3
Modelagem do fluido interno

Observa-se que em muitas aplicações de cascas cilíndricas há o contato, total ou parcial, com um meio fluido. A presença do fluido influencia o comportamento dinâmico da casca. A pressão exercida pelo fluido é considerada, tradicionalmente, como uma massa adicional à massa da casca, provocando, assim, um aumento da inércia do sistema.

Uma análise para este tipo de problema exige a solução simultânea das equações de movimento da casca e do fluido, juntamente com as condições de contato, condições iniciais e condições de contorno. Tem-se, então, um problema de interação fluido-estrutura, onde os deslocamentos da casca dependem da pressão exercida pelo fluido que, por sua vez, depende do movimento da casca.

Neste trabalho, considera-se um fluido incompressível e não-viscoso interno à casca, sendo seu movimento considerado irrotacional. Essas hipóteses simplificam os cálculos para a obtenção da pressão hidrodinâmica (P_H), já que o movimento do fluido, neste caso, pode ser descrito por um potencial de velocidade ϕ.

3.1.
Equações básicas do fluido

O movimento de um fluido é conhecido se a cada instante t podem-se determinar, além da distribuição de velocidade $\mathbf{V}(\mathbf{x},t)$, duas quantidades quaisquer relativas ao seu comportamento termodinâmico, como, por exemplo, a pressão $p(\mathbf{x},t)$ e a densidade $\rho_F(\mathbf{x},t)$. As quantidades $\mathbf{V}$, p e ρ_F estão relacionadas a um ponto $\mathbf{x}$ no espaço (Landau e Lifshitz, 1966).

O escoamento de um fluido não-viscoso e incompressível é descrito pela equação de continuidade:

$$\operatorname{div} \mathbf{V} = 0 \tag{3.1}$$

que traduz sob forma matemática a condição de incompressibilidade, e a equação de Euler:

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t}+(\mathbf{V}\cdot\text{grad})\mathbf{V}=-\frac{\text{grad}\,p}{\rho_F}+\mathbf{F} \tag{3.2}$$

que é precisamente a equação de movimento. O primeiro termo refere-se à aceleração das partículas em movimento e o segundo, às forças hidrodinâmicas $(-\,\text{grad}\,p/\rho_F)$ e externas (**F**) aplicadas a estas partículas.

O sistema de equações formado pelas equações (3.1) e (3.2) é bastante geral. Para utilizá-lo em uma série de problemas hidrodinâmicos, devem-se impor certas condições complementares.

Se o fluido encontra-se em um campo de forças conservativas, as forças externas **F** podem ser derivadas a partir de um potencial:

$$\mathbf{F}=\text{grad}\,\mathrm{T} \tag{3.3}$$

Por exemplo, se o fluido está sob a ação de forças gravitacionais orientadas segundo um eixo X, tem-se que $\mathrm{T}=-g\mathrm{X}$ onde g é a aceleração da gravidade. Assim a equação (3.2) é reescrita da seguinte maneira:

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t}+(\mathbf{V}\cdot\text{grad})\mathbf{V}=-\frac{\text{grad}\,p}{\rho_F}+\mathbf{g} \tag{3.4}$$

Nestas circunstancias o teorema de Kelvin afirma que a circulação:

$$\Gamma=\oint_{\ell}(\mathbf{V}\cdot dx) \tag{3.5}$$

do vetor velocidade ao longo de um “contorno fluido” fechado qualquer permanece constante durante o movimento, ou seja (Landau e Lifshitz, 1966):

$$\frac{d\Gamma}{dt}=\frac{d}{dt}\oint_{\ell}(\mathbf{V}\cdot dx)=0 \tag{3.6}$$

Para um movimento em que a velocidade inicial é nula, a circulação ao longo de um “contorno fluido” fechado é identicamente nula. Tem-se, então, em virtude da fórmula de Stokes:

$$\frac{d}{dt}\oint_{\ell}(\mathbf{V}\cdot dx)=\int_S \text{rot}\,\mathbf{V}\cdot\mathbf{n}\,dS \tag{3.7}$$

(onde S é uma superfície estendida sobre o contorno ℓ) e do fato que a superfície S é arbitrária, que:

$$\text{rot}\,\mathbf{V}=0 \tag{3.8}$$

durante o escoamento.

A equação (3.8) é a condição necessária para a ausência de rotação (movimento irrotacional) e suficiente para que exista uma função escalar $\phi(\mathbf{x},t)$, denominada potencial de velocidade, tal que (Landau e Lifshitz, 1966)

$$\mathbf{V} = \operatorname{grad}\phi \tag{3.9}$$

No caso da velocidade ser completamente definida por $\phi(\mathbf{x}, t)$, já não é mais necessário trabalhar com a função vetorial **V**, bastando determinar a função escalar $\phi(\mathbf{x}, t)$ que satisfaça o problema. Substituindo (3.9) em (3.1), observa-se que $\phi(\mathbf{x}, t)$ é solução da equação de Laplace:

$$\operatorname{div}(\operatorname{grad}\phi) = \nabla^2 \phi = 0 \tag{3.10}$$

A equação (3.2) permite determinar **V** em função do tempo e da pressão *p*. A existência de um potencial $\phi(\mathbf{x}, t)$ permite igualmente simplificar esta equação. As equações (3.3) e (3.9) permitem que se reescreva a equação (3.2) da seguinte maneira:

$$\operatorname{grad}\left[\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2}(\operatorname{grad}\phi)^2 + \frac{p}{\rho_F} - \mathrm{T}\right] = 0 \tag{3.11}$$

de onde se obtém a fórmula dita de Cauchy-Lagrange:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2}(\operatorname{grad}\phi)^2 + \frac{p}{\rho_F} - \mathrm{T} = f(t) \tag{3.12}$$

onde *f(t)* é uma função do tempo e pode ser tomada como zero sem perda de generalidade.

Para um escoamento estacionário, tem-se que o potencial $\phi(\mathbf{x}, t)$ independe do tempo, ou seja, $\partial\phi/\partial t = 0$, *f(t)* = constante, e a equação (3.12) reduz-se à fórmula de Bernoulli:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2}(\operatorname{grad}\phi)^2 + \frac{p}{\rho_F} - \mathrm{T} = \text{constante} \tag{3.13}$$

A resolução do problema dinâmico assim definido se reduz à procura da solução das equações (3.10) e (3.12) que satisfazem as condições de contorno na interface fluido-estrutura.

3.2.
Determinação do potencial de velocidade do fluido

Na Figura 3.1 está ilustrada uma casca cilíndrica com fluido interno a uma altura *H*. Pode-se, perceber que, para *x* < *H*, o fluido exerce uma pressão interna nas paredes da casca, e, para *x* = *H* existe uma superfície livre do fluido que pode movimentar-se na direção vertical e interagir-se com a vibração da casca.

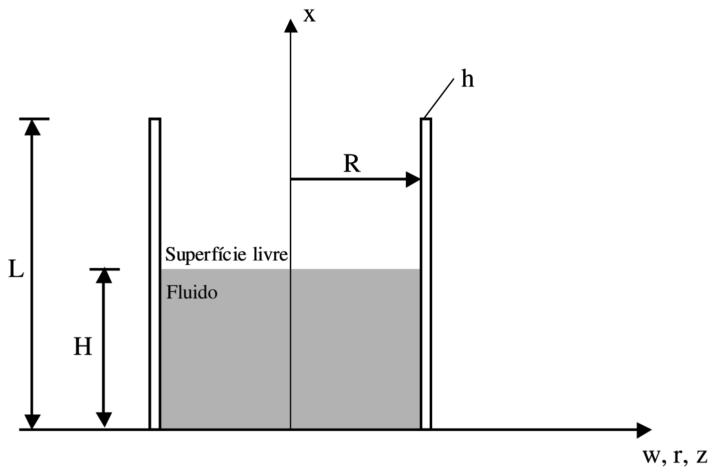

Figura 3.1 – Representação esquemática do fluido interno à casca cilíndrica.

A partir da equação (3.13), tem-se que a pressão p exercida pelo fluido, que daqui por diante é definida como a pressão hidrodinâmica, P_H, pode ser escrita em função do potencial de velocidade do fluido desde que se considere que $\mathrm{T}=0$. Chega-se assim a:

$$P_H = -\rho_F \left[\dot{\phi} + \frac{1}{2}\left(\phi_{,x}^2 + \frac{1}{r^2}\phi_{,\theta}^2 + \phi_{,r}^2 \right) \right] \Bigg|_{r=R} \qquad (3.14)$$

O potencial de velocidade ϕ deve satisfazer à condição de continuidade, equação (3.10), que em coordenadas cilíndricas é escrita na forma:

$$\phi_{,rr} + \frac{1}{r}\phi_{,r} + \frac{1}{r^2}\phi_{,\theta\theta} + \phi_{,xx} = 0 \qquad (3.15)$$

Além da equação (3.15), o potencial ϕ deve atender às condições de contorno apropriadas na interface entre o fluido e a estrutura. Neste trabalho, consideram-se dois casos distintos para descrever a interface entre o fluido e a estrutura. Um deles considera a casca cilíndrica apoiada em um fundo rígido que impede o deslocamento axial do fluido nessa superfície. No segundo caso considera-se que a casca está apoiada em um fundo flexível que não oferece nenhuma restrição ao movimento axial do fluido.

Assim, as condições de contorno, para o caso em que há a presença do fundo rígido, são:

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = 0 \Bigg|_{x=0} \qquad (3.16)$$

que garante a velocidade axial nula no fundo rígido,

$$\left.\frac{\partial \phi}{\partial r} = \dot{w}\right|_{r=R} \tag{3.17}$$

que é a condição de impenetrabilidade, garantindo a continuidade dos deslocamentos radiais entre o fluido e a casca cilíndrica, e

$$\phi = 0\big|_{x=H} \tag{3.18}$$

que afirma ser a pressão hidrodinâmica nula na superfície livre do fluido.

Para o caso em que o fundo da casca cilíndrica não oferece impedimento aos deslocamentos axiais do fluido, deve-se alterar a condição de contorno (3.16) para:

$$\phi = 0\big|_{x=0} \tag{3.19}$$

pois a superfície que antes era rígida torna-se uma superfície livre como a descrita em $x = H$.

Tem-se que o potencial de velocidade:

$$\phi = \sum_{\overline{m}=1}^{\overline{M}} A_{\overline{m}}(t)\cos\left(\frac{(2\overline{m}-1)\pi x}{2H}\right)\mathrm{I}_n\left(\frac{(2\overline{m}-1)\pi r}{2H}\right) \tag{3.20}$$

atende as condições de contorno (3.16) e (3.18), ou seja, o caso em que há um fundo rígido na base ($x = 0$) da casca cilíndrica (Kim et al., 2004). Nesta equação, I_n é a função modificada de Bessel de primeira classe e ordem n.

Para determinar a amplitude de cada modo $A_{\overline{m}}$, presente na equação (3.20), emprega-se a condição de impenetrabilidade, equação (3.17). Empregando o do método de Galerkin e utilizando como função peso o próprio termo trigonométrico da equação (3.20), tem-se que as amplitudes modais podem ser escritas em função do campo de deslocamentos laterais da casca, w, por:

$$A_{\overline{m}}(t) = \left.\frac{\displaystyle\int_0^H \left[\left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)\cos\left(\frac{(2\overline{m}-1)\pi x}{2H}\right)\right]dx}{\displaystyle\int_0^H \left[\left(\frac{\partial \phi}{\partial r}\right)\cos\left(\frac{(2\overline{m}-1)\pi x}{2H}\right)\right]dx}\right|_{r=R} \tag{3.21}$$

Finalmente, a pressão hidrodinâmica de uma casca cilíndrica apoiada sobre um fundo rígido é determinada a partir da equação (3.14) linearizada, obtendo-se:

$$P_H = -\rho_F \sum_{\overline{m}=1}^{\overline{M}} \frac{\partial A_{\overline{m}}(t)}{\partial t} \cos\left(\frac{(2\overline{m}-1)\pi x}{2H}\right) \mathrm{I}_n\left(\frac{(2\overline{m}-1)\pi r}{2H}\right) \tag{3.22}$$

A partir da equação (3.22), observa-se que a pressão hidrodinâmica, P_H, apresenta em seus termos a primeira derivada com relação ao tempo da amplitude $A_{\overline{m}}$ que, por sua vez, traz consigo, após a resolução da equação (3.21), termos com a primeira derivada com relação ao tempo de *w*. Assim, a pressão hidrodinâmica apresenta termos relativos à segunda derivada de *w* com relação ao tempo, ou seja, termos inerciais que são adicionados aos termos inerciais do sistema de equações de movimento da casca cilíndrica, equação (2.21).

De maneira semelhante, a pressão hidrodinâmica para uma casca cilíndrica que não esteja apoiada sobre um fundo rígido, caso em que a condição de contorno (3.16) é substituída pela condição de contorno (3.19), o potencial de velocidade do fluido, equação (3.20), é dado por:

$$\phi = \sum_{\overline{m}=1}^{\overline{M}} A_{\overline{m}}(t) \cos\left(\frac{\pi(2\overline{m}-1)(H+2x)}{4H}\right) \mathrm{I}_n\left(\frac{(2\overline{m}-1)\pi r}{2H}\right) \tag{3.23}$$

para atender as condições de contorno (3.18) e (3.19).

A determinação das amplitudes $A_{\overline{m}}$ se dá, também, a partir da aplicação do método de Galerkin. Utilizando como função peso o termo trigonométrico da equação (3.23), tem-se para $A_{\overline{m}}$:

$$A_{\overline{m}}(t) = \left. \frac{\displaystyle\int_0^H \left[\left(\frac{\partial w}{\partial t}\right) \cos\left(\frac{\pi(2\overline{m}-1)(H+2x)}{4H}\right) \right] dx}{\displaystyle\int_0^H \left[\left(\frac{\partial \phi}{\partial r}\right) \cos\left(\frac{\pi(2\overline{m}-1)(H+2x)}{4H}\right) \right] dx} \right|_{r=R} \tag{3.24}$$

Observa-se que, para a determinação da pressão hidrodinâmica, deve-se conhecer o campo de deslocamento radial, *w*. No próximo capítulo, é apresentada a formulação utilizada neste trabalho para a determinação do campo de deslocamento radial.

3.3. Considerações sobre a vibração da superfície livre do fluido (*sloshing*)

Os efeitos da vibração superfície livre de um fluido no interior de uma casca cilíndrica foram investigados por diversos autores, como, por exemplo, Gonçalves e Ramos (1996), Amabili et al. (1998) e Kim et al. (2004).

Neste caso, é comum se considerar que a casca cilíndrica está apoiada sobre um fundo rígido e que o potencial de velocidade do fluido pode ser descrito por:

$$\bar{\phi} = \phi + \phi^S \tag{3.25}$$

sendo $\bar{\phi}$ o potencial de velocidade total do fluido considerando-se a soma do potencial de velocidade da casca cilíndrica sobre um fundo rígido, ϕ, definido na equação (3.20), e do potencial de velocidade relativo à superfície livre do fluido.

Como a menor freqüência natural da casca é usualmente muito maior do que as menores freqüências naturais da superfície livre do fluido, considera-se que o movimento da superfície livre é incapaz de excitar o primeiro modo de vibração da casca cilíndrica. Assume-se assim que o fluido está interagindo com uma casca rígida e deve satisfazer as seguintes condições de contorno:

$$\left.\frac{\partial \phi^S}{\partial x} = 0\right|_{x=0} \tag{3.26}$$

que garante a velocidade axial nula no fundo rígido, e

$$\left.\frac{\partial \phi^S}{\partial r} = 0\right|_{r=R} \tag{3.27}$$

que especifica que a casca cilíndrica é rígida.

O potencial de velocidade:

$$\phi^S = \sum_{\bar{k}=1}^{\bar{K}} B_{\bar{k}}(t) \cosh\left(\frac{\varepsilon_{\bar{k}n}\, x}{R}\right) \mathrm{J_n}\left(\frac{\varepsilon_{\bar{k}n}\, r}{R}\right)\left(\frac{\partial w}{\partial t}\right) \tag{3.28}$$

atende automaticamente a condição de contorno (3.26). Nesta equação, $\mathrm{J_n}$ é a função de Bessel de primeira classe e ordem *n*. Substituindo-se (3.28) em (3.27), chega-se à restrição:

$$\left.\frac{d}{dr}\left[\mathrm{J_n}\left(\frac{\varepsilon_{\bar{k}n}\, r}{R}\right)\right] = 0\right|_{r=R} \tag{3.29}$$

onde $\varepsilon_{\bar{k}n}$ são as raízes dessa equação de restrição.

Tem-se, ainda, que o potencial de velocidade deve atender à seguinte equação de *sloshing*:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\phi^S = g\frac{\partial}{\partial x}\left(\phi^S + \phi\right) \tag{3.30}$$

A equação (3.30) é válida para todo intervalo $0 \le r \le R$. Substituindo (3.20) e (3.28) em (3.30) e, em seguida, aplicando o método de Galerkin com a função peso $J_n\left(\varepsilon_{\bar{k}n}\, r/R\right)$ chega-se a:

$$\begin{aligned}
&\sum_{\bar{k}=1}^{\bar{K}}\int_0^R\left[\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}B_{\bar{k}}(t)\right)\cosh\left(\frac{\varepsilon_{\bar{k}n}\,x}{R}\right)\mathrm{J}_{\mathrm{n}}^2\left(\frac{\varepsilon_{\bar{k}n}\,r}{R}\right)\left(\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\right)\right]r\,dr \\
&= -g\sum_{\bar{k}=1}^{\bar{K}}\sum_{\bar{m}=1}^{\bar{M}}\int_0^R\left\{\left[\left(\frac{\partial A_{\bar{m}}}{\partial x}\right)\cos\left(\frac{(2\bar{m}-1)\pi x}{2H}\right)\right.\right. \\
&\left.-\frac{(2\bar{m}-1)\pi A_{\bar{m}}}{2}\mathrm{sen}\left(\frac{(2\bar{m}-1)\pi x}{2H}\right)\right]\times \\
&\left.\mathrm{I}_{\mathrm{n}}\left(\frac{(2\bar{m}-1)\pi r}{2H}\right)\mathrm{J}_{\mathrm{n}}\left(\frac{\varepsilon_{\bar{k}n}\,r}{R}\right)\right\}r\,dr \\
&+g\sum_{\bar{k}=1}^{\bar{K}}\int_0^R\left[B_{\bar{k}}(t)\frac{\varepsilon_{\bar{k}n}}{R}\mathrm{J}_{\mathrm{n}}^2\left(\frac{\varepsilon_{\bar{k}n}\,r}{R}\right)\right]r\,dr
\end{aligned} \tag{3.31}$$

onde $A_{\bar{m}}$ é a solução da equação (3.21).

Para determinar as amplitudes $B_{\bar{k}}$ presentes na equação (3.31), deve-se resolver esta equação juntamente com o sistema de equações não-lineares da casca cilíndrica, equação (2.21).

Verifica-se, na equação (3.31), que o primeiro termo do lado direito da igualdade apresenta a primeira derivada com relação a coordenada axial do termo $A_{\bar{m}}$ que, por sua vez, é função de *w*. Assim, quando se considera os efeitos da superfície livre na vibração da casca cilíndrica, a equação de *sloshing* do fluido insere, além dos termos inerciais presentes na pressão hidrodinâmica, termos que são função puramente de *w*, modifica-se assim a rigidez e a inércia da casca.