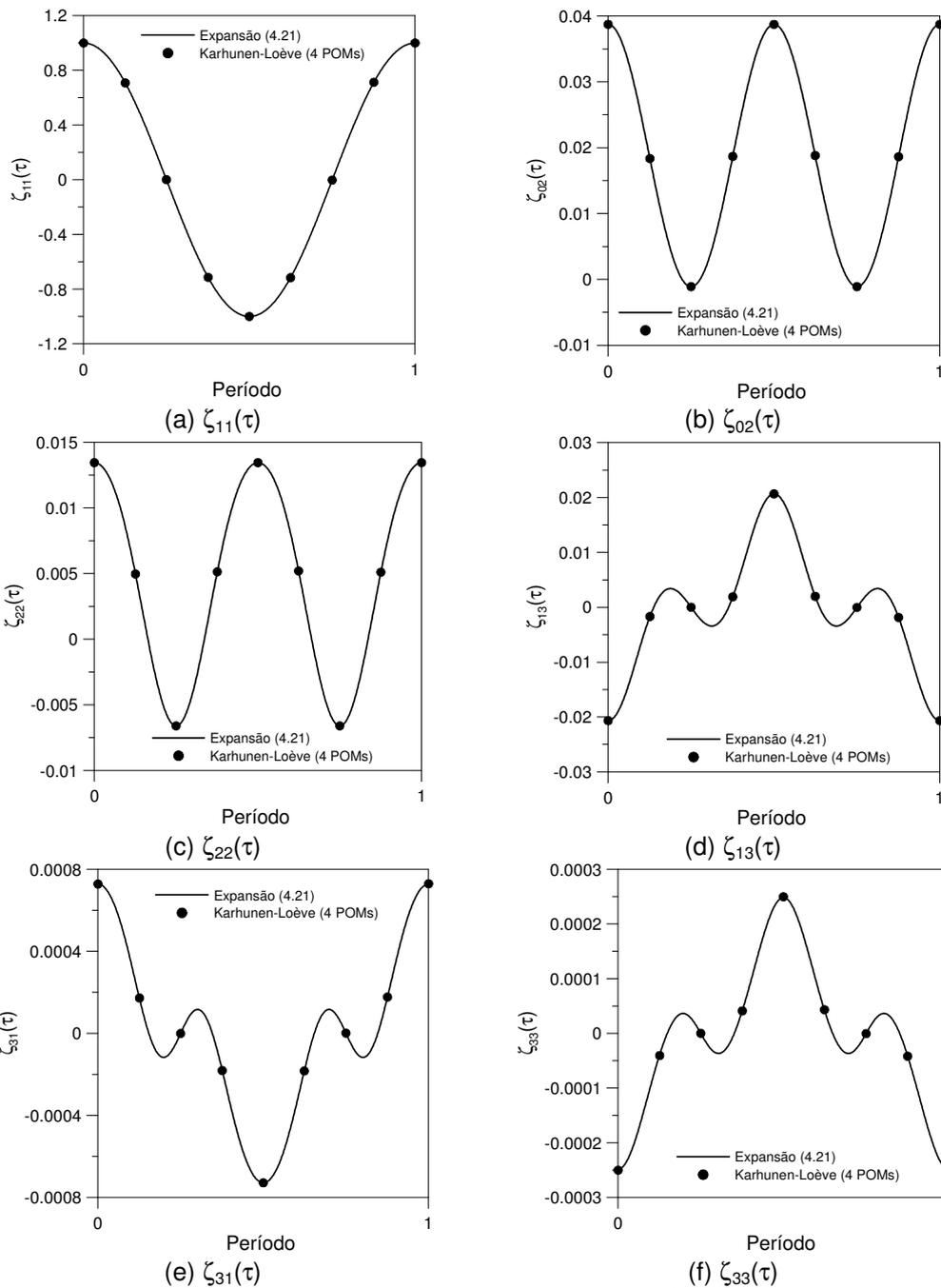


Figura 4.10 – Variação de cada amplitude modal ao longo de um período de vibração livre. $\Omega = 0.98$.

A Figura 4.9 mostra a relação frequência-amplitude considerando um número crescente de POMs. Observa-se, nesta figura, que, utilizando apenas o primeiro POM, o comportamento não-linear da casca cilíndrica é com ganho de rigidez, pois há a presença marcante do modo ζ_{11} , como observado na Tabela 4.2. Quando se insere os demais modos não-lineares (2 ou 3 POMs) há uma mudança significativa no comportamento não-linear da casca cilíndrica com

ganho de rigidez para um comportamento com perda de rigidez. Finalmente, observa-se que um modelo com apenas 3 POMs é capaz de descrever o comportamento da casca com a mesma precisão que a expansão (4.21).

A partir de um conjunto de condições iniciais relativas a um dado ponto da Figura 4.8, pode-se obter a variação de cada amplitude modal da equação (4.21) ao longo de um período da resposta. Os resultados, apresentados na Figura 4.10, são para o conjunto de condições iniciais:

$$\begin{aligned} \zeta_{11}(0) &= 1.0 & \zeta_{02}(0) &= 0.038 & \zeta_{22}(0) &= 0.013 & \zeta_{13}(0) &= -0.021 \\ \zeta_{31}(0) &= 0.0007 & \zeta_{33}(0) &= -0.0002 & & & & \\ \dot{\zeta}_{11}(0) &= \dot{\zeta}_{02}(0) = \dot{\zeta}_{22}(0) = \dot{\zeta}_{13}(0) = \dot{\zeta}_{31}(0) = \dot{\zeta}_{33}(0) &= 0.0 \end{aligned} \quad (4.36)$$

Nota-se, também, na Figura 4.10 que, utilizando o método de Karhunen-Loève com os seus quatro primeiros POMs, chega-se a resultados com excelente precisão quando comparados com o resultado obtido com a utilização da expansão modal (4.21).

Expandindo a variação temporal de cada amplitude modal em séries de Fourier, obtém-se:

$$\begin{aligned} \zeta_{11}(\tau) &= \cos(\Omega\tau) \\ \zeta_{02}(\tau) &= 0,018 + 0,020 \cos(2\Omega\tau) \\ \zeta_{22}(\tau) &= 0,004 + 0,010 \cos(2\Omega\tau) \\ \zeta_{13}(\tau) &= -0,012 \cos(\Omega\tau) - 0,009 \cos(3\Omega\tau) \\ \zeta_{31}(\tau) &= 0,0005 \cos(\Omega\tau) + 0,0003 \cos(3\Omega\tau) \\ \zeta_{33}(\tau) &= -0,0002 \cos(\Omega\tau) + 0,0001 \cos(3\Omega\tau) \end{aligned} \quad (4.37)$$

Estas expansões concordam com as potências da função temporal $f(t)$ do modo linear de vibração na solução geral do método de perturbação, equação (4.10).

Finalizando esta análise dinâmica não-linear, deduz-se um modelo reduzido-reduzido para a casca cilíndrica com o auxílio da relação frequência-amplitude obtida para a expansão modal (4.21), seguindo o mesmo procedimento apresentado no item anterior. Obtêm-se, assim, os seguintes polinômios:

$$\begin{aligned}
\zeta_{02}(t) &= 3.78 \times 10^{-2} \zeta_{11}^2(t) + 8.82 \times 10^{-4} \zeta_{11}^4(t) + 3.38 \times 10^{-5} \zeta_{11}^6(t) \\
\zeta_{22}(t) &= 8.89 \times 10^{-3} \zeta_{11}^2(t) + 5.19 \times 10^{-4} \zeta_{11}^4(t) - 6.92 \times 10^{-4} \zeta_{11}^6(t) \\
\zeta_{13}(t) &= -2.17 \times 10^{-2} \zeta_{11}^3(t) + 1.11 \times 10^{-3} \zeta_{11}^5(t) - 2.56 \times 10^{-4} \zeta_{11}^7(t) \\
\zeta_{31}(t) &= 4.99 \times 10^{-4} \zeta_{11}^3(t) + 2.58 \times 10^{-4} \zeta_{11}^5(t) - 4.56 \times 10^{-5} \zeta_{11}^7(t) \\
\zeta_{33}(t) &= -2.33 \times 10^{-5} \zeta_{11}^3(t) - 2.45 \times 10^{-4} \zeta_{11}^5(t) + 4.27 \times 10^{-5} \zeta_{11}^7(t)
\end{aligned} \quad (4.38)$$

A partir das relações (4.38), obtém-se o modelo reduzido-reduzido, com apenas um grau de liberdade, para a casca cilíndrica. A Figura 4.11 ilustra a comparação dos resultados obtidos para a relação frequência-amplitude da casca utilizando a expansão modal (4.21) e o modelo definido pela equação (4.38). Observa-se que o modelo simplificado consegue capturar o comportamento não-linear da casca e mantém uma boa precisão para amplitudes de vibração até em torno de duas vezes a espessura da casca.

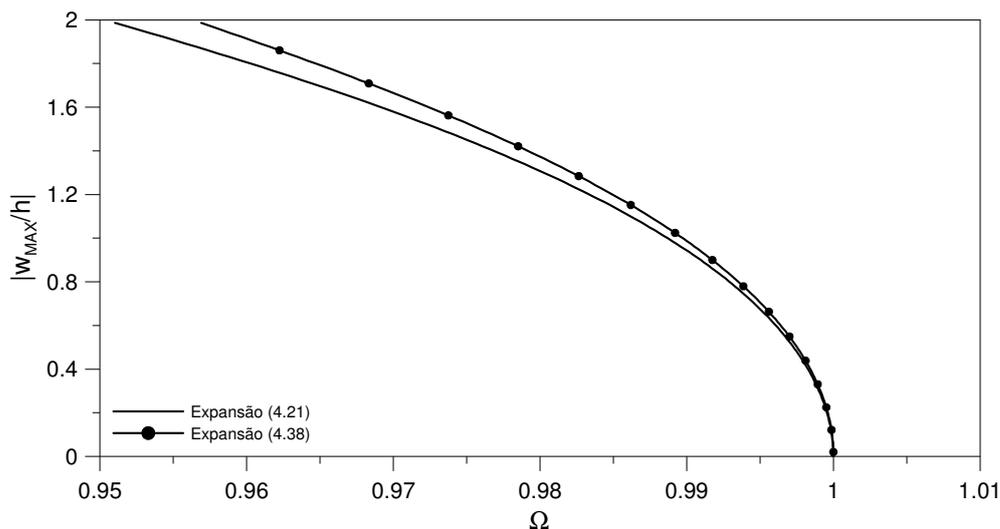


Figura 4.11 – Comparação da relação frequência-amplitude utilizando a expansão modal (4.21) e o modelo com apenas um grau de liberdade (4.38).

4.5. Modelo reduzido *versus* método dos elementos finitos

Neste item é apresentada uma análise via elementos finitos das vibrações livres da casca com o intuito de verificar a qualidade dos resultados obtidos anteriormente. O programa computacional utilizado para tal fim, é o Abaqus®.

Primeiramente são calculadas as frequências naturais da casca cilíndrica simplesmente apoiada. Nesse estudo inicial, verifica-se que uma malha de 81 x 51 (circunferencial x longitudinal) de elementos do tipo S4R (elemento de casca

com quatro nós e integração reduzida) apresenta uma boa convergência dos resultados. A Tabela 4.3 apresenta os três primeiros modos de vibração da casca cilíndrica e suas respectivas freqüências obtidos através do método dos elementos finitos e a partir da linearização da equação (2.34).

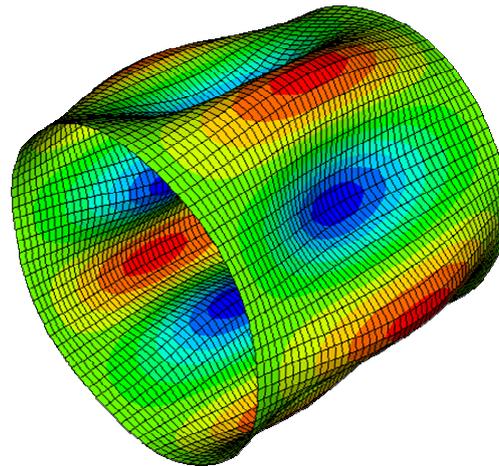
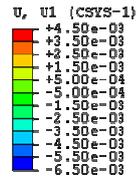
Tabela 4.3 – Freqüências naturais, em Hz, para uma casca cilíndrica simplesmente apoiada.

m	n	Abaqus	Presente trabalho
1	5	490,82	503,73
	6	539,63	547,04
	4	576,00	596,08

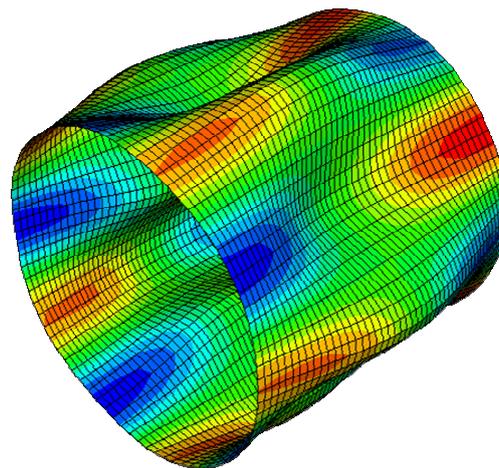
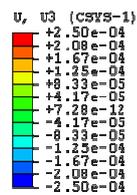
Apesar da pequena diferença nas freqüências naturais, o modo de vibração associado à freqüência mínima é o mesmo em ambos os procedimentos. Deve-se ressaltar que no Abaqus a teoria utilizada é a de Budiansky-Sanders (Prager, 1963), enquanto que, nesta tese, utiliza-se a teoria não-linear de Donnell. Pequenas diferenças entre as freqüências naturais em virtude da utilização de diferentes teorias de casca estão registradas na literatura (Mazúch et al., 1996; Pellicano, 2007). Adicionalmente neste trabalho não se considera a inércia da casca nas direções axial e circunferencial, embora esta simplificação tenha pouca influência nos resultados apresentados.

Quanto às condições de contorno de problema, o modelo utilizado no Abaqus é condizente com o modelo desta tese e simula as condições de apoio clássicas e mantém as simetrias dos campos de deslocamentos. A Figura 4.12 ilustra o campo de deslocamentos radial e axial da casca cilíndrica que foram obtidos com a utilização do Abaqus para o modo associado à freqüência natural mínima ($m = 1, n = 5$). Nota-se na Figura 4.12a que os deslocamentos radiais em ambas as extremidades são nulos, satisfazendo a condição de contorno (2.24). Já o campo de deslocamentos axiais ilustrado na Figura 4.12b está de acordo com a condição de antimetria (2.21) que requer que os deslocamentos axiais no centro da casca sejam nulos. Cabe ressaltar que as formulações usuais de elementos finitos para cascas na permitem impor de forma precisa as condições de contorno naturais (2.25) e (2.26).

Estas diferenças devem ser levadas em consideração nas comparações aqui apresentadas.



(a)



(b)

Figura 4.12 – Campo de deslocamentos (a) radiais e (b) axiais da casca cilíndrica para o modo $m = 1$ e $n = 5$. Resultado obtido através do Abaqus.

Para a análise não-linear em elementos finitos, obteve-se a relação frequência-amplitude para um determinado ponto da casca cilíndrica, utilizando o procedimento proposto em Nandakumar e Chatterjee (2005) para a obtenção de relações frequência-amplitude a partir de um resultado experimental. Os autores propõem que, se existir uma resposta no tempo levemente amortecida de um sistema estrutural, é possível se conhecer a relação frequência-amplitude desse sistema a partir das relações:

$$A = \frac{A_1 + A_2}{2}; \quad \bar{\omega} = \frac{1}{T_1 - T_2} \quad (4.39)$$

onde A_1 é a média entre dois picos positivos e consecutivos, A_2 é o módulo do pico negativo existente entre os dois picos positivos que geraram A_1 e T_1 e T_2 são os instantes de tempo dos dois picos positivos.

Pode-se substituir o experimento físico pelos resultados obtidos pelo Abaqus (Figura 4.13) e construir a relação frequência-amplitude. A Figura 4.14 apresenta uma comparação entre a relação frequência-amplitude obtida a partir do Abaqus e a obtida a partir da expansão (4.21). Nesta figura observa-se que o modelo reduzido proposto nesta tese, consegue capturar o comportamento não-linear com perda de rigidez da casca cilíndrica apesar da pequena diferença nos resultados em virtude das diferenças entre os dois modelos. O fato de o modelo obtido via elementos finitos necessitar de um pequeno amortecimento insere mais um ponto para a divergência dos resultados, já que no caso analítico a relação frequência-amplitude é obtida para uma casca em vibração livre não-amortecida. O conjunto de pontos amostrados pode ser interpolado por uma curva de regressão polinomial através dos mínimos quadrados.

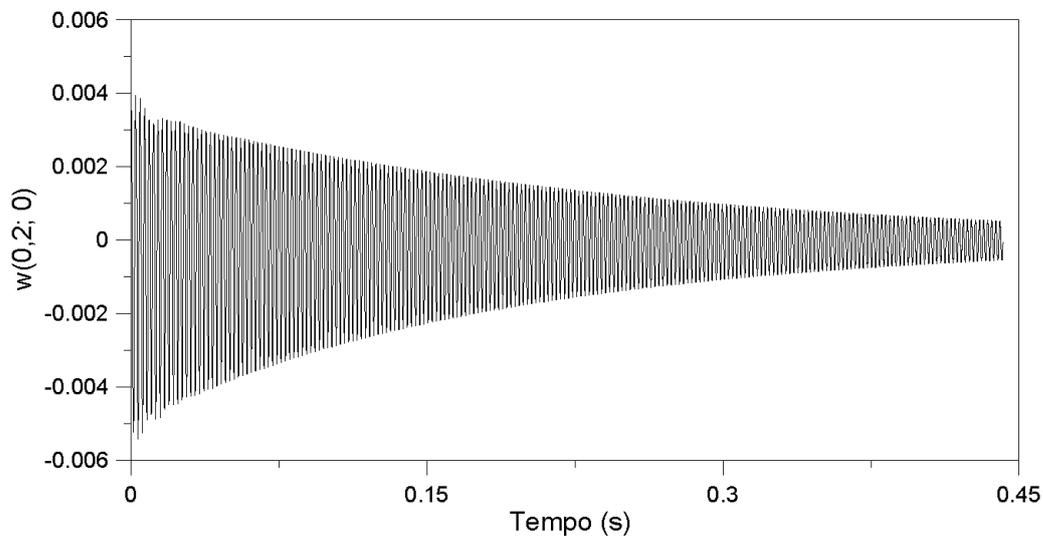


Figura 4.13 – Variação do deslocamento radial no ponto (0,2; 0) em função do tempo obtido a partir do Abaqus.

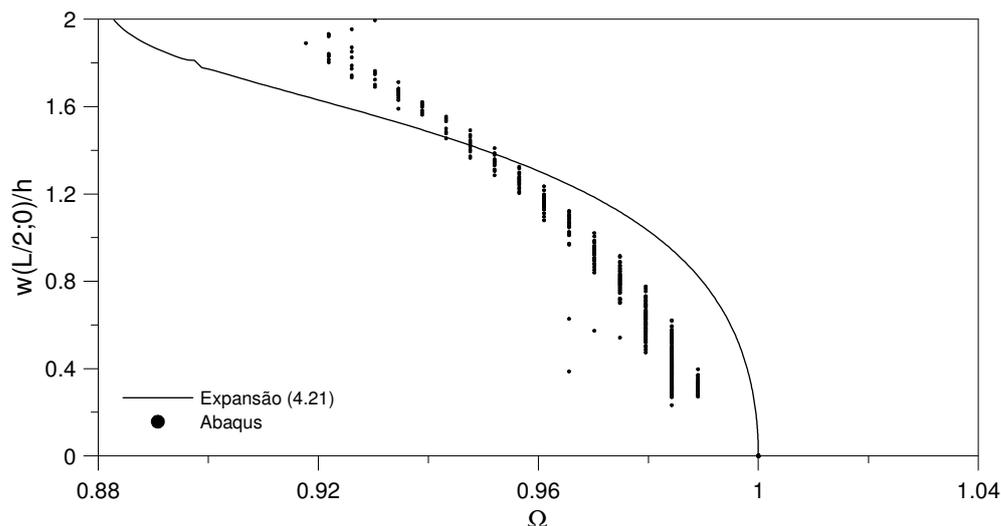


Figura 4.14 – Comparação entre os resultados do Abaqus e o modelo analítico da relação frequência-amplitude.

A construção da Figura 4.14, a partir do método dos elementos finitos, foi obtida após aplicar uma perturbação inicial na forma do primeiro modo de vibração não-linear e deixar a casca em vibração livre levemente amortecida. Essa análise exige um grande esforço computacional. Faz-se necessária, na análise dinâmica não-linear, a utilização do comando *dynamic* no Abaqus, que assim calcula a resposta no tempo integrando diretamente todas as equações movimento do sistema. Com a discretização aqui adotada, tem-se um total de 24876 equações. O passo de tempo utilizado para a integração no tempo dessas equações foi de 1×10^{-5} s.

Ainda, outro agravante que deve ser destacado é o amortecimento utilizado que deve ser pequeno para que o decremento entre os picos não seja abrupto, nesse modelo foi utilizado um amortecimento de 0,15%. Assim o tempo de integração do problema, para que se obtenha uma nuvem de pontos satisfatória, foi de 0,45 segundos, ou seja, 45000 passos. Diante desse esforço computacional para se obter a relação frequência-amplitude da casca cilíndrica, os modelos reduzidos se apresentam como uma excelente alternativa para a análise dinâmica não-linear.

A seguir, emprega-se o método de Karhunen-Loève para a determinação dos POMs e POVs a partir dos resultados obtidos por elementos finitos.

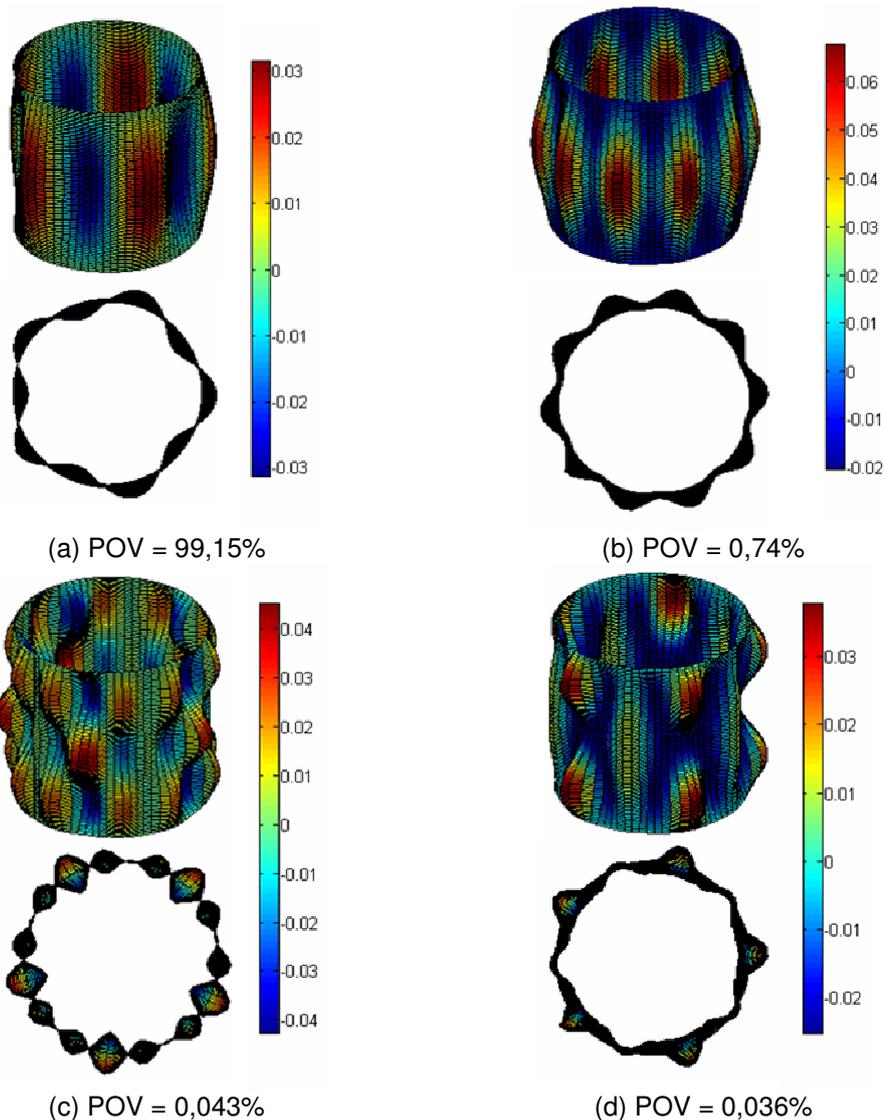


Figura 4.15 – Quatro primeiros POMs e seus respectivos POVs para a vibração livre não-linear e levemente amortecida da casca cilíndrica obtida a partir do Abaqus.

A Figura 4.15 ilustra os quatro primeiros POMs e seus respectivos POVs para a vibração livre não-linear da casca cilíndrica levemente amortecida. A matriz de amostragem, necessária no método de Karhunen-Loève, foi montada a partir da mesma resposta no tempo que deu origem à Figura 4.14.

A importância relativa de cada modo de (4.21) em cada POM é obtida quando se expande cada POM em séries destes modos. A Tabela 4.4 apresenta os coeficientes modais para cada POM ilustrado na Figura 4.15. Observa-se, nesta tabela, que os modos não-lineares obtidos da solução por elementos finitos apresentam uma participação modal similar àquela obtida com o modelo analítico. O primeiro POM, que corresponde a 99,15% da energia do sistema, é dominado, principalmente, pelo modo linear, enquanto que o segundo POM é uma combinação dos modos de segunda ordem ζ_{02} e ζ_{22} e responde por 0,74%

da energia do sistema. Já o terceiro POM tem a participação dominante do modo ζ_{13} e do modo ζ_{22} , sendo o primeiro preponderante, e contribui com 0,043% da energia total. Finalmente, o quarto POM é uma combinação de modos de terceira ordem com modos de segunda ordem, porém a participação dos modos de segunda ordem é mais relevante. Este POM responde por 0,036% da energia total do sistema.

Tabela 4.4 – Participação dos modos usados na expansão modal dos quatro primeiros POMs obtidos a partir do método do elementos finitos.

POM	POV	ζ_{11}	ζ_{02}	ζ_{22}	ζ_{13}	ζ_{31}	ζ_{33}
1	99,15 %	15,2158	0,1158	-0,0703	-0,2229	0,0430	-0,0001
2	0,740 %	-0,2924	-6,1290	-4,6607	-0,0581	0,1249	-0,0020
3	0,043 %	-0,1781	-0,5595	-2,1758	10,0920	0,0231	-0,0654
4	0,036 %	-0,1881	3,2153	-4,0066	8,2501	0,1833	0,0751