2
Modelagem da casca cilíndrica

As cascas cilíndricas podem ser definidas como um corpo cuja distância de qualquer ponto interno deste corpo a uma superfície de referência (usualmente a superfície média da casca) é pequena se comparada com as dimensões que definem a superfície de referência. Assumindo que a espessura da casca é bem menor que as demais dimensões, as teorias de casca reduzem o problema tridimensional a um problema bidimensional. Para isso, descrevem-se os deslocamentos de um ponto qualquer da casca em função dos deslocamentos da superfície média. Há diversas teorias não-lineares na literatura para descrever os deslocamentos da casca cilíndrica, por exemplo, Donnell (1934), Donnell-Mushtari-Vlasov (Donnell, 1976), Koiter (1959) e Budiansky-Sanders (1963).

Neste trabalho, as equações não-lineares de movimento são obtidas considerando o campo de deformações proposto na teoria não-linear de Donnell para cascas abatidas. Pela sua simplicidade e precisão essa teoria é a mais utilizada para o estudo de problemas não-lineares. A precisão da teoria não-linear de Donnell para cascas esbeltas, isto é com espessura h muito inferior ao raio R ($h << R$), é satisfeita para modos com um grande número de ondas circunferenciais n, onde a relação $1/n^2 << 1$ deve ser satisfeita. Para garantir uma boa precisão deve-se considerar $n \geq 5$.

Nesta teoria, os principais termos não-lineares são obtidos, mas outros efeitos de segunda ordem, como a não-linearidade na mudança de curvatura, são negligenciados, pois se desconsideram as rotações em torno da normal à superfície média e os efeitos das deformações axiais e circunferenciais na rotação da tangente à superfície média são descartados.

2.1.
Campo de deformações

Considera-se uma casca cilíndrica de raio R, espessura h e comprimento L, de material elástico linear com módulo de elasticidade E, coeficiente de

Poisson ν e densidade ρ. A geometria e o campo de deslocamentos estão ilustrados na Figura 2.1.

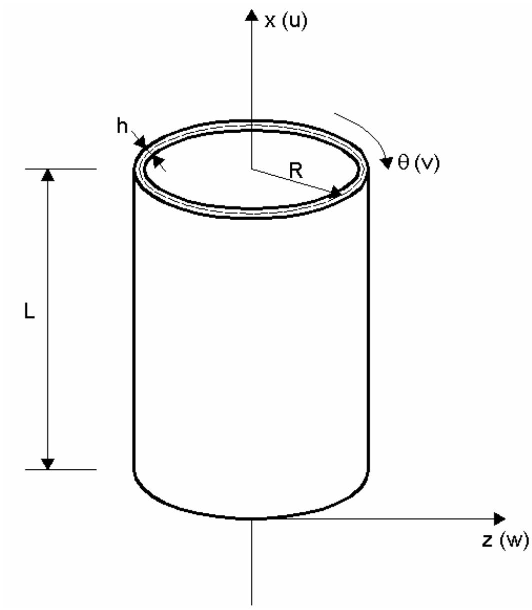

Figura 2.1 – Geometria e campo de deslocamentos da casca cilíndrica.

As deformações específicas de um ponto da superfície média da casca, segundo a teoria não-linear de Donnell para cascas abatidas, são dadas por:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_x &= u_{,x} + \frac{1}{2} w_{,x}^2 \\
\varepsilon_\theta &= \frac{1}{R}\left(v_{,\theta} + w \right) + \frac{1}{2R^2} w_{,\theta}^2 \\
\gamma_{x\theta} &= v_{,x} + \frac{1}{R}\left(u_{,\theta} + w_{,x}\, w_{,\theta} \right)
\end{aligned} \tag{2.1}$$

onde ε_x, ε_θ e $\gamma_{x\theta}$ são as deformações específicas de um elemento da superfície média e *u*, *v* e *w* são as componentes dos deslocamentos axiais, circunferenciais e radiais.

As mudanças de curvatura, segundo a mesma teoria, são dadas por:

$$\begin{aligned}
\chi_x &= -w_{,xx} \\
\chi_\theta &= -\frac{1}{R^2} w_{,\theta\theta} \\
\chi_{x\theta} &= -\frac{1}{R} w_{,x\theta}
\end{aligned} \tag{2.2}$$

Definem-se as deformações específicas de um ponto qualquer da casca, $\left(\bar{\varepsilon}_x, \bar{\varepsilon}_\theta, \bar{\gamma}_{x\theta}\right)$, localizado a uma distância *z* da superfície média, $\left(-h/2 \le z \le h/2\right)$, por:

$$\begin{aligned}\bar{\varepsilon}_x &= \varepsilon_x + z\,\chi_x \\ \bar{\varepsilon}_\theta &= \varepsilon_\theta + z\,\chi_\theta \\ \bar{\gamma}_{x\theta} &= \gamma_{x\theta} + 2\,z\,\chi_{x\theta}\end{aligned} \tag{2.3}$$

2.2. Esforços de membrana e de flexão

Os esforços que atuam na casca cilíndrica podem ser escritos na seguinte forma matricial:

$$\{\,\bar{\boldsymbol{\sigma}}\,\} = [\,\mathbf{C}\,]\{\,\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}\,\} \tag{2.4}$$

onde $\{\bar{\boldsymbol{\sigma}}\}$ e $\{\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}\}$ são, respectivamente, o vetor de tensão e o vetor de deformação, ambos relativos a um ponto qualquer ao longo da espessura da casca.

Considerando um estado plano de tensões e um material isotrópico, elástico e linear, a equação (2.4) dada por:

$$\begin{Bmatrix} \bar{\sigma}_x \\ \bar{\sigma}_\theta \\ \bar{\tau}_{x\theta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{E}{1-\upsilon^2} & \dfrac{E\upsilon}{1-\upsilon^2} & 0 \\ \dfrac{E\upsilon}{1-\upsilon^2} & \dfrac{E}{1-\upsilon^2} & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{E}{2(1+\upsilon)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{\varepsilon}_x \\ \bar{\varepsilon}_\theta \\ \bar{\gamma}_{x\theta} \end{Bmatrix} \tag{2.5}$$

A Figura 2.2 apresenta a convenção de sinais utilizada na definição dos esforços de membrana e de flexão que atuam na casca cilíndrica.

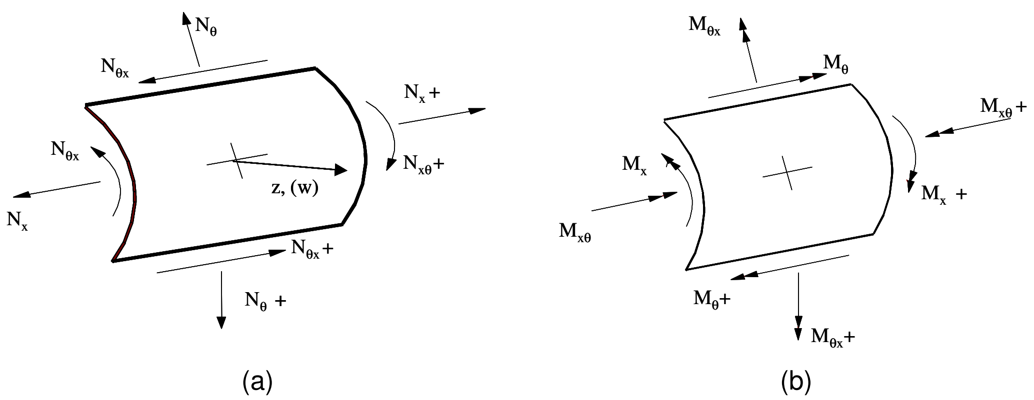

Figura 2.2 – Convenção de sinais e resultante dos esforços (a) de membrana e (b) de flexão.

Conhecidas as relações tensão-deformação da casca cilíndrica, os esforços de membrana e flexão são dados por:

$$N_x = \int_{-h/2}^{h/2} \bar{\sigma}_x \, dz \qquad N_\theta = \int_{-h/2}^{h/2} \bar{\sigma}_\theta \, dz \qquad N_{x\theta} = \int_{-h/2}^{h/2} \bar{\tau}_{x\theta} \, dz$$
$$M_x = \int_{-h/2}^{h/2} z\bar{\sigma}_x \, dz \qquad M_\theta = \int_{-h/2}^{h/2} z\bar{\sigma}_\theta \, dz \qquad M_{x\theta} = \int_{-h/2}^{h/2} z\bar{\tau}_{x\theta} \, dz \tag{2.6}$$

onde N_x, N_θ e $N_{x\theta}$ são os esforços de membrana e M_x, M_θ e $M_{x\theta}$ são os esforços de flexão.

2.3. Funcionais de energia da casca cilíndrica

Para a formulação das equações não-lineares de movimento da casca cilíndrica, descrita na Figura 2.1, foi considerada que a mesma é perfeita, que suas extremidades estão simplesmente apoiadas, que há um fluido não-viscoso e incompressível em seu interior que gera uma a pressão hidrodinâmica (P_H) sobre as paredes da casca e que ela está submetida a um carregamento axial periódico uniformemente distribuído ao longo da borda, P, e uma pressão lateral, p. A Figura 2.3 ilustra o carregamento atuante na casca cilíndrica.

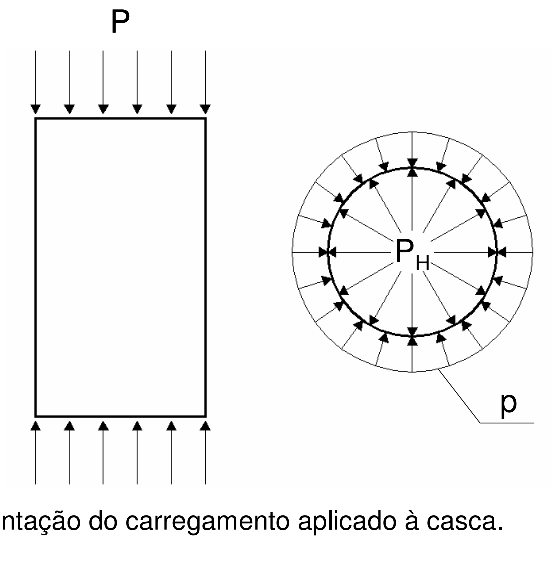

Figura 2.3 – Representação do carregamento aplicado à casca.

As equações não-lineares de movimento são obtidas partindo dos funcionais de energia do sistema e, posteriormente, aplicando-se o princípio de Hamilton. A energia interna de deformação (U_I) para uma casca cilíndrica pode ser escrita, em função das tensões e das deformações em um ponto qualquer ao longo da espessura da casca, da seguinte forma (Brush e Almroth, 1975):

$$U_I = \frac{R}{2} \int\int\int \left(\bar{\sigma}_x \, \bar{\varepsilon}_x + \bar{\sigma}_\theta \, \bar{\varepsilon}_\theta + \bar{\tau}_{x\theta} \, \bar{\gamma}_{x\theta} \right) dx \, d\theta \, dz \tag{2.7}$$

Substituindo as equações (2.1)-(2.5) em (2.7), observa-se que a energia interna de deformação é descrita como uma soma de duas parcelas de energias. Uma delas é a energia de membrana (U_B) que reúne apenas os termos de deformação da superfície média casca e a outra é a energia de flexão (U_F) que apresenta apenas os termos de mudança de curvatura da mesma superfície média. Após a substituição indicada, a parcela relativa à energia de deformação de membrana é dada por:

$$U_M = \frac{KR}{2}\int\int\left(\varepsilon_x^2 + \varepsilon_\theta^2 + 2\upsilon\varepsilon_x\,\varepsilon_\theta + \frac{1-\upsilon}{2}\gamma_{x\theta}^2 \right)dx\,d\theta \tag{2.8}$$

sendo $K = Eh/(1-\upsilon^2)$ a rigidez de membrana. A parcela relativa à energia de flexão é dada por:

$$U_F = \frac{DR}{2}\int\int\left(\chi_x^2 + \chi_\theta^2 + 2\upsilon\chi_x\,\chi_\theta + 2(1-\upsilon)\chi_{x\theta}^2 \right)dx\,d\theta \tag{2.9}$$

onde $D = Eh^3/12(1-\upsilon^2)$ é a rigidez a flexão.

Para o carregamento considerado, Figura 2.3, o trabalho das forças externas (V_E) é dado por:

$$V_E = -R\int\int (P_H + p)w\,dx\,d\theta - \frac{PR}{2}\int u_{,x}\,d\theta \tag{2.10}$$

sendo a primeira parcela referente ao fluido interno e à pressão lateral aplicada e a segunda parcela à carga axial.

A energia cinética para uma casca cilíndrica é definida como (Kraus, 1967):

$$T = \frac{1}{2}\rho hR\int\int\left(\dot{u}^2 + \dot{v}^2 + \dot{w}^2 \right)dx\,d\theta \tag{2.11}$$

Neste trabalho não se considera a inércia relativa às velocidades axial ($\dot{u}$) e circunferencial ($\dot{v}$). Essa consideração não insere erros significativos, pois a vibração no sentido radial da casca é bem superior às demais.

Por último, o trabalho das forças de dissipação (R_E) é escrito da seguinte forma (Popov et al. 1998):

$$R_E = \frac{1}{2}\beta_1\,R\int\int \dot{w}^2\,dx\,d\theta\ \frac{1}{2}\beta_2\,R\int\int \left(\nabla^2\dot{w}\right)^2 dx\,d\theta \tag{2.12}$$

O primeiro termo da equação (2.12) representa o amortecimento viscoso que considera a dissipação uniformemente distribuída entre os modos naturais com um coeficiente β_1. O segundo termo segue o modelo de amortecimento de Voigt que representa o amortecimento viscoelástico do material com um coeficiente de amortecimento β_2. A combinação linear desses dois tipos de amortecimento permite uma representação de diversas leis de amortecimento (Bolotin, 2002). Os coeficientes β_1 e β_2 são dados por:

$$\beta_1 = 2\eta_1 \, \rho \, h \, \omega_0 \qquad \beta_2 = \eta_2 \, D \tag{2.13}$$

onde η_1 e η_2 são, respectivamente, os coeficientes de amortecimento viscoso e do material, e, ω_0 é a menor freqüência natural da casca cilíndrica.

2.4. Sistema de equações não-lineares

Definidos os funcionais de energia, equações (2.8)-(2.12), chega-se à seguinte função de Lagrange:

$$\overline{L} = T + R_E - (U_M + U_B) + V_E \tag{2.14}$$

Com base no princípio de Hamilton, obtém-se

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \overline{L}}{\partial \dot{\mathbf{U}}} - \frac{\partial \overline{L}}{\partial \mathbf{U}} = 0, \qquad \mathbf{U} = [u, v, w]^T \tag{2.15}$$

Chega-se, assim, ao sistema de equações não-lineares de movimento da casca, dado por:

$$\begin{aligned}
& N_{x,x} + \frac{N_{x\theta,\theta}}{R} = 0 \\
& N_{x\theta,x} + \frac{N_{\theta,\theta}}{R} = 0 \\
& \rho h \ddot{w} + \beta_1 \dot{w} + \beta_2 \nabla^4 \dot{w} + P_H - \frac{1}{R^2}\left[R\, M_{x,xx} + 2 M_{x\theta,x\theta} + \frac{M_{\theta,\theta\theta}}{R} \right. \\
& \left. + R N_x \, w_{,xx} + N_\theta \left(\frac{w_{,\theta\theta}}{R} - 1 \right) + 2 N_{x\theta} \, w_{,x\theta} \right] = 0
\end{aligned} \tag{2.16}$$

No presente estudo assume-se que a estrutura é submetida a um carregamento quase-estático até atingir um estado de equilíbrio (configuração fundamental) e, então, é submetida a um carregamento dinâmico, passando o sistema a ocupar uma nova posição de equilíbrio (configuração incremental).

Considerando-se que a casca esteja submetida a um estado inicial de membrana, o que constitui uma aproximação fisicamente válida (Brush e Almroth, 1975), tem-se que as deformações e as mudanças de curvatura da superfície média na configuração fundamental são expressas por:

$$\begin{aligned}
&\varepsilon_x^F = u_{,x} = -\frac{(P - \upsilon p R)}{E h} \\
&\varepsilon_\theta^F = -\frac{w}{R} = \frac{(p + \upsilon P R)}{E h} \\
&\gamma_{x\theta}^F = 0 \\
&\chi_x^F = \chi_\theta^F = \chi_{x\theta}^F = 0
\end{aligned} \tag{2.17}$$

onde o índice F refere-se à configuração fundamental de equilíbrio. O efeito da pressão hidrostática é desprezado tendo por hipótese que sua magnitude é pequena quando comparada à pressão hidrodinâmica e à parcela constante da pressão lateral.

Ao substituir o campo de deformação fundamental, equação (2.17), na equação (2.5), obtêm-se as tensões para o estado fundamental. Essas tensões fundamentais ao serem integradas, equações (2.6), fornecem as resultantes dos esforços de membrana e de flexão no estado fundamental de equilíbrio, a saber:

$$\begin{aligned}
&N_x^F = -P \\
&N_\theta^F = p R \\
&N_{x\theta}^F = M_x^F = M_\theta^F = M_{x\theta}^F = 0
\end{aligned} \tag{2.18}$$

Assim, as tensões resultantes de membrana e de flexão, bem como as componentes do campo de deslocamento, atuantes na casca cilíndrica em sua configuração final de deformação podem ser escritas da seguinte maneira (Brush e Almroth, 1975):

$$\begin{aligned}
N_x &= N_x^F + N_x^I & \qquad M_x &= M_x^F + M_x^I \\
N_\theta &= N_\theta^F + N_\theta^I & \qquad M_\theta &= M_\theta^F + M_\theta^I \\
N_{x\theta} &= N_{x\theta}^F + N_{x\theta}^I & \qquad M_{x\theta} &= M_{x\theta}^F + M_{x\theta}^I
\end{aligned} \tag{2.19}$$

o índice I refere-se à configuração incremental de equilíbrio.

Substituindo as equações (2.18) e (2.19) no sistema de equações (2.16), chega-se, finalmente, ao sistema de equações não-lineares de movimento a ser utilizado neste trabalho, a saber:

$$\begin{aligned}
&N_{x,x}^I + \frac{N_{x\theta,\theta}^I}{R} = 0 \\
&N_{x\theta,x}^I + \frac{N_{\theta,\theta}^I}{R} = 0 \\
&p h \ddot{w} + \beta_1 \dot{w} + \beta_2 \nabla^4 \dot{w} + P_H - \frac{1}{R^2}\Bigg[R M_{x,xx}^I + 2 M_{x\theta,x\theta}^I + \frac{M_{\theta,\theta\theta}^I}{R} \\
&+ R\left(N_x^I - P\right) w_{,xx} + \left(N_\theta^I + p\right)\left(\frac{w_{,\theta\theta}}{R} - 1\right) + 2 N_{x\theta}^I \, w_{,x\theta} \Bigg] = 0
\end{aligned} \tag{2.20}$$

onde $\nabla^4 \dot{w} = \dot{w}_{,xxxx} + \frac{2}{R^2}\dot{w}_{,xx\theta\theta} + \frac{1}{R^4}\dot{w}_{,\theta\theta\theta\theta}$ é o operador bi harmônico.

O problema proposto deve satisfazer:

- A condição de antimetria do campo de deslocamentos axiais:

$$u(L/2,\theta)=0 \tag{2.21}$$

- A condição de continuidade dos deslocamentos circunferenciais:

$$v(x,0)=v(x,2\pi) \tag{2.22}$$

Além das seguintes condições de contorno:

- Deslocamentos circunferenciais nulos nas extremidades da casca:

$$v(0,\theta)=v(L,\theta)=0 \tag{2.23}$$

- Deslocamentos radiais nulos nas bordas da casca:

$$w(0,\theta)=w(L,\theta)=0 \tag{2.24}$$

- Momento axial incremental nulo nas extremidades da casca:

$$M_x^l(0,\theta)=M_x^l(L,\theta)=0 \tag{2.25}$$

- Esforço axial incremental nulo nas bordas da casca:

$$N_x^l(0,\theta)=N_x^l(L,\theta)=0 \tag{2.26}$$

A condição de contorno (2.26) é escrita em termos dos deslocamentos da seguinte forma:

$$N_x^l = \frac{Eh}{1-\upsilon^2}\left[u_{,x} + \frac{1}{2}w_{,x}^2 + \frac{\upsilon}{R}\left(v_{,\theta} + w + \frac{1}{2R}w_{,\theta}^2\right)\right] \tag{2.27}$$

que constitui um condição de contorno não-linear.

O sistema de equações não-lineares, (2.20), permite a análise dinâmica não-linear de cascas cilíndricas submetidas inicialmente a um estado de tensões iniciais. Esta análise pode ser feita tanto no domínio do tempo quanto no domínio da freqüência.

Na literatura é comum substituírem-se os esforços de membrana da casca por uma função de tensão (*f*) que obedece às relações:

$$N_x^l = f_{,\theta\theta} \qquad N_\theta^l = R^2 f_{,xx} \qquad N_{x\theta}^l = -Rf_{,x\theta} \tag{2.28}$$

A equação (2.28) atende as duas primeiras equações do sistema não-linear (2.20) e o reduz à seguinte equação:

$$\rho h\ddot{w} + \beta_1 \dot{w} + \beta_2 \nabla^4 \dot{w} + P_H - \frac{1}{R^2}\left[R M^l_{x,xx} + 2 M^l_{x\theta,x\theta} + \frac{M^l_{\theta,\theta\theta}}{R} \right.$$
$$\left. + R\left(f_{,\theta\theta} - P\right) w_{,xx} + R^2 \left(f_{,xx} + p\right)\left(\frac{w_{,\theta\theta}}{R} - 1\right) - 2Rf_{,x\theta}\, w_{,x\theta} \right] = 0 \tag{2.29}$$

que contém apenas termos em *w* e *f.*

A função de tensão (*f*) deve atender à seguinte equação de compatibilidade:

$$\nabla^4 f = \frac{Eh}{R^4}\left(w^2_{,x\theta} - w_{,xx}\, w_{,\theta\theta} + R w_{,xx} \right) \tag{2.30}$$

2.5. Sistema de equações não-lineares adimensionais

Para facilitar as análises paramétricas deste trabalho, o sistema de equações não-lineares, (2.20), é reescrito em função das componentes de deslocamento e adimensionalizadas através do uso dos seguintes parâmetros:

$$U = \frac{u}{h} \quad V = \frac{v}{h} \quad W = \frac{w}{h} \quad \delta = \frac{h}{R} \quad \ell = \frac{L}{R} \quad \xi = \frac{x}{R} \quad \Delta = \frac{h^2}{12R^2}$$
$$\Gamma = \frac{PR\sqrt{3\left(1-\upsilon^2\right)}}{Eh^2} \tag{2.31}$$
$$\tau = \omega_0\, t \qquad \Omega = \frac{\omega_e}{\omega_0}$$

onde ω_0 é a menor freqüência natural da casca cilíndrica.

Chega-se, então, ao sistema de equações não-lineares adimensionais da casca cilíndrica, a saber:

$$U_{,\xi\xi} + \upsilon W_{,\xi} + \frac{(1+\upsilon)}{2} V_{,\xi\theta} + \frac{(1-\upsilon)}{2} U_{,\theta\theta} + \delta\left(\frac{(1+\upsilon)}{2} W_{,\xi\theta}\, W_{,\theta} \right.$$
$$\left. + W_{,\xi\xi}\, W_{,\xi} + \frac{(1-\upsilon)}{2} W_{,\theta\theta}\, W_{,\xi} \right) = 0 \tag{2.32}$$

$$V_{,\theta\theta} + W_{,\theta} + \frac{(1+\upsilon)}{2} U_{,\xi\theta} + \frac{(1-\upsilon)}{2} V_{,\xi\xi} + \delta\left(\frac{(1+\upsilon)}{2} W_{\xi\theta}\, W_{,\xi} \right.$$
$$\left. + W_{,\theta\theta}\, W_{,\theta} + \frac{(1-\upsilon)}{2} W_{,\xi\xi} W_{,\theta} \right) = 0 \tag{2.33}$$

$$
\begin{aligned}
&\frac{R^2\left(1-\upsilon^2\right)}{E\,h}\left(\rho\, h\,\omega_0^2\, W_{,\tau\tau}+\beta_1\,\omega_0\, W_{,\tau}+\frac{\beta_2\,\omega_0}{R^4}\nabla^4 W_{,\tau}+\frac{P_H}{h}\right)\\
&-\delta\Big[(1-\upsilon)W_{,\xi\theta}\left(U_{,\theta}+V_{,\xi}\right)+W_{,\xi\xi}\left(U_{,\xi}-V_{,\theta}\right)-\frac{1}{2}\left(W_{,\theta}^2+\upsilon W_{,\xi}^2\right)\\
&+W\left(W_{,\theta\theta}+\upsilon W_{\xi\xi}\right)+W_{,\theta\theta}\left(V_{,\theta}+\upsilon U_{,\xi}\right)\Big]+W+V_{,\theta}+\upsilon U_{,\xi}-\varDelta\nabla^4 W\\
&-\delta^2\Big[(1-\upsilon)W_{,\xi\theta}\, W_{,\xi}\, W_{,\theta}+\frac{1}{2}\left(W_{,\xi\xi}\, W_{,\xi}^2+W_{,\theta\theta}\, W_{,\theta}^2\right)\\
&+\frac{\upsilon}{2}\left(W_{,\theta\theta}\, W_{,\xi}^2+W_{,\xi\xi}\, W_{,\theta}^2\right)\Big]+\left[\varGamma\,\delta\, W_{,\xi\xi}+\left(1-W_{,\theta\theta}\,\delta\right)p\right]\sqrt{\frac{\left(1-\upsilon^2\right)}{3}}=0
\end{aligned}
\tag{2.34}
$$

onde $\nabla^4 W=W_{,\xi\xi\xi\xi}+2W_{,\xi\xi\theta\theta}+W_{,\theta\theta\theta\theta}$.