6
A resolução de problemas no âmbito da Matemática

Este capítulo se inicia narrando uma experiência que julgo das mais valiosas acerca da resolução de problemas, ocorrida com um dos mais importantes matemáticos do Século XX, Henri Poincaré, ao descrever como desenvolveu parte de seu primeiro trabalho (Memórias sobre as Funções de Fuchs).

> Durante duas semanas, Poincaré procurou comprovar a inexistência de quaisquer outras funções idênticas àquelas a que posteriormente denominou funções de Fuchs. Punha-se diariamente à mesa de trabalho, aí permanecendo, de uma a duas horas, a examinar uma série infinita de combinações, sem, todavia, chegar a uma conclusão. "Certa feita, à noite", escreve Poincaré, "por ter tomado, contra meus hábitos, uma pequena xícara de café, não pude dormir. **As idéias atormentavam-me o cérebro**. Sentia como se estivesse havendo um choque entre elas. Até que, afinal, poder-se-ia até dizer, **duas delas se uniram, formando uma combinação aceitável**".[25] Pela manhã, **parte do problema estava resolvido**. Restava-lhe somente **formular as conclusões,** o que não exigiu mais do que poucas horas. (PUCHKIN, 1969, p.9-10). (grifos meus).

Segundo Puchkin, esta descrição constitui uma espécie de itinerário psicológico no qual foram registrados elos de um processo criador, analisado pelo próprio cientista.

Mas por que estou trazendo este relato?

Porque como já disse, os pressupostos teóricos dos programas que pretendem melhorar a qualidade do ensino, e dentre eles, o PNE, consideram os processos de **resolução de problemas** como eixo pedagógico que deve fundamentar as atividades relativas à construção do conhecimento e das competências matemáticas. (SEE-PNE, Boletim Pedagógico – Matemática – 3ª série do Ensino Médio, 2004, p.6).

Em sintonia com a caracterização do PNE acerca da centralidade da resolução de problemas no ensino da matemática, Onuchic salienta que "sem dúvida, ensinar matemática através da **resolução de problemas** é a abordagem mais consistente com as recomendações do NCTM e dos PCN, pois **conceitos e habilidades matemáticas** são aprendidos no contexto da resolução de problemas." (ONUCHIC, 1999, p.207).

---

[25] Poincaré, A Criação Matemática, 1909.

Mas teria o enfoque do PNE sobre ”solução de problemas” sintonia com os importantes aspectos encontrados no relato de Poincaré, muito próximos, aliás, das contribuições que trouxe em relação à Gestalt, à função do insight e à “aprendizagem significativa no verdadeiro sentido da palavra”? (Wertheimer, 2001, p.209).

Parece incontestável no relato de Poincaré a menção a aspectos notáveis, produtivos e criativos do pensamento na resolução de um problema novo. Neste sentido, encontra-se nas recomendações do PNE para a atividade matemática não apenas referências à “resolução de problemas” como eixo estruturante desta atividade, mas a aquisição do conhecimento matemático através de “aprendizagens significativas” como um dos parâmetros da matriz de referência deste programa. (SEE/RJ/REVISTA DO PROFESSOR, 2004, p.8).

Não há dúvida que é extremamente atual a discussão sobre a importância das diferentes abordagens sobre resolução de problemas e o papel que cumprem para o ensino e a aprendizagem em matemática. Onuchic (1999) ressalta “três modos diferentes de conceber resolução de problemas, que podem nos ajudar a refletir sobre tais diferenças: **ensinar sobre resolução de problemas**, ensinar **a resolver problemas** e ensinar matemática **através da resolução de problemas**”. (p.206). (grifos meus).

Este trabalho filia-se como já declarei, sobretudo ao estudo da terceira formulação trazida por esta autora.

6.1
O papel da intuição e da heurística

A palavra intuição, como é usada pelos matemáticos carrega consigo um forte sentido de mistério e ambigüidade. Ora significa uma alternativa perigosa e ilegítima a uma demonstração rigorosa, ora parece designar um lampejo perceptivo inexplicável pelo qual alguns poucos vislumbram o conhecimento matemático que outros só atingem com muito esforço.

Davis e Hersh (1985) relacionam vários significados e usos atribuídos a esta palavra no sentido de explorar o alcance deste conceito que denominam de “escorregadio”.

> 1 – Intuitivo é o oposto de rigoroso.
> 2 – Intuitivo significa visual.
> 3 – intuitivo significa plausível ou convincente na ausência de demonstração.
> 4 – intuitivo significa incompleto.
> 5 – Intuitivo significa apoiar-se sobre um modelo físico, ou em alguns exemplos importantes. **Neste sentido, é quase a mesma coisa que heurístico**.
> 6 – Intuitivo significa unificado ou integrado em oposição a detalhado ou analítico. Quando pensamos em **uma teoria matemática em termos globais**, quando vemos que uma certa afirmação deve ser verdadeira por causa da **maneira que se ajustaria a todo o resto do que sabemos sobre ela**, estamos raciocinando intuitivamente. Para ser mais rigorosos, devemos justificar nossa conclusão dedutivamente, (...). (p.435). (grifos meus).

Como podemos observar, este último significado de intuição aproxima-se da formulação que defendo neste trabalho para o pensamento produtivo.

Entretanto, Davis e Hersh (1985) salientam que em todos esses usos, a noção de intuição permanece vaga, estranha, secundária e opcional como o tempero de uma salada. Ressaltam, porém, que do ponto de vista educacional, em especial da pesquisa sobre o conhecimento matemático, tal atitude pode ser um equívoco, o que concordo.

> Talvez isso seja uma tolice e esteja condenado ao insucesso, mas um professor *pode* ensinar matemática e um pesquisador pode escrever trabalhos sem dar atenção ao problema da intuição. No entanto, se não estamos fazendo matemática, mas, em vez disso, estamos observando as pessoas que a estão fazendo e tentando entender o que elas estão fazendo, então o problema da intuição se torna central e inevitável. (p.436).

Até porque, continuam os autores, tentamos ensinar conceitos matemáticos não de maneira formal (memorizando definições), mas intuitivamente – vendo exemplos, resolvendo problemas, desenvolvendo uma habilidade de pensar, que é a expressão de haver internalizado com sucesso alguma coisa. O que? **Uma idéia matemática intuitiva**. (p.441). (grifo meu).

Novamente esses autores se aproximam da formulação do pensamento produtivo ao afirmarem que temos intuição porque temos representações mentais de objetos matemáticos não pela memorização de fórmulas verbais, mas por experiências repetidas, desde a manipulação de objetos físicos até a resolução de problemas e a descoberta de coisas por nós mesmos. (Idem)

Davis e Hersh (1985) fazem uma constatação contundente, com a qual concordo, de que a intuição não é uma percepção direta de algo que existe externamente e eternamente. Por isso mesmo, consideram que a dificuldade em se perceber o que é a intuição, surge da exigência de que a matemática seja infalível e da falsificação de sua própria natureza. (Idem).

Os autores concluem este pensamento com uma crítica que reitero. Afirmam que tal exigência é satisfeita por ambas a as filosofias tradicionais, o formalismo e o platonismo. "Cada uma, tenta criar uma matemática que é tão super-humana como Platão o desejaria. Mas como fazem isso falsificando a natureza da matemática da forma como ela existe (na vida humana, na história), criam uma confusão e um mistério que não necessitariam existir". (p.443).

6.1.1
A intuição em Kant (1724-1804) e Poincaré (1854-1912)

Segundo, Engelmann (2004), para Kant

> (...) a sensibilidade é a faculdade das intuições, que podem ser tanto puras quanto empíricas. Já do entendimento procedem os conceitos que são também puros ou empíricos. (...) As duas formas puras da intuição sensível, espaço e tempo, são inerentes ao homem; portanto, *a priori*. Já a matéria – objeto da sensação, da intuição empírica – é conhecida *a posteriori*. A função do entendimento é determinar de modo mediato, através de conceitos, aquilo que é dado na intuição. Deste modo, as características essenciais da intuição são imediatez e singularidade, enquanto que as do conceito são mediatez e universalidade. Estas distinções não somente são importantes para a teoria geral do conhecimento de Kant senão também para a sua teoria do conhecimento matemático. (p.52).

Se da sensibilidade provêm as intuições e do entendimento os conceitos, intuições e conceitos pertencem a faculdades distintas que, quando conjugadas, produzem conhecimento. Assim, a existência de juízos sintéticos *a priori* só é possível devido à intuição pura.

Se é óbvia a referência a Kant por parte de Poincaré em relação à defesa de tais juízos, ao menos no que diz respeito à aritmética, o mesmo não se dá no âmbito da noção de intuição que deveria fundamentá-los. A tese kantiana separa intuições e conceitos, não sendo possível a intuição de um conceito. O mesmo não se pode afirmar em relação à Poincaré.

Distanciando-se do âmbito da aritmética em direção à geometria é possível encontrar uma espécie de intuição intelectual. Os conceitos geométricos de ponto e linha, por exemplo, advém de uma espécie de intuição. Para Poincaré os axiomas geométricos são "definições disfarçadas", devido ao caráter convencional da ciência em questão, e tais definições são produto da intuição. (Engelmann, 2004, p.58)

Em resumo, Poincaré, assim como Kant (1991-b), considera que a aritmética desenvolve-se através de uma síntese *a priori*. Todavia, Poincaré reserva à intuição um papel mais abrangente: ela pode ser de caráter sensível, mas pode, também, ser o fundamento de definições e demonstrações matemáticas e, sob este viés, aproxima-se de uma espécie de intuição intelectual. (Idem).

Concordo com Poincaré (1995), quando afirma que "(...) a lógica não basta, a ciência da demonstração não é a ciência inteira, e que **a intuição deve conservar seu papel como complemento, quase se poderia dizer contrapeso ou como antídoto da lógica**. (...) sem ela os jovens espíritos não poderiam iniciar-se na inteligência da matemática; (...) sem a intuição, sobretudo, jamais se tornariam capazes de aplicá-la". (Poincaré, 1995, p.20). (grifo meu)

Poincaré (1995) destaca dois tipos de intuição. **A intuição do número puro, a das formas lógicas e a intuição sensível** que depende unicamente da imaginação propriamente dita. A intuição pura permite raramente aos *analistas*[26] (os que concebem e desenvolvem matemática pelo aspecto lógico-formal) não apenas demonstrar, mas também inventar. No que se refere aos analistas, haverá inventores, mas poucos. Neste sentido, o autor ressalta que se a maioria de nós quisesse ver de longe, unicamente pela intuição pura, se sentiria logo "acometido de vertigem". (p.25). (grifo meu).

Para Poincaré (1995) "a intuição sensível é, na matemática, o instrumento mais comum da invenção". Afirma existir uma "divergência essencial" entre os dois tipos de intuição; "elas não têm o mesmo objeto e parecem por em jogo duas faculdades diferentes de nossa alma; dir-se-ia dois projetores apontados para dois mundos estranhos um ao outro". (Poincaré 1995. p. 24-25).

Como pudemos observar a importante herança kantiana sobre os processos mentais na produção do conhecimento matemático e, em especial, sobre a intuição matemática, foi dividida com Poincaré que, além de ampliar o conceito de Kant, destaca a importância da intuição sensível como instrumento mais comum da criação, em contraponto à intuição pura das formas lógicas.

[26] Segundo Poincaré, analistas são matemáticos de espíritos lógicos que se ocupam fundamentalmente da análise pura, enquanto os geômetras utilizam como método, preferencialmente a intuição sensível, própria do cientista criador.

Neste sentido, a formulação de Poincaré se aproxima dos getaltistas na medida em que ambos apontam a insuficiência dos enfoques tradicionais da matemática. O primeiro considera a intuição sensível, e os segundos, a intuição de essências, como mecanismos centrais para se atingir ou criar o conhecimento novo. O relato de Poincaré sobre o processo surpreendente que o levou a solucionar o problema das funções de Fuchs deixa clara a sua intenção de registrar a existência de mecanismos mentais cuja natureza não é a mesma da lógica formal ou da teoria da associação.

Não é por acaso que tanto Poincaré quanto os gestaltistas têm em Kant uma origem comum, acerca da importância fundamental dos processos mentais na criação e no desenvolvimento do conhecimento matemático.

6.1.2
Da intuição à heurística do pensamento criador na solução de problemas

A Matemática é frequentemente considerada uma ciência exata, um corpo de conhecimentos que se constrói dedutiva e cumulativamente, com rigor lógico absoluto. Entretanto, na perspectiva da Educação Matemática, é necessário relacionar a prática dos matemáticos e a própria Matemática como atividade humana. Para compreender a natureza da Matemática importa, portanto, compreender a forma e os aspectos que a constituem historica e filosoficamente.

Os filósofos racionalistas do século XVII como Descartes, Spinoza e Leibnitz já consideravam a intuição como uma faculdade superior em relação à concepção do real. Descartes, por exemplo, chega a afirmar que, numa série de casos, é preciso afastar todos os mecanismos lógicos e ficarmos totalmente a mercê da intuição como derradeiro meio criador, visto que todas as teses dedutivas reduzem-se a uma autêntica intuição.

Puchkin ressalta que "as teses desses filósofos, no que tange à **intuição** revelam-se interessantes para a apreensão da específica atividade **heurística**". A atividade intelectual humana seria composta por verdades descobertas não pelo intelecto à base de argumentação lógica e raciocínio, mas através de uma peculiar e "**súbita visão intelectual**". (PUCHKIN, 1969, p.11). (grifos meus).

Recorrendo aos dicionários Houaiss e Aurélio, a palavra heurística apresenta as seguintes acepções:

No contexto científico é “a ciência que tem por objetivo a descoberta dos fatos”; no contexto *de problematização* “a arte de inventar, de fazer descobertas” ou “método de investigação baseado na aproximação progressiva de um dado problema” e no cont*exto pedagógico* “método educacional que consiste em fazer descobrir pelo aluno o que se lhe quer ensinar”.[27] Neste sentido, falar em heurística de resolução de problemas é falar sobre “métodos e regras que conduzem à descoberta, inovação, investigação e resolução de problemas”[28]**.**

Segundo Puchkin, as noções da heurística, enquanto ciência, não foram todas nitidamente definidas. O autor destaca a definição de **método heurístico** como determinado método efetivo de resolução de problemas pela seleção das variantes de solução. Acrescenta, entretanto, que esta definição é insatisfatória por conter apenas a característica extrínseca do fenômeno, sem revelar seus traços essenciais, que caracterizariam a solução de um problema atípico como **visão direta** das relações e ligações entre os fenômenos e os objetos, atividade inseparável da **intuição**. (Puchkin 1969, p.18) Ressalta ainda que “primordialmente, podemos definir a **heurística como atividade** humana que leva à solução de um problema atípico e que como **heurísticos os específicos meios** elaborados pelo homem no decorrer da solução de certos problemas que, mais ou menos conscientemente, são transferidos para outros problemas”. (Puchkin 1969, p.18-19) (grifos meus).

Puchkin (1969), em Heurística, a Ciência do Pensamento Criador, destaca que, na vida cotidiana, nos deparamos freqüentemente com situações que geram conflitos, entre as circunstâncias e as exigências do exercício de uma atividade. **As condições existentes não propiciam meios para solucionar esses problemas**, e mesmo todo o acúmulo de experiências passadas não apresenta qualquer esquema completo adequado às condições emergentes. Neste caso, deve o homem criar uma nova estratégia de ação, isto é, concretizar um ato de criação. Esta contingência, “normalmente, é denominada **problema ou situação**

[27] HOUAISS, Antonio et al. ***Dicionário Houaiss da Língua Portuguesa***. Rio de Janeiro, Objetiva, 2001, 1ª ed., p. 1524.
[28] FERREIRA, Aurélio Buarque de Holanda. ***Novo Aurélio – O dicionário da língua portuguesa***. Rio de Janeiro, Nova Fronteira,

problemática, ao passo que o **processo psíquico** que, ao auxiliar sua solução, elabora uma nova estratégia que se mostra como algo inédito, é designado como **pensamento criador** ou, para usarmos terminologia que nos vem de Arquimedes, ***atividade heurística***". (p.8). (grifos meus).

Puchkin (1969) descreve a natureza desta atividade e afirma que "sem embargo, como base desse novo e complexo ramo do conhecimento, que é a Heurística, aparece a Psicologia, principalmente sua parte denominada **psicologia criadora ou pensamento produtivo**". (p.9). (grifos meus).

Puchkin, 1969, chama a atenção para o receio de Bruner de que o constante e consciente apelo aos meios heurísticos pudesse reduzir essencialmente o processo intuitivo ao raciocínio analítico. Entretanto, também afirma que tal receio devia-se à concepção de "heurística" de Bruner, que serviria apenas para identificação dos meios ou esquemas de ação que auxiliam a solução de problemas. E conclui afirmando que o estudo da ação é problema muito mais complexo e, ao mesmo tempo, muito mais importante do que o estudo dos meios, já concluídos e fixados, de resolução de problemas. (p.13).

Até aqui, Poincaré (1995) e Kant nos auxiliaram a entender a referência ao papel da intuição na criação do pensamento científico, em especial, na matemática. Em Puchkin (1969) encontro a ligação fundamental entre essa intuição criadora e uma heurística do pensamento produtivo - fazendo menção à Wertheimer (1991) - cujas estruturas de operação, estranhas ao objeto da intuição das formas lógicas, integram, do nosso ponto de vista, parte essencial da aprendizagem do conhecimento matemático. A seguir, Bazarian (1973), também se referindo a Puchkin e a Poincaré, nos oferece uma definição de "Intuição Heurística", em obra do mesmo nome, onde o autor descreve as principais características deste tipo de intuição a qual atribui um caráter intelectual.

Bazarian (1973) aborda o que entende ser o único tipo de intuição que tem direito a esse nome: a **intuição intelectual**. Distingue duas formas fundamentais de intuição intelectual: a **intuição de evidência** e a **intuição heurística**. A primeira refere-se aos axiomas e princípios evidentes nos quais a clareza de idéias, a veracidade de um fato ou relação são captados diretamente. Da mesma forma que Poincaré que também considera os axiomas não como definições, mas como produto da intuição.

A intuição heurística é o conhecimento direto que nos faz pressentir a verdade, adivinhar a solução de um problema ou descobrir algo novo. A intuição heurística é também chamada de antecipadora, adivinhadora, inventiva, criadora. O autor destaca os dois tipos de intuição, observando que a intuição de evidência vem depois da apercepção distinta das relações e apenas constata a veracidade do fato, da idéia ou do juízo, mas não traz nenhum conhecimento novo. A intuição heurística precede a aperecepção, antecipa o resultado, descobre o até então desconhecido e dá novos conhecimentos sobre o objeto e duas relações. (p.25-28).

Considerando tais atributos da intuição heurística, Bazarian (1973) a define como **uma forma de conhecimento em que a solução de um problema teórico ou prático é encontrada de modo imediato, repentino, não consciente e sem dados suficientes.** (p.29) A intuição heurística entra em função somente quando o conhecimento empírico e abstrato não pode dar a solução do problema que nos preocupa. (...). É o célebre “heureca” de Arquimedes, o “estalo” do Padre Vieira, etc...; essa “iluminação” súbita que dá imediatamente ao filósofo ou cientista a consciência de ter encontrado a solução do problema procurado há muito tempo. (p.30). (grifo meu).

Ressalto a semelhança com as idéias da Gestalt, em especial com a intuição de essências, ou com as concepções de Poincaré acerca da lógica e da intuição, ilustradas no seu relato acerca das funções de Fuchs. Em ambos os casos o elemento da descoberta advém de processos mentais que mostram repentinamente (insight) uma ligação essencial (estrutural) ou de sentido entre elementos do problema estudado. Só depois os mecanismos da lógica formal entram para constatar e formular conclusões sobre o conhecimento novo.

O autor destaca que **a solução dada pela intuição heurística tem, em princípio, um valor hipotético**, isto é, pode ser verdadeira, mais ou menos verdadeira, ou até falsa, apesar do sentimento subjetivo de certeza e clareza que a acompanha. (p.31). (grifo meu).

Bazarian (1973) descreve a solução de um problema através dos traços característicos da intuição heurística que se revelam no **imediato, repentino, não-consciente** e na **insuficiência de dados** para tal solução. Portanto, ressalta que a solução intuitiva aparece de modo direto na consciência, isto é, sem os elos intermediários do raciocínio. Também surge de repente, por uma espécie de “iluminação súbita, que a consciência não sabe de onde veio. Por isso mesmo, a solução intuitiva, não encontrada conscientemente, é muitas vezes resolvida no subconsciente que, em seguida, a envia para o consciente. A solução irrompe subitamente no consciente, "não se sabe de onde". **A intuição assim compreendida, nada mais é que a generalização, a síntese das informações armazenadas no subconsciente**[29]. Neste sentido, a solução procurada não é deduzida logicamente, mas é baseada no pressentimento intuitivo que **parte de bases empíricas e lógicas reais e científicas, e pressente o resto**, encontrando a solução do problema. (p.34- 40). (grifos meus). Bazarian (1973) considera que a insuficiência de dados para a solução consciente de um problema, produzindo sua solução intuitiva, é o traço característico mais importante da intuição heurística**.** A solução intuitiva não é obtida dos conhecimentos empíricos atuais, nem deduzida por via lógica. É algo inteiramente novo, um "pulo através" do abismo empírico e lógico, um "crime" lógico, sem os quais não há descoberta do novo, desenvolvimento dos nossos conhecimentos. Assim, a intuição heurística completa o incompleto, alarga o horizonte de nossos conhecimentos sobre nós mesmos e o mundo exterior. (p42-43). Embora sem citar diretamente a gestalt, a solução de um problema através da intuição heurística, de um "pulo" na definição do autor, pode ser vista como decorrente de um *insight*.

Embora a intuição dê a solução do problema sem dados suficientes, ela pode não dar a solução, se a falta de informações for demasiada. Nesse caso, o problema continua "aberto", sem solução até que o sistema psíquico receba as informações fundamentais necessárias para a solução do problema. É por isso que, frequentemente, a solução do problema é encontrada muito tempo depois. "É o caso de Newton que levou muitos anos até descobrir as leis da gravitação universal, ou o de Mendeleiv que levou quinze anos até encontrar a solução verdadeira de sua Tabela periódica dos elementos químicos". As soluções encontradas por ele anteriormente, também por intuição, não foram satisfatórias. (p.44-45)

Como já foi dito, a solução ditada pela intuição heurística e, em princípio, hipotética. Se os dados ou premissas em que se baseia a intuição são eles mesmos errados, a solução intuitiva pode ser errada. O que significa, por outro lado, que a

[29] Na verdade a expressão subconsciente não é adequada. Não existe sub-consciente, em termos da teoria freudiana, de onde saiu toda a idéia de inconsciente, ter-se-ia um sistema Pré-consciente/ Consciente e um sistema Inconsciente (Mamede-Neves em comunicação pessoal)

intuição funciona mesmo com premissas erradas. Portanto **a veracidade da suposição intuitiva para obter o valor de uma verdade objetiva deve ser expressa em conhecimentos, verificada pela prática e demonstrada logicamente**. (Bazarian, 1973, p.46). (grifo meu).

Bazarian discorda da concepção que opõe intuição e lógica embora considere a intuição superior à lógica. Explica que no fundo a intuição é tão lógica como a própria lógica existente, pois esta também é um reflexo da realidade objetiva. Só que é um reflexo incompleto. Portanto, na solução de um problema qualquer de ordem teórica ou prática, intuição e lógica participam igualmente, se revezam, em todos os momentos, numa unidade dialética. (p.49). Aqui, reafirmamos que tanto a Gestalt quanto as concepções de Poincaré sobre intuição e lógica também se aproximam desta idéia de complementaridade, ainda que ressaltem talvez não a superioridade, mas a diferença entre elas, quanto à especificidade de suas atribuições na produção do conhecimento matemático.

Convidando a abandonar a concepção mística e aristotélica que considera a intuição um dom divino, um privilégio somente de alguns, Bazarian, 1973, chama a atenção para o seu caráter natural, cuja manifestação, entretanto, depende de uma série de condições que permitem desenvolver nossa capacidade intuitiva. (p.51).

1 **Problema não resolvido** – Ausência de explicação científica do problema, por falta de dados suficientes para resolver o problema pelos meios empíricos e racionais.

2 **Desejo imperioso de conhecer a causa, o porquê das coisas** – Se não existe desejo imperioso de encontrar a solução do problema, a intuição não funciona. Uma pergunta insistente é do que precisa o subconsciente para encontrar uma resposta satisfatória.

3 **Colocação correta do problema** - As perguntas devem ser claras, concisas e precisas. Se o problema for mal colocado, o subconsciente não pode dar a solução procurada.

4 **Trabalho consciente longo e intensivo, isto é, concentração de todas as forças psíquicas** – Numa palavra, concentração de todas as forças psíquicas sobre a solução do problema. O trabalho da intuição é precedido e seguido por um trabalho consciente longo e intensivo, na medida em que após a solução intuitiva é necessário o trabalho consciente para verificar a sua veracidade ou falsidade.

5 **Passagem para outro tipo de atividade –** Temos que mudar de atividade, nos desligar do problema que nos preocupa, para que a intuição se

manifeste. A solução intuitiva jamais aparece num cérebro cansado e tenso, pois forma-se no consciente uma espécie de couraça intransponível que não deixa aflorar a solução intuitiva que já está pronta no espaço psíquico. Mas se as novas atividades também exigem muita tensão consciente como o xadrez, o pôquer ou mesmo um interessante programa de televisão, então a solução intuitiva do problema permanece sem vez.

6 **Ricos conhecimentos práticos e teóricos** – A suposição intuitiva pode ser mais ou menos frutífera, mais ou menos verdadeira, de acordo com a presença em nós de uma reserva maior ou menos de conhecimentos práticos e teóricos no campo estudado.

7 **Mente flexível, espírito crítico e aberto para aceitar o novo –** O dogmatismo mata a intuição criativa enquanto a flexibilidade do pensamento, o espírito crítico, a abordagem criativa, livre de dogmas e de preconceitos, favorece a manifestação da intuição heurística, pois esta representa, na maioria das vezes, uma quebra da rotina, das noções tradicionais sobre o problema.

Bazarian, 1973, resume o seu pensamento afirmando que "para merecer a visita da intuição – a musa da adivinhação, da descoberta, da invenção e da criação – é preciso saber trabalhar, pensar e descansar." (p.66).

É neste eixo que se expressa o meu interesse exposto nesta tese. Busco aprofundar a investigação sobre Gestalt, intuição e heurística enquanto um caminho (em especial na resolução de problemas) que viabilize o pensamento e a aprendizagem criativa, produtiva ou significativa, cuja menção se encontra nos documentos de políticas e normas educacionais, sem que os seus resultados em geral se vejam expressos na realidade das escolas.

6.2
Os princípios heurísticos de George Polya

Ao mencionar a heurística na resolução de problemas, sou inevitavelmente levado a considerar a contribuição de George Polya (1887–1985), um dos matemáticos mais importantes do século XX. Nascido na Hungria, ele passou a maior parte do seu tempo pesquisando na universidade de Stanford nos Estados Unidos devido à situação política da Europa na época da Segunda Guerra Mundial. Pesquisou em vários ramos da matemática, como probabilidade e equações diferenciais parciais. Sua maior contribuição, no entanto, está relacionada à heurística de resolução de problemas matemáticos, com várias publicações relacionadas ao assunto, dentre as quais destaco "How To Solve It" (1957) e a sua tradução "A arte de resolver problemas" (1978).

Polya tornou-se referência no assunto, uma vez que suas idéias representam um grande diferencial em relação às idéias de resolução de problemas existentes até então. Muitas de suas recomendações são atuais, servindo de base para trabalhos de outros pesquisadores nesta área como Schoenfeld, Laster, Pozo e outros.

Polya considera a Matemática uma ciência na qual a observação e a analogia desempenham um papel fundamental. Para ele a Matemática tem dois aspectos: é a ciência rigorosa de Euclides, mas é também uma ciência experimental, indutiva. (Polya, 1995, p. vi).

Para Polya (1995), heurística, heurética ou "ars inveniendi", era o nome de certo ramo de estudo pertencente à Lógica, Filosofia ou Psicologia cujo objetivo é o estudo dos métodos e das regras da descoberta e da invenção. (p.86).

Ainda segundo Polya (1995), **a experiência na resolução de problemas e a experiência na observação dessa atividade por parte de outros devem constituir** a base em que se assenta a heurística moderna.[30] (p.87).

Embora reconheça que certos "padrões lógicos" são importantes, Polya achou desaconselhável acrescentar artigos técnicos em sua abordagem sobre a heurística moderna. Neste sentido, explica que "há apenas dois artigos predominantemente dedicados a aspectos psicológicos, sobre PERSISTÊEANCIA, ESPERANÇA, SUCESSO e sobre TRABALHO SUBCONSCIENTE". (P.88).[31]

Entretanto, podemos perceber uma proximidade de Polya (1995) com autores e conceitos que fundamentam a escola da Gestalt quando, a respeito de si mesmo, afirma: "o autor deseja reconhecer sua dívida e expressar a sua gratidão para com alguns autores modernos, não mencionados no artigo HEURÍSTICA. São eles o físico e filósofo Ernest Mach, (...) os psicólogos (...) Wolfgang Kohler (...) K. Dunker[32] (...)". (p.90).

[30] É importante lembrar que Polya não se propôs a descrever a atividade psíquica que está relacionada às regras que compõem o seu método.
[31] Aqui cabem as mesmas considerações constantes da nota de rodapé de número 5
[32] Um dos maiores pesquisadores no campo do raciocínio produtivo. O método de Dunker reside no fato de ter definido com maior nitidez a solução problemática como uma das fontes da atividade mental.

Analisando mais detidamente os aspectos psicológicos destacados nos dois artigos mencionados por Polya, verifiquei a semelhança desses aspectos com definições relacionadas à Gestalt e ao insight.

Em "Persistência, esperança, sucesso", Polya (1995) afirma, por exemplo, que "ensinar a resolver problemas é educar a vontade. (...) o estudante aprende a perseverar a despeito de insucessos, (...) a **esperar** pela **idéia essencial** e a concentrar todo o seu potencial quando esta **aparecer**". (p.114). Nota-se aqui a semelhança de uma "esperada" "idéia essencial" que "aparece" de forma "súbita", com a "intuição de essências" e o insight gestáltico.

Já no artigo "Trabalho subconsciente", Polya, sem muita convicção, atribui ao próprio subconsciente o fato de se obter facilmente a solução de um problema, através de uma "**idéia brilhante**", após um descanso ou alguns dias de intervalo do trabalho, em geral intenso com o problema, sem nenhum resultado. A dúvida de Polya acerca da centralidade do subconsciente neste processo é expressa em sua afirmação de que "Tais eventos **dão a impressão de trabalho subconsciente**[33]. (...). É difícil encontrar outra resposta, embora **psicólogos hajam descoberto os princípios de uma outra explicação** (...)." (p.156). (grifos meus).

Ainda que Polya tenha declarado se referir aos temas da psicologia em apenas dois artigos, ao observar o fulcro do termo "idéia brilhante", tratado em um terceiro artigo, de mesmo nome, encontro mais indícios da presença das idéias da Gestalt no seu pensamento. Além desse terceiro artigo, destaco ainda a importância desse termo na conclusão de outro artigo denominado de "Progresso e consecução".

No artigo sobre "Idéia brilhante", também chamada de "**Boa idéia**", Polya afirma que "é uma expressão coloquial que significa um **súbito avanço** (...). O aparecimento de uma idéia brilhante é uma experiência que todos conhecem, mas **é difícil descrevê-la** e, portanto, parece interessante observar que uma autoridade tão antiga como **Aristóteles** fez dela, incidentalmente, uma sugestiva descrição". (p.90). (grifos meus).

[33] Mais uma vez, aqui cabem as mesmas considerações constantes da nota de rodapé de número 5

Neste sentido, Polya (1995) vincula a concepção de idéia brilhante ao ato de **sagacidade**, assim definido por Aristóteles: “Sagacidade é chegar **instantaneamente,** por **intuição,** à **conexão essencial**”. (Idem). (grifos meus).

A seguir cita um dos exemplos, que considera notável, utilizados por Aristóteles para ilustrar sua definição de sagacidade. “(...) se alguém (...) observar que o lado brilhante da Lua está sempre voltado para o Sol, poderá **repentinamente** perceber que a Lua brilha porque é iluminada pelo Sol”. (Idem). (grifo meu).

Polya aproveita este exemplo para elaborar o possível procedimento heurístico utilizado por um contemporâneo de Aristóteles ao elucidar esta questão. Observa-se no itinerário deste procedimento, o encadeamento do pensamento sobre elementos contextuais (Sol e Lua), seus diversos aspectos como forma, intensidade do brilho e posição relativa, e uma conclusão notável cujo desfecho é, entretanto, uma conexão complexa desses elementos, esperada, mas de difícil explicação.

O processo inicia-se com uma visão do Sol e da Lua cheia como “**discos planos**”, embora a Lua muito menos brilhante. “Observará também, “**ocasionalmente**”, a Lua à luz do dia, perto do nascer ou do pôr do Sol, e concluirá que o “lado brilhante da Lua está sempre voltado para o Sol”, o que era, por si própria, uma **notável conclusão**”. Percebe, então que “os aspectos variáveis da Lua são como vários aspectos de uma bola que é iluminada e um lado, de maneira que apenas a metade fica brilhante e a outra na semi-escuridão. Ele concebe o Sol e a Lua não como discos planos, mas como corpos redondos, um deles a fornecer e outro a receber a luz”. Finalmente, “Ele percebe a **conexão essencial**, reformula a sua anterior concepção “**instantaneamente**”: há um **repentino salto** de imaginação, surge uma **idéia brilhante**, uma **centelha** de gênio”. (Idem). (grifos meus).

Neste exemplo nota-se uma grande semelhança de termos e conceitos como “notável conclusão” e “conexão essencial” com “relações notáveis ou relações essenciais” que representam as “relações ρ” em Wertheimer e na Gestalt.

No texto sobre “Progresso e consecução”, Polya (1995), tendo assimilado as contribuições de Aristóteles, esclarece que podemos avançar continuamente, por passos imperceptíveis, mas de quando em vez “**avançamos bruscamente**, por **saltos**. Um **súbito avanço** no sentido da solução chama-se uma IDÉIA

BRILHANTE, uma boa idéia, uma **intuição** (em alemão há um termo mais técnico, *Einfall*)". (p.131). (grifos meus).

A seguir define o que é uma idéia brilhante propriamente dita. "Uma **repentina e memorável** alteração da nossa perspectiva, uma **súbita reorganização** do nosso modo de conceber o problema, o advento de uma previsão confiante dos passos que teremos de dar para alcançar a solução". (Idem). (grifos meus).

Embora esteja afirmando uma importante influência da psicologia da Gestalt sobre o pensamento de Polya, também se percebe, na referência a Aristóteles, por exemplo, a influência de concepções que embasam procedimentos da lógica tradicional ou da teoria da associação.

De acordo com a formulação de Lewin, a psicologia contemporânea herdou majoritariamente do modo de pensar aristotélico, uma caracterização essencial das concepções de regularidade, no sentido de freqüência, e de "classe", em detrimento das concepções de totalidade e campo, e de seu caráter dinâmico. (Garcia-Roza, 1972, p.10)

Entretanto, não foi esta idéia que Polya nos apresentou. Ao contrário, na busca de caracterizar melhor o significado do termo "idéia brilhante", aproximando-o da definição aristotélica de "sagacidade", Polya faz uma síntese excepcional a partir do que ele mesmo denomina de uma "incidental e sugestiva" contribuição do pensamento de Aristóteles.

Portanto, longe de representar uma contradição fundamental, entendo que grande parte do valor e referência ao trabalho de Polya, encontra-se exatamente na aproximação de mecanismos da matemática tradicional com estruturas fundamentais do pensamento (que identifico no campo da Gestalt, ainda que assim não seja declarado), produzindo um método heurístico que auxilia especialmente os processos de resolução de problemas em matemática.

Procurando organizar o processo de resolução de problemas, Polya (1995) o dividiu em quatro fases. Apresento a seguir cada uma dessas fases agrupando um conjunto de indagações e sugestões oferecidas pelo autor através de uma lista.

6.2.1
Compreensão do problema

O primeiro passo é compreender o problema, mas não só isso. Deve também desejar resolvê-lo. Para isso é importante que o problema seja bem escolhido. É importante fazer perguntas. Qual é a incógnita? Quais são os dados? Qual é a condicionante? É possível satisfazê-la? Ela é suficiente para determinar a incógnita? Ou é insuficiente? Ela é redundante? Ou contraditória?

Construir figuras adotando uma notação adequada. Separar a condicionante em diversas partes e anotá-las, se possível. (p.xii).

6.2.2
Estabelecimento de um plano de resolução

Encontrar a conexão entre os dados e a incógnita. Se não conseguir imediatamente, é possível que se tenha que considerar problemas auxiliares. É preciso chegar a um plano para a resolução do problema.

Indague se já viu o problema ou um parecido antes; se conhece um problema correlato ou algum que possa ser útil. Considerando a incógnita do problema, procure pensar num problema conhecido que tenha a mesma ou uma incógnita semelhante.

Diante de um um problema correlato e já resolvido, pergunte se é possível utilizá-lo, ou ao seu resultado, ou ao seu método; É necessário introduzir algum elemento auxiliar para viabilizar a sua utilização? Questione se é possível reformular o problema; se positivo, pergunte se é possível uma segunda maneira e recomende voltar às definições.

Caso não consiga resolver o problema proposto, busque resolver um problema correlato. Consegue imaginar um caso correlato acessível? Um problema mais geral? Um mais acessível? É possível resolver parte do problema? Mantenha apenas uma parte da condicionante, deixe a outra de lado; Até que ponto fica assim determinada a incógnita? Como ela varia? Consegue obter alguma coisa a partir dos dados? É possível pensar em outros dados apropriados para determinar a incógnita? Consegue alterar a incógnita ou os lados, ou a todos, de modo que fiquem mais próximos entre si? Levou em conta todos os dados?

Atendeu toda a condicionante? Levou em conta todas as noções essências envolvidas no problema? (Idem).

6.2.3
Execução do plano

Ao executar a sua estratégia, verifique cada passo. É possível verificar se o passo está claramente correto? Você consegue demonstrar isso? (p.xiii)

6.2.4
Restrospecto

É possível verificar os resultados e os argumentos utilizados? Pode-se obter o resultado de algum outro modo? É possível perceber isso num **relance**? Você consegue usar o resultado, ou o método em outro problema? (Idem). (grifo meu).

Referindo-se às quatro fases de resolução de problemas e às indagações e sugestões de sua lista, Polya (1995) afirma que "**não mencionam diretamente a idéia brilhante, mas, de fato, todas se relacionam com ela.** Para compreender o problema, preparamo-nos para tê-la, para conceber um plano, provocamo-la; uma vez provocada, a idéia brilhante, levamo-la adiante; fazendo o retrospecto e examinando a solução, procuramos aproveitá-la melhor". (p.131). (grifo meu).

Pelo que estudei acerca dos escassos, mas elucidativos pressupostos psicológicos citados por Polya, ele não poderia deixar de citar a possibilidade de que "a um estudante ocorra uma excepcional idéia brilhante e, saltando por sobre todas as preparações, ele chegue impulsivamente à solução. Estas idéias felizes são, evidentemente, muito desejáveis". (p.4).

Entretanto, em seguida assevera que cada uma das fases tem a sua importância e "alguma coisa muito **inconveniente e desastrosa** pode resultar se o estudante deixar de lado qualquer uma das quatro fases sem dela ter uma perfeita noção". (p.4). (grifo meu).

Como se observa no conjunto de recomendações e indagações desenvolvidas e agrupadas nas quatro fases elaboradas por Polya, predomina a ênfase nos elementos e passos extrínsecos do método heurístico, em detrimento dos processos psíquicos responsáveis não apenas pela idéia brilhante, mas pelos aspectos relacionados a ela, responsáveis por uma concepção diferenciada sobre solução produtiva de problemas[34].

Por outro lado, embora de grande importância para a própria atividade heurística criativa (especialmente o emprego da experiência anterior como princípio), as questões indutoras do esquema proposto por Polya ficam balizadas pelo material interpretado por ele, composto, sobretudo, de problemas de estudo ou problemas de determinação.[35]

Portanto, estando nossos interesses nessa tese mais vinculados ao **processo psíquico** (opcionalmente evitado por Polya no seu trabalho) envolvido no pensamento criador da resolução de problemas, saliento que nos importa mais a "atividade heurística" enquanto processos mentais que viabilizam o pensamento produtivo e a aprendizagem significativa.

6.3
A abordagem da heurística chega a Lakatos

Se Polya desenvolve uma heurística chamando a atenção sobre o fato de que a Matemática, para além do rigor lógico, possui uma face de ciência experimental, indutiva, Lakatos, também matemático húngaro, ultrapassa esta perspectiva e orienta seu trabalho para a descoberta e a invenção através de hipóteses e até adivinhações.

Imre Lakatos (1922-1973) segue a orientação de Karl Popper que em 1934 propôs que não é possível nem necessário justificar as leis da ciência justificando o raciocínio indutivo. Lakatos demonstra a possibilidade de uma filosofia popperiana da matemática e defende que a construção do conhecimento matemático é análoga à do conhecimento científico, (Davis e Hersh,1985, p. 388).

Segundo Davis & Hersh (1985), Lakatos recebe influência de Popper e de Polya, avós em comum do seu trabalho, sendo deste último a sugestão para que

[34] Acerca de importantes aspectos conceituais identificados por nós como próximos das concepções gestaltistas, o próprio Polya esclarece que "(...) são tratados com maior extensão no trabalho do Autor, publicado na *Acta Psychologica*, vol.4 (1938), págs. 113 – 170". (p.132).

[35] Polya afirma que "a presente exposição, porém, apresenta como exemplos quase exclusivamente problemas da matemática elementar. Não se deve esquecer que isto representa uma restrição, (...)". (p.89).

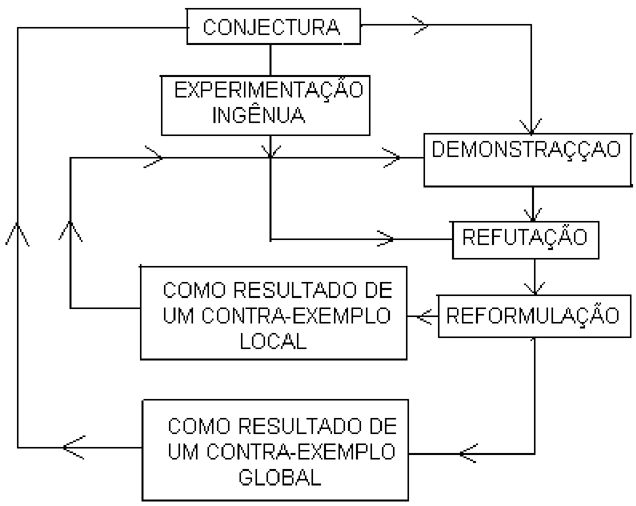
ele escolhesse como tema de tese a história da fórmula de Euler-Descartes: $V - A + F = 2$. (p.388).

Lakatos, segundo Davis e Hersh (1985), afirma que a Matemática, como as ciências naturais, é falível e não indubitável. Também ela se desenvolve pela crítica e correção de teorias, que nunca estão livres de ambigüidades ou da possibilidade de erro ou engano. **Partindo de um problema** ou de uma conjectura, existe uma pesquisa simultânea de demonstrações e contra-exemplos. (Idem). (grifo meu).

Lakatos (1976), em *Proofs and Refutations*, busca aprofundar a questão de que, ao contrário do que concebe o formalismo matemático, a matemática informal (quase-empírica)[36] não deve se desenvolver por meio de um aumento monótono de quantidade de teoremas deduzidos indubitavelmente, mas por meio da melhoria incessante de **advinhações, especulações e críticas,** pela lógica das demonstrações e refutações. (p.5) (grifo meu). Lakatos orienta a sua epistemologia para os processos de descoberta. Segundo ele, a descoberta em matemática "é uma disciplina independente, a lógica da descoberta, a heurística[37]" (Lakatos, 1976, p. 144).

Davis e Hersh (1985) afirmam que o exemplo heurístico de Lakatos, de demonstrações e refutações, que foi formulado para a cultura matemática geral, pode ser naturalmente aplicado pelo indivíduo em suas tentativas de criar matemática nova. Esses autores mostram no esquema abaixo o modelo simplificado de Lakatos para a heurística da descoberta matemática. (p.329).

[36] O programa epistemológico de Lakatos critica e rejeita as posições dogmáticas sobre a Matemática, e a considera como um conjunto de teorias quase-empíricas, ou seja, a matemática na sua fase genitiva, em que se processa a criação de teoria. Ao recuperar a matemática (informal), atribuindo-lhe um estatuto epistemológico, Lakatos recusa a identificação da matemática com a matemática formal, tese central do formalismo.
[37] A heurística de Lakatos inspira-se no modelo da dialética de Hegel de tese, antítese e síntese.



Como nos afirmam Davis e Hersh (1985), "seria justo dizer que, em P*roofs and Refutations,* Lakatos defende o ponto de vista de que filosofias dogmáticas da matemática (logicistas ou formalistas) são inaceitáveis, (...). No entanto, ele não executa realmente o projeto de reconstruir a filosofia da matemática sobre uma epistemologia de falibilidade". (p.390). A introdução de *Proofs and Refuattions* é um ataque desafiador e caustico ao formalismo, mas Lakatos ressalta que esse estudo não superaria as últimas posições do dogmatismo matemático. (p.394).

O impacto de *Proofs and Refutations* encontra-se no fato de que esta obra apresenta um retrato filosófico da matemática completamente em desacordo com o apresentado pela lógica e pela metamatemática. E mais, "quando este dois retratos são colocados lado a lado, não há nenhuma dúvida sobre qual parece mais fiel à vida". (p.399).

Concordo com Davis e Hersh (1985) quando se referem ao equívoco de que pouquíssimos filósofos têm discutido a matemática em termos diferentes dos do "fundamentismo" da lógica formal e afirmam que "o melhor remédio é ser confrontado por um modelo totalmente diferente. Isso é o que Lakatos nos deu em *Proofs and Refutations".* (p.401).

Este trabalho também tem, através da Gestalt, a intenção de dialogar com a presente tendência fundamentista que observo nas políticas e princípios educacionais atuais que, se questionam a supremacia de um dogmatismo tradicional no ensino da matemática, muitas vezes não deixam de assumir igual postura, ao proporem substituir tal dogmatismo através de políticas escolares descoladas da realidade e praticamente inquestionáveis.

6.4
A Educação matemática e a resolução de problemas

Se por um lado é indiscutível que, desde a antiguidade, os problemas ocupam lugar central tanto para os matemáticos quanto para o ensino da Matemática, por outro, só muito recentemente a comunidade da educação matemática tem reconhecido que o desenvolvimento da capacidade de resolução de problemas nos estudantes deve ser estudado.

> (...) a expressão "resolução de problemas" tem gerado confusão por englobar diferentes perspectivas sobre o que é a educação e a Matemática, bem como sobre o ensino desta ciência e o ensino da própria resolução de problemas. É preciso compreender também o seu potencial educativo. Ou seja, a temática da resolução de problemas é fundamental para compreender a relação do trabalho do estudante com a disciplina Matemática e a atividade matemática. (Guimarães, 2004, p.161).

A resolução de problemas está hoje presente em todos os currículos de Matemática do Ensino Básico. A tendência é considerar-se a resolução de problemas como "processo" que atravessa todo o programa e pelo qual o conhecimento matemático deve ser construído e consolidado, deixando de ser apenas uma finalidade do ensino da Matemática. Estudos nacionais e internacionais reconhecem grande importância à resolução de problemas em Matemática, visto que contribuem para o desenvolvimento de saberes e competências dos estudantes. Políticas educacionais como o PNE, entre outros, são implementadas considerando, como já salientei, a resolução de problemas como eixo norteador da atividade matemática.

A opção de incluir no desenvolvimento deste trabalho a análise de processos mentais intrínsecos à atividade de resolver problemas relaciona-se, também, ao fato de que muitas políticas educacionais têm propugnado, e o PNE reforça esta tendência, que as aprendizagens devem ser significativas para os estudantes. Neste sentido é que busquei oferecer uma contribuição original a este debate através de uma abordagem das heurísticas de resolução de problemas que leve em conta não apenas o seu caráter metodológico, mas os mecanismos pelos quais se dão o processo criador ou produtivo dessas aprendizagens.

Do exposto acima e na medida em que "resolver problemas" é uma atividade presente nas salas de aula de matemática, sob diversos aspectos, bem como a principal forma de avaliação da aprendizagem escolar nesta disciplina, decidi investigar algumas das principais abordagens que influenciam o debate atual, buscando discutir alguns de seus aspectos.

Sendo assim, entendo que os seguintes autores e trabalhos representam uma síntese do pensamento contemporâneo sobre resolução de problemas: Schoenfeld, Lester e Pozo, o trabalho desenvolvido pelo NCTM, além de autores importantes em nível nacional como Onuchic.

Sabe-se que na segunda metade dos anos 70, diversas organizações educativas assumiram mudar a direção de suas pesquisas, no sentido de dar mais ênfase aos "processos" utilizados por seus estudantes na solução de um problema. O movimento que representava as posições adotadas por estas organizações que questionavam as tendências da Matemática Moderna ficou conhecido nos Estados Unidos da América como "Back to basics".

"Tais posições criticavam, nomeadamente, o que essas tendências tinham de redutor nas aptidões básicas que propunham para o ensino, e a visão muito limitada e empobrecida da matemática e da atividade matemática que a ênfase no cálculo e no domínio de destrezas técnicas por que propugnavam traduzia". (Guimarães, 2005, p.145).

Desde o início da década de 1980, o tema da resolução de problemas tem tido uma atenção especial na Educação Matemática. Para isso contribuíram, especialmente, as idéias de Polya, porque, segundo este, o desenvolvimento da capacidade de resolução de problemas matemáticos deveria ser um dos objetivos principais do ensino da Matemática.

Retornando a Polya, o pensamento matemático que os alunos devem desenvolver na escola é constituído não só por raciocínio rigoroso ou formal, mas também por processos informais, entre outros: "generalizar a partir da observação de casos, argumentos indutivos, argumentos por analogia, reconhecer ou extrair um conceito matemático de uma situação concreta" (Polya, 1962/81, II, p. 101).

Polya procurou também descrever o significado de problema, num sentido amplo, distinguindo o problema em si, do processo de resolução. Um problema existe quando alguém procura "conscientemente uma certa ação apropriada para obter um objetivo claramente concebido, mas não atingível de maneira imediata." (Polya, vol. I, p. 117). Esta ação caracteriza a resolução do problema. O conceito de problema é, portanto, inerente à noção de dificuldade. Sem esta não existe problema.

A partir da década de 80, o *National Council of Teachers of Matemathic* (NCTM)[38], elabora o documento *An Agenda for Action* com diretrizes para o progresso da Matemática nos anos 80. Mais tarde lança o *Profissional Standards for Teaching Mathematics* com normas[39] diretivas para o ensino de matemática. A partir do final da década de 80, o NCTM publicou os primeiros *Standards*[40] para o currículo de matemática.

Em 1980, Krulik e Reys lançaram o livro do ano do National Council of Teachers of Mathematics (NCTM), totalmente dedicado a temas relacionados à resolução de problemas, intitulado *Problem Solving in School Mathematics*. Em toda a obra se percebe a forte ênfase que então se dava às heurísticas como forma de orientar os alunos na resolução de problemas. Alguns capítulos destacam tal enfoque a partir de seus próprios títulos como o capítulo três, escrito por Schoenfeld, e o capítulo quatorze, escrito por Muss: *Heurístics in the Classroom* e *Problem-solving Strategies in School Mathematics*, respectivamente.

É sempre importante destacar que coube a George Polya a autoria do primeiro capítulo dessa obra, na qual se pode observar a forte influência que suas idéias, presentes no livro *How to Solve it* (1945), exerciam sobre as orientações para a implementação da resolução de problemas em sala de aula. O livro de Polya (1945), que se tornou referência nesse tema, possui uma tradução em português intitulada *A Arte de Resolver Problemas* (1994). Foi nesse trabalho que Polya colocou seu conhecido "roteiro" com orientações sobre como resolver um problema. Tal roteiro está reproduzido na abertura do livro de Krulik e Reys (1980).

Na segunda década dos anos 90, tem-se no Brasil a difusão dos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) de matemática para o ensino fundamental e para o ensino médio (PCNEM). Estes últimos apresentam suas recomendações na Parte III destinada às Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias.

---

[38] O NCTM (Conselho Nacional de Professores de Matemática) é uma organização não governamental fundada em 1920, sem fins lucrativos, que conta com mais de 125.000 sócios responsáveis pelas orientações para ensino de Matemática nos EUA.

[39] Destacamos a Norma nº 5 que trata "A Matemática como resolução de problemas, raciocínio e comunicação".

[40] Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics,1989; Professional Standards for Theaching Mathematics, 1991; Assessment Standards for School Mathematics, 1995.

De acordo com a tendência internacional verificada especialmente no NCTM, os PCNEM afirmam que:

> o domínio do saber fazer em Matemática passa por um processo lento, trabalhoso, cujo começo deve ser uma prolongada **atividade sobre resolução de problemas** de diversos tipos, com o objetivo de elaborar conjecturas, de estimular a busca de regularidades, a generalização de padrões, a capacidade de argumentação, elementos fundamentais para o processo de formalização do conhecimento matemático e para o **desenvolvimento de habilidades** essenciais à leitura e interpretação da realidade e de outras áreas do conhecimento. (PCNEM, 1999, p.41) (grifos meus).

6.4.1
A resolução de problemas em Alan Schoenfeld

Alan Schoenfeld, atualmente professor na área de desenvolvimento cognitivo do departamento de Matemática da University de Califórnia at Berkeley, é um importante pesquisador na área de educação e desenvolvimento cognitivo relacionado à Matemática. Ele já foi presidente da *American Educational Research Association (AERA)* - Associação de Pesquisas Educacionais dos EUA – e membro da *National Academy of Education* – Academia Nacional de Educação dos EUA.

De acordo com Schoenfeld (1985), a compreensão e o ensino da matemática devem ser abordados como um domínio de resolução de problemas. Em seu livro ***Mathematical Problem Solving*** (1985), ele afirma que quatro categorias de conhecimento ou habilidades são necessárias para alguém ser bem sucedido na matemática:

1. *Recursos*: conhecimento de procedimentos e questões da matemática.
2. *Heurísticas*: estratégias e técnicas para resolução de problemas, tais como trabalhar o que foi ensinado, ou desenhar figuras.
3. *Controle*: decisões sobre quando e quais recursos usar.
4. *Convicções*: uma visão matemática do mundo que determina como alguém aborda um problema.

Segundo o autor, o sucesso na resolução de problemas deve levar em conta estes quatro aspectos, interligados, sobrepondo-se e interagindo entre si.

Na heurística apresentada por Schoenfeld destacam-se as duas espécies de decisões tomadas durante a resolução de problemas: decisões táticas e decisões estratégicas. As decisões táticas incluem procedimentos *standard* para implementar a resolução de problemas (algoritmos, heurísticas, etc.); as decisões estratégicas fazem sentir o seu impacto na direção que a resolução de problemas pode tomar, e na fixação dos recursos de cada um no processo de resolução. A este tipo de decisões, Schoenfeld chama de decisões de execução ou de gestão.

A teoria de Schoenfeld é sustentada por uma vasta análise de pesquisas com estudantes solucionando problemas. A estrutura teórica está baseada em outros trabalhos da psicologia cognitiva, particularmente o trabalho de Newell & Simon. Ressalta as preocupações, ao nível dos processos mentais envolvidos na resolução de problemas.

Schoenfeld (1987) dá mais ênfase à importância da metacognição e aos componentes culturais envolvidos no aprendizado da matemática (isto é, sistemas de convicções) do que na sua formulação original. Para Schoenfeld o conhecimento de heurística de resolução de problemas é uma habilidade importante para um bom matemático, de forma que não basta apenas ser um bom conhecedor da teoria matemática para ser um bom resolvedor de problemas.

Em "Heurísticas na sala de aula", artigo que integra o importante livro do ano de 1980 do NCTM, Schoenfeld (1980) diz que enquanto Polya pretende, modestamente, que o moderno estudo das heurísticas proporcione o desejo de entender o processo de resolução de problemas, em especial as operações mentais tipicamente usadas neste processo, ele pretende mais. Afirma que, sob circunstâncias apropriadas, muitos estudantes podem aprender a usar heurísticas obtendo como resultado uma melhora demonstrável em seu desempenho na resolução de problemas. (p.9).

Define heurística como "uma sugestão geral ou estratégia, independente de qualquer tópico específico ou assunto, que ajuda quem resolve problemas a abordar e entender um problema e dispor de forma eficiente de seus recursos para resolvê-lo". Ressalta que muitas dessas estratégias existem e apresenta como exemplo um quadro que "fornece uma grande (mas ainda incompleta) amostra". Neste quadro lista algumas heurísticas importantes em resolução de problemas seguindo o esquema de Polya. (Idem).

Assim, esta lista mostra como primeira recomendação "analisar e entender o problema", descrevendo a seguir procedimentos complementares a esta recomendação como: construa um diagrama se possível; examine casos especiais, etc. A segunda heurística, "conceber e planejar uma solução" também segue o mesmo padrão, apresentando dois procedimentos vinculados a ela. Do mesmo modo são descritas a terceira heurística (explorar soluções para problemas difíceis) e a quarta (verificar a solução).

A seguir Schoenfeld apresenta três problemas para mostrar a utilidade das estratégias heurísticas na melhora da capacidade dos estudantes para resolver problemas. Mas, especificando os dois principais pontos de acréscimo em relação às recomendações de Polya, afirma que "eles (os estudantes) devem aprender (1) **como selecionar as estratégias apropriadas** e (2) **como aplicá-las**. Nenhuma delas é tão simples quanto parecem". (p.12). (grifo meu).

Schoenfeld volta então a se referir à lista de heurísticas de Polya, afirmando que "infelizmente seria de pouco valor para estudantes" se for dado a eles como "algumas sugestões para ajudar em sua resolução de problemas", como teria sugerido o próprio Polya. Acrescenta ainda que a lista é, atualmente, muito incompleta. "Muitas das sugestões simplesmente não contém informação suficiente para serem utilizadas pelos estudantes". Para demonstrar isso, Schoenfeld passa a aborda outros três problemas nos quais problematiza duas das estratégias da lista de Polya. (p.12).

Após desenvolver alguns raciocínios nesses problemas, afirma que "mesmo que nós pudéssemos oferecer aos estudantes formação em cada uma das estratégias individuais enumeradas (...), por si só poderia resultar em pouca ou nenhuma diferença em seu desempenho global na resolução de problemas". (p.14). Acrescenta que sem uma forma razoável para selecionar uma abordagem apropriada para um problema, estudantes podem perder o tempo ou a paciência antes de selecionar a estratégia correta.

Neste sentido, afirma: "mesmo que a grande coleção de estratégias apresentadas na lista já referida possuísse algumas que ajudassem a resolver o problema, isso poderia não ocorrer se quem está resolvendo o problema não tiver tempo hábil para identificá-las". Salienta, portanto, a importância de selecionar uma estratégia chave para solucionar o problema. (Idem).

Afirma, ainda, que uma das formas de ajudar estudantes a selecionar estratégias apropriadas é “identificar “sinais”, nos diversos tipos de problemas, que possam sugerir que uma abordagem particular é apropriada”. Assim, alguns parâmetros podem indicar uma resolução mais apropriada por processos de indução ou de contradição. (Idem)

Referindo-se ao papel dos professores na mediação deste processo diz que o principal é que devem estar conscientes e dispostos a compartilhar seus conhecimentos. “Sempre que você resolve um problema, inclusive os de rotina, você não deveria dizer, “essa é a forma de fazer”, melhor seria perguntar-se “por que eu o resolvi daquele modo” e compartilhar aquela “forma” com seus estudantes”. (p.15).

Ressaltando que o processo de resolução de problemas é mais complexo do que poderia ser resumido numa lista de estratégias como a referida no início de seu artigo, Schoenfeld (1980) afirma que tal lista deve ser utilizada como uma referência e um enquadramento para resolver problemas através de estratégias heurísticas. “O processo de resolução de problemas, incluindo ilustrações dos tipos de decisões táticas (No que diz respeito à utilização dos recursos de resolução de problemas) construídas todo o tempo por quem resolve problemas, podem e devem ser discutidas em sala de aula”. (Idem).

Schoenfeld defende, assim, que a abordagem da resolução de problemas em sala de aula é um dos mais importantes aspectos a serem observados pelos professores na medida em que, além de possibilitarem uma classe mais dinâmica e motivada, desenvolve o potencial de solução de problemas na própria vida das pessoas. “Explicando para os estudantes de onde vêm os argumentos - ou melhor, trabalhando os argumentos com eles – pode ajudar a desmistificar a Matemática e viabilizar que os estudantes a compreendam sem medo e tribulações”. (Idem).

O autor se aproxima aqui do que Lewin (1965) denominou como aprendizagem relacionada com mudança da motivação, ou aprender a gostar. Lembrando que tal aprendizagem refere-se à área total de fatores que determinam o desenvolvimento da motivação e da personalidade, tais como: as leis básicas das necessidades e saciação, estrutura do objetivo, nível de aspiração, e o problema de pertencer a grupo. (p.96).

Por outro lado, Schoenfeld (1980) destaca a importância do formato da aula se a ênfase do ensino em resolução de problemas é o seu processo. Ressalta que se algum tempo deve ser despendido para a apresentação: delineando estratégias de como resolver problemas, estabelecendo o contexto apropriado para o trabalho, viabilizando materiais, oferecendo sumários concisos, etc., a maior parte do tempo deveria ser investida em resolver problemas. Afirma que isso pode ser feito com sucesso de duas formas.

1 . *O formato da discussão*. Aqui o professor serve como condutor para o estudante, guiando gentilmente o estudante através do processo de resolução do problema, usando suas sugestões, e treinando-o para usar as estratégias.

2 . *O pequeno grupo de abordagem*. A classe pode ser dividida em grupos de quatro ou cinco estudantes cada. Esses grupos trabalham junto em dois ou três problemas por quinze ou vinte minutos. Durante esse tempo o professor circula pela sala e oferece ajuda quando absolutamente necessário. Quando o grupo resolveu o problema ou fez bastante progresso, a turma retorna para o modelo anterior. (p.16).

Destaca que a quantidade de assuntos abrangidos é geralmente bastante pequena; pode ser que apenas quatro ou cinco problemas possam ser discutidos em uma hora de aula. O professor não deve se importar com isso, pois é natural conseqüência de prestar a atenção no processo de solução de problemas. Depois de tudo, pode demorar muitas semanas para aprender a fazer até uma cópia medíocre de um esboço, embora se possa estudar e apreciar em um curto espaço de tempo. (Idem).

Em relação à motivação com o estudo da resolução de problemas, Schoenfeld (1980), afirma que "talvez o caminho fácil para desenvolver isso seja iniciar o curso ou uma determinada sessão com alguns problemas que demonstrem dramaticamente o impacto das heurísticas. Para o estudante que vê um diagrama desbloquear um problema após ele ou ela ter se debatido com uma solução algébrica, é mais provável a utilização de diagramas no futuro". (Idem).

De acordo com Mamede Neves (1999c),

> **Motivação intrínseca** é a tendência à atividade que se inicia quando a tensão é satisfeita pelo domínio da própria tarefa de aprendizagem; o material aprendido fornece por si mesmo a recompensa. Se fazer um trabalho satisfaz o indivíduo, se o próprio ato de fazer o trabalho é recompensador, se é feito como um fim em si, então dizemos que a motivação é intrínseca. (...) A **motivação extrínseca** ocorre quando uma pessoa executa uma tarefa de aprendizagem por razões que são

> alheias á própria tarefa. (...) Se certos fatos (...) são aprendidos somente com o objetivo de passar num exame, logo que o exame termina o motivo para conhecer os fatos não mais existe. (...) na maioria dos casos, não se pode categorizar a motivação tão claramente. Ela é uma função da situação total e depende de uma mistura do interesse pessoal pelo trabalho em si e do interesse em fatores extrínsecos. (p.3).

Baseando-nos nessas definições, acredito que o desejo do autor em relação à motivação dos estudantes pode, aqui, resultar tanto em motivações intrínsecas quanto extrínsecas, dependendo de como os estudantes encarem o porquê resolver problemas a partir da estratégia de convencê-los "dramaticamente" que as heurísticas são fundamentais para isso. Entendo que tal estratégia será tão mais eficaz quanto mais o professor resolver problemas de forma a responder aos seus requerimentos estruturais, na perspectiva da Gestalt. Para isso, não se necessita de nenhuma estratégia especial (indutiva ou dedutiva) de resolução do problema, mas apenas entender a "boa forma" que leve à sua solução.

Por fim, Schoenfel (1980) ressalta que se realmente esperamos que os estudantes usem uma estratégia heurística, nós devemos abordar isso com o mesmo grau de seriedade que devotamos para qualquer outra técnica em matemática. A seguir apresenta uma proposta de como fazer isso.

> Isso significa, por exemplo, ter uma coleção de problemas feitos para exemplificar o uso da estratégia. Para a motivação, um ou dois problemas feitos através de uma estratégia particular devem ser abordados usando o formato de discussão quando aquela estratégia for o foco. Em seguida, deve-se oferecer outros três ou quatro problemas para a classe agora dividida em pequenos grupos. Após esses problemas terem sido abordados, o professor faz uma síntese organizando os procedimentos colocados. Depois outros problemas devem ser propostos na próxima sessão, mas não requerendo a mesma estratégia. Alguns devem ser resolvidos por processos aprendidos anteriormente e talvez um ou dois por um método a ser estudado em breve. E para cada problema, o professor e os estudantes devem focar não apenas em como as abordagens foram trabalhadas, mas porque elas foram apropriadas para o uso no problema. (p.17).

Para ilustrar o que significa focar no processo de solução, Schoenfeld (1980) apresenta o exemplo de uma discussão que deve ocorrer no desenvolvimento de um problema. O problema escolhido é uma variante de outro, discutido por Polya em How to Solve it (1945, pp. 23-25), modificado para possibilitar a maior variedade de abordagens possível. (Idem).

Schoenfeld (1980) conclui seu texto reavendo a definição de Heurística tomando como referência três *experts* em resolução de problemas, Newell, Shaw, e Simon 1960: “Heurísticas são coisas que ajudam na descoberta. Heurísticas raras vezes oferece uma direção infalível.... Geralmente elas “trabalham”, mas os resultados são variáveis e o sucesso é raramente garantido.” (p.21). Ainda assim, nos convida a sermos otimistas, reafirmando que o processo de resolução de problemas promove a desmistificação da Matemática e uma sala de aula mais viva.

Observando esta conclusão do texto “heurísticas na sala de aula”, apesar de concordar, em linhas gerais, com os objetivos da proposta heurística de Schoenfeld, incluindo os dois acréscimos que faz às quatro etapas da heurística de Polya, não concordo com os argumentos com os quais tenta demarcar uma forte diferença em relação a este último autor.

Não partilho da idéia de que é “modesto” o objetivo de Polya de “entender o processo de resolução de problemas e as operações mentais tipicamente usadas neste processo”. Ainda mais quando Schoenfeld afirma tal diferença (no início do texto) sob o argumento de que resultados do uso de heurísticas na resolução de problemas poderiam ser “demonstráveis” e no final do texto ressalta através de suas três referências teóricas (com as quais concordo) o caráter de falibilidade, variabilidade e falta de garantia na definição de heurística.

Assim sendo, o que percebo é uma preocupação similar entre Polya e Schoenfeld quanto ao papel da heurística, lembrando que Polya não se propôs em *How to Solv It* desenvolver os aspetos psicológicos acerca deste tema, embora os considerasse inclusive no campo da Gestalt. Portanto entendo que é legítimo e necessário ampliar as contribuições de Polya, sem deixar, entretanto, de contextualizar a sua obra, sem dúvida referência na discussão acerca da heurística da resolução de problemas, inclusive para Schoenfeld.

6.4.2 A resolução de problemas em Frank Lester

Polya (2003) considera que um indivíduo está perante um problema quando se confronta com uma questão a que não pode dar resposta, ou com uma situação que não sabe resolver usando os conhecimentos imediatamente disponíveis (dificuldade).

Charles e Lester, 1982, consideram que, para além de o problema caracterizar-se por uma situação para a qual um indivíduo não dispõe de um método imediato de resolução, o empenho (por desejo ou necessidade) na procura dessa solução constitui um aspecto fundamental. Portanto, para o ensino da Matemática importa salientar que só há problema se um indivíduo o quiser resolver. (p.5).

Wertheimer (1991) já havia pontuado fortemente tal necessidade ao identificar que "em muitos casos os vetores e os passos são determinados essencialmente pela natureza estrutural da situação objetiva. (...) Em outros casos, o problema nasce das necessidades pessoais do indivíduo e o eu desempenha um papel importante". (p.204). Salienta ainda que o problema manter-se-á insolúvel caso o indivíduo centre sua atenção em seu próprio desejo ou necessidade, tornando-se solúvel unicamente se o indivíduo vê seu desejo como parte integral da situação e se percebe quais são os requerimentos estruturais objetivos dessa situação.

Portanto, segundo Lester, um estudante está perante um problema quando, confrontado com uma questão, não dispõe de um processo rotineiro conhecido para resolvê-lo, mas a sua curiosidade ou necessidade o leva a tentar solucioná-lo.

Tendo como referência o modelo apresentado por Polya que sugere quatro fases principais na resolução de problemas, Lester (1978) (*apud*, Charles e Lester, 1982, p.34) concebe um modelo semelhante levando em conta os processos mentais envolvidos na solução de problemas:

1) - Fase da compreensão do problema e análise do(s) objetivo(s);

2) Fase do desenvolvimento do plano;

3) Fase da implementação do plano;

4) Fase de avaliação dos procedimentos e da solução.

A heurística apresentada por Lester tem o intuito de contribuir para a análise dos resultados, não apenas em nível do produto final, mas também em nível de procedimentos.

Investigações elaboradas por Lester e outros pesquisadores, apresentam quatro categorias de variáveis implicadas na resolução de problemas: o problema, o sujeito (o resolvedor de problemas), o processo de resolução de problemas e o ambiente de resolução de problemas. Neste sentido fica evidente a importância atribuída por este autor à questão subjetiva envolvida neste processo. (1982, p.15)

Assim, destaco os estudos realizados por Charles e Lester (1982, p.11) que apresentam três tipos de fatores implicados nos processos mentais de resolução de problemas de Matemática:

1) Fatores afetivos (pressão, motivação, interesse, resistência aos bloqueios prematuros, perseverança, stress);

2) Fatores relacionados com a experiência (familiaridade com o contexto e o conteúdo dos problemas, idade, familiaridade com estratégias de resolução de problemas, "background" matemático prévio);

(3) Fatores cognitivos (capacidade espacial, capacidades computacionais, capacidade lógica, capacidade de leitura).

Lembrando que a primeira condição na definição de problema é a necessidade ou desejo (interesse, em termos lewinianos) de resolvê-lo por parte do indivíduo, os autores destacam que, dentre os fatores afetivos envolvidos neste processo, a falta de interesse é o que mais contribui para dificultar a solução de problemas.

Interessante se notar que ao apresentar os fatores que estão presentes nos processos mentais de resolução de problemas não há nenhuma menção ao fator emocional, nos termos propostos por Antonio Damásio em sua obra "O erro de Descartes", neurologicamente comprovado nos processos de qualquer decisão. Esta posição já está pontuada por Kurt Lewin, quando afirma que "a aprendizagem relacionada com mudança na motivação refere-se à mudança das necessidades ou meios de satisfazê-las. (...) Obviamente, as forças que governam esse tipo de aprendizagem **estão relacionadas com a área total de fatores** que determinam o desenvolvimento da motivação e da personalidade". (Lewin, 1965, p.96). (grifo meu)

Este conjunto de fatores explicaria o porquê de tanto insucesso na resolução de problemas, apesar de o estudante possuir, teoricamente, todos os conhecimentos necessários para resolver um problema. Nesta perspectiva, a resolução de problemas compreende uma interação do aluno com o problema, como um fator complexo, no qual o aluno produz transformações não só no plano material externo, como também no plano mental, interno. Prevalece a curiosidade, o encanto em resolver o problema, ou seja, predomina a motivação intrínseca, pela qual o prazer se situa na ação e não na aplicação prática imediata que ela possa oferecer.

6.4.2.1
Três abordagens sobre a resolução de problemas em Lester

Segundo Lester e Lambdin (1999), para os estudantes que estão se empenhando em aprender a solucionar problemas, a dificuldade causada pela complexidade da resolução é agravada pelo fato de que muitos deles não recebem instrução adequada, quer em termos de qualidade ou de quantidade.

Afirmam que infelizmente, não há métodos facilmente implementados que ajudem os estudantes a melhorar a sua capacidade de resolução de problemas. Mas tem sido útil fazer a distinção entre três abordagens para a resolução de problemas, já mencionadas anteriormente:

a) ensinar sobre resolução de problemas;
b) ensinar para a resolução de problemas;
c) ensinar através da resolução de problemas.

Os autores fazem menção à origem desta importante categorização já apresentada anteriormente e citada por Onuchic (1999). Declaram que “Uma clara distinção entre tais abordagens está contida num texto escrito quase 20 anos atrás por Larry Hatfield (1978). Schroeder e Lester (1989) também desenvolveram essas abordagens em um artigo de um anuário do Conselho Nacional de Professores de Matemática (NCTM)”. (p.43).

6.4.2.2
Ensinar sobre resolução de problemas

O professor que ensina sobre resolver problemas reforça o modelo de George Polya (ou algumas pequenas variações do mesmo). Lembrando que o modelo de Polya descreve um conjunto de quatro fases interdependentes que estão envolvidas no processo de resolução de problemas de matemática: a compreensão do problema, elaboração de um plano, a realização do plano, e avaliação retrospectiva.

Aos estudantes são ensinadas explicitamente as fases, que, de acordo com Polya, o especialista em resolver problema usa quando soluciona problemas matemáticos. Eles são incentivados a tomar consciência de seu próprio progresso através destas fases quando eles próprios resolvem problemas. Além disso, eles aprendem uma série de "heurísticas" ou "estratégias" dentre as quais podem escolher e usar na elaboração e realização de seus planos de resolução de problemas.

Algumas das várias estratégias normalmente ensinadas incluem: procura por padrões, resolver um problema simples, e realimentar o processo. O ensino sobre resolução de problemas também inclui experiências efetivas de solução de problemas. Mas isso implica geralmente uma grande discussão e o ensino explicito de como problemas são resolvidos. (Idem).

6.4.2.3
Ensinar para a resolução de problemas

No ensino para a resolução de problemas, o foco encontra-se sobre as maneiras que a matemática ensinada pode ser aplicada na solução de problemas rotineiros e não rotineiros. Embora adquirir conhecimentos matemáticos seja de primordial importância, o professor interessado no ensino para a resolução de problemas considera que o motivo fundamental da aprendizagem matemática é a possibilidade de utilizá-la para resolver problemas.

Consequentemente, os estudantes são apresentados a muitos casos de conceitos e estruturas matemáticas e muitas oportunidades para aplicá-los na solução dos problemas. Além disso, o professor que ensina para a resolução de problemas está muito preocupado com a capacidade dos estudantes em transferir o que aprenderam do contexto de um problema para outros. Os defensores desta abordagem sugerem que a única razão para aprender matemática é a possibilidade de utilizar os conhecimentos adquiridos para resolver problemas.

6.4.2.4
Ensinar através da resolução de problemas

Segundo Lester e Lambdin (1999), no ensino por meio da resolução de problemas, os problemas são valorizados não só como um fim para aprender matemática, mas também como um meio primário para o fazer. O ensino de um tópico matemático começa com uma situação problema que incorpora os aspectos-chave do tema, e técnicas matemáticas são desenvolvidas como respostas razoáveis para problemas razoáveis. (p.44)

> A meta da aprendizagem matemática é levar certos tipos de problemas de uma condição de não-rotina para uma condição de rotina. A aprendizagem da matemática, desta forma pode ser vista como um desenvolvimento do concreto (um problema do "mundo real" que serve como um exemplo do conceito ou técnica matemática) para o abstrato (uma representação simbólica de uma classe de problemas, e as técnicas para operar com esses símbolos). (Idem)

6.4.2.5
Algumas observações finais de Lester e Lambdin

Embora essas três concepções de ensino para resolver problemas em matemática possam ser isoladas em tese, na prática eles se sobrepõem e ocorrem em diferentes combinações e seqüências.

Assim, é provavelmente contra-produtivo argumentar em favor de um ou mais destes tipos de ensino ou contra os outros. No entanto, se um professor pretende tornar a resolução de problemas o "foco de instrução", ele ou ela tem que estar ciente das limitações inerentes à adesão exclusiva a qualquer dos dois primeiros tipos de ensino de resolução de problemas. Tal limitação decorre do fato de que resolver problemas não é uma questão matemática e não deve ser considerada como tal. (Idem)

Se o ensino sobre resolução de problemas é o foco, existe o perigo de ser considerada como uma vertente a ser acrescentada ao currículo, em vez de atuar como um contexto no qual a matemática é aprendida e aplicada. Pode tornar-se apenas outro tópico ensinado de forma isolada do conteúdo e das relações da matemática.

Outro tipo de falha pode resultar no ensino para a resolução de problemas. Quando esta abordagem é interpretada restritivamente, resolver problemas é visto como uma atividade que os estudantes se envolvem apenas após a introdução de um novo conceito ou após trabalhar em uma habilidade ou algoritmo computacional. (p.45)

O objetivo desta abordagem consiste em dar aos estudantes uma oportunidade para "aplicar" os conceitos e as competências recentemente adquiridos para a solução dos problemas do "mundo real". (Idem)

Na escola, muitas vezes a solução de um problema-exemplo é fornecida como um modelo para resolver outros problemas muito semelhantes, soluções para esses problemas podem ser obtidas simplesmente seguindo o padrão estabelecido na amostra. Mas quando os estudantes encontram problemas que não sigam o exemplo, em geral se sentem perdidos.

> Tem sido a nossa experiência (apoiada por diversos estudos) que estudantes ensinados desta forma muitas vezes simplesmente retiram os números em cada história (problema do “mundo real”) e aplicam a(s) operação(ões) dada(s) para esses números sem considerar o contexto do problema e, como freqüência obtêm as respostas corretas. Em resumo, não consideramos este tipo de atividade como resolução de problemas. De fato, isso não pode sequer envolver pensamento matemático. (Lester e Lambdin, 1999, p.45).

Além disso, um efeito colateral pode ocorrer se os estudantes vierem a acreditar que todos os problemas matemáticos podem ser resolvidos rapidamente e relativamente sem esforço, e sem qualquer necessidade de entender como a matemática que eles estão usando se relaciona com situações reais. Esta abordagem sobre resolução de problemas tem sido bastante comum em livros didáticos de todos os níveis elementares na universidade.

Ao contrário das outras duas abordagens, ensinar através da resolução de problemas é uma concepção que não tem sido adotada, quer implícita ou explicitamente por muitos professores, mas é uma abordagem para o ensino de matemática que merece ser considerada, experimentada, e avaliada.

> Na verdade, o ensino por meio da resolução de problemas é a abordagem mais coerente com a recomendação do currículo e avaliação padrões para a matemática escolar do NCTM: a) conceitos e competências matemáticas serem aprendidas no contexto da resolução de problemas; b) o desenvolvimento dos processos de pensamento de nível superior ser promovido através de experiências com resolução de problemas; e c) ensino de matemática acontecer numa atmosfera investigativa e orientada de resolução de problemas (NCTM, 1989). (Idem).

Para os autores, o ponto de discussão que precede é que o progresso neste sentido tem sido muito retardado por não ser comumente aceita a visão do que significa ensinar com uma perspectiva de resolução de problemas. Esta falta de consenso tem dificultado investigadores, bem como elaboradores de currículo e professores.

6.4.3
A resolução de problemas em Pozo

Em sintonia com a divisão utilizada por Lester (1999) sobre o ensino e a resolução de problemas, onde sugere como melhor caminho “ensinar através da resolução de problemas”, Pozo (1998), em artigo intitulado “aprender a resolver problemas e resolver problemas para aprender”, ressalta a importância desta atividade para o ensino e a aprendizagem escolar. (p.13).

O próprio Lester (1983) é citado por Pozo (1998) que apresenta uma definição inicial clássica de problema, identificado como “uma situação que um indivíduo ou um grupo quer ou precisa resolver e para a qual não dispõe de um caminho rápido e direto que o leve à solução”. Acrescenta Pozo que para resolver tal situação é exigido um processo de reflexão ou uma tomada de decisões sobre a seqüência de passos a serem seguidos. Esta característica diferencia um verdadeiro problema de situações similares, como podem ser os exercícios.

> Dito de outra forma, um problema se diferencia de um exercício na medida em que, neste último caso, dispomos e utilizamos mecanismos que nos levam, de forma imediata, à solução. Por isso, é possível que uma mesma situação represente um problema para uma pessoa enquanto que para outra esse problema não existe, quer porque ela não se interesse pela situação, quer porque possua mecanismos para resolvê-la com um investimento mínimo de recursos cognitivos e pode reduzi-la a um simples exercício. (POZO, 1998, p.16).

Os exercícios são importantes para consolidar habilidades instrumentais básicas, porém não deve ser confundido com a solução de problemas que exige o uso de estratégias e a tomada de decisão sobre o processo de resolução a ser seguido. Entretanto, entre exercícios e problemas existe outra importante relação na medida em que um problema repetidamente resolvido torna-se um exercício e a solução de um problema novo requer a utilização estratégica de técnicas ou habilidades previamente exercitadas. Ou seja, na perspectiva de Pozo (1998), existiria um duplo caminho para a aprendizagem, não necessariamente incompatível e contraditório. “A solução de problemas e a realização de exercícios constituem um *continuum* educacional cujos limites nem sempre são fáceis de estabelecer”. (p.17)

Existem inúmeras classificações das possíveis estruturas dos problemas, em função da área à qual pertencem e do conteúdo dos mesmos, do tipo de operações e processos necessários para resolvê-los, ou de outras características.

Pozo (1998) ressalta que uma das classificações clássicas dos diferentes tipos de problemas é a realizada pela *Gestalt* em função das atividades que as pessoas realizam para resolver uma tarefa. Esclarece que a *Gestalt* foi uma escola de Psicologia que se desenvolveu na Alemanha entre as duas guerras mundiais e deve seu nome a um termo alemão que pode ser traduzido como “configuração” já que considerava os processos psicológicos passíveis de serem analisados de forma global e estrutural.

> Os psicólogos da *Gestalt* e, mais concretamente, Wertheimer (1945) distinguiam entre **pensamento produtivo e reprodutivo**. O pensamento produtivo consiste na produção de novas soluções a partir de uma organização ou reorganização dos elementos do problema, enquanto que o pensamento reprodutivo consiste na aplicação de métodos já conhecidos. **Essa distinção é semelhante à que antes fizemos entre um problema e um exercício**. Embora ambos exijam uma conduta dirigida para um objetivo e a utilização de uma série de meios para alcançá-lo, no caso dos problemas essa situação pressupõe algum obstáculo que o sujeito deve superar, ou porque precisa obter novos meios para alcançar uma

solução, ou porque deve organizar de maneira diferente os meios de que já dispõe. (p.20). (grifos meus).

À diferença desta classificação que se baseia fundamentalmente no sujeito e nos processos que ele coloca em ação para solucionar a tarefa, a maioria das definições dos tipos de problemas baseia-se nas características da tarefa. Dentre essas classificações, uma das mais utilizadas é a de problemas bem definidos e mal definidos.

Embora não exista uma dicotomia clara em relação a essas definições, pois não existem problemas totalmente bem definidos, como não existem problemas totalmente mal definidos, um exemplo do primeiro caso poderia ser qualquer problema da matemática escolar enquanto que os problemas do campo das Ciências Sociais são, de acordo com essa classificação, pior definidos e caracterizariam exemplos do segundo caso.

Pozo, de forma semelhante à Polya (1945), afirma que a solução de um problema exige: a compreensão da tarefa, a concepção de um plano que conduza à meta, a execução desse plano e, finalmente, uma análise que leve a determinar se a meta foi alcançada ou não. Em outras palavras, as fases de solução de problemas e os métodos heurísticos para buscar essa solução, na descrição de Polya, têm sido considerados como métodos gerais de solução de tarefas, independentes de seu conteúdo. (p.22).

Aos passos de Polya necessários para resolver um problema, Pozo acrescenta alguns procedimentos heurísticos. São eles:

a) Realizar tentativas por meio de ensaio e erro;
b) Aplicar a análise meios-fins;
c) Dividir o problema em subproblemas;
d) Estabelecer submetas;
e) Decompor o problema;
f) Procurar problemas análogos;
g) Ir do conhecido até o desconhecido.

Acerca dos procedimentos heurísticos de julgamento, também conhecidos como regras de raciocínio intuitivo, Pozo afirma que estariam na base de grande parte dos conhecimentos intuitivos ou das teorias implícitas com as quais os estudantes chegam à sala de aula. Entretanto, os contextos escolares costumam ser muito diferentes dos contextos sociais nos quais se espera que os estudantes apliquem os conhecimentos aprendidos.

Portanto, para Pozo (1998), o ensino da solução de problemas deve promover e consolidar o uso de novas formas mais sofisticadas de raciocínio nas diferentes áreas do currículo. Entretanto, sem reduzir os problemas escolares ao formato das tarefas e situações cotidianas, "parece que para que os alunos enfrentem as tarefas escolares como verdadeiros problemas, é necessário que elas tenham relação com os **contextos de interesse dos alunos** ou, pelo menos, adotem um **formato interessante**, no sentido literal do mesmo." (p.42). (grifos meus).

O esquema de Polya não pode ser ensinado sem ser completado com o conteúdo próprio de cada matéria. Os passos propostos equivalem à tradução e solução do problema na área de matemática ou às diferentes fases do método científico na área de Ciências Naturais, ou ao esquema básico da solução de problemas sociais. Os estudantes, para cada uma dessas áreas, precisariam adquirir procedimentos específicos que, de acordo com Pozo (1998), embora sejam diferentes, sua função dentro do processo de aprendizagem é relativamente similar.

Neste sentido, o autor diferencia cinco tipos de procedimentos que permite uma análise minuciosa das estratégias requeridas para a solução de um problema. (p.146).

1. Aquisição da informação.
2. Interpretação da informação.
3. Análise da informação e realização de inferência.
4. Compreensão e organização conceitual da informação.
5. Comunicação da informação.

Entretanto, Pozo destaca que isto não quer dizer que toda a solução de problemas envolva necessariamente, da mesma maneira, os cinco tipos de procedimentos, nem que a aplicação deste deva seguir necessariamente a mesma ordem seqüencial, já que em muitos casos as fases podem estar interligadas de forma complexa, existindo uma contínua reformulação de cada uma delas. (Idem)

Em resumo, para Pozo (1998), o fato de uma tarefa chegar a ser um problema dependerá não somente dos conhecimentos prévios dos estudantes, tanto conceituais como procedimentais, mas também da sua atitude diante da tarefa. "A pessoa só verá nela um problema se estiver disposta a assumir que ali há de fato um problema, ou seja, que há uma distância entre o que sabemos e o que queremos saber, e que essa distância merece o esforço de ser percorrida.” (p.159).

Para que se configurem verdadeiros problemas é preciso que as tarefas sejam abertas, diferentes umas das outras, ou seja, imprevisíveis. Um problema é sempre uma situação de alguma forma surpreendente. “Como mostram os autores da *Gestalt*, os problemas contêm sempre elementos novos, imprevisíveis, que exigem uma reorganização dos elementos presentes”. (p.160).

Do ponto de vista do professor, seu papel inicial seria o de assumir a responsabilidade ou as decisões sobre várias das fases da resolução de problemas, mas progressivamente iria cedendo o controle dessas fases aos próprios alunos até que eles fossem capazes, pó si mesmos, de completar todo o processo de resolução sem ajuda externa. (p.164).

Pozo (1998), conclui diferenciando o papel da solução de problemas no Ensino Fundamenta e no Ensino Médio. Destaca que no primeiro caso existe, sem prejuízo do desenvolvimento inicial da resolução de problemas, um importante componente de exercitação de habilidades instrumentais, cuja automatização é indispensável para que possam ser colocadas em funcionamento no Ensino Médio. (p.164)

Outra característica ressaltada é a de que pela própria organização do Ensino Fundamental, nesse os problemas devem partir de proposições mais globais, menos disciplinares do que no Ensino Médio. (p.165)

Por outro lado, a especialização disciplinar que começa a ser estabelecida no Ensino Médio deve ser compensada com uma certa integração ou coordenação entre os conteúdos das diversas áreas, especialmente quando se fala de conteúdos procedimentais que, por sua própria natureza, costumam ser menos específicos ou mais transferíveis do que conteúdos conceituais. “Afinal, a vida cotidiana, ao contrário da sala de aula, não é separada em áreas de conhecimento. Somos nós mesmos que devemos estabelecer as diferenças de tratamento que precisamos dar a cada tipo de problema”. (Idem).

6.4.4.
Síntese conclusiva

Como pudemos perceber neste capítulo, a resolução de problemas no âmbito da matemática sempre esteve permeada de aspectos fundamentais relacionados à intuição, à heurística e aos aspectos subjetivos da mente humana, em relação aos quais a Gestalt representa uma importante referência.

Se muitas vezes encontramos nas atuais políticas educacionais propostas de mudanças relativas ao ensino e à aprendizagem matemática, através da resolução de problemas, não encontramos, entretanto, claramente, a base teórica que sustente, com consistência, tais mudanças.

Nossa intenção foi, portanto, atualizar parte da trajetória histórica da construção do conhecimento matemático, destacando processos e aspectos centrais que contribuíram para esta construção, nem sempre reconhecidos, ou tratados com a devida importância, e oferecer com a teoria de campo gestalt, um referencial teórico-pedagógico que responde adequadamente a esses processos.