

7

Análise de sensibilidade

7.1.

Introdução

Este capítulo descreve as sensibilidades analíticas utilizadas no programa desenvolvido. Estas sensibilidades representam a variação de uma função devido à variação de uma variável de interesse (variáveis de projeto ou variáveis probabilísticas).

7.2.

Esforços internos resistentes

A sensibilidade dos esforços internos resistentes é determinada pela Eq. (7.1). Sendo *si* e *ss* os índices que representam as áreas de aço inferior e superior, respectivamente.

$$\begin{aligned}\frac{\partial N_R}{\partial \chi} &= \frac{\partial}{\partial \chi} \iint_{A_c} \sigma_x dA + \frac{\partial \sigma_{si}}{\partial \chi} A_{si} + \sigma_{si} \frac{\partial A_{si}}{\partial \chi} + \frac{\partial \sigma_{ss}}{\partial \chi} A_{ss} + \sigma_{ss} \frac{\partial A_{ss}}{\partial \chi} \\ \frac{\partial M_R}{\partial \chi} &= - \frac{\partial}{\partial \chi} \iint_{A_c} \sigma_x y dA - \frac{\partial \sigma_{si}}{\partial \chi} y_{si} A_{si} - \sigma_{si} \frac{\partial y_{si}}{\partial \chi} A_{si} - \sigma_{si} y_{si} \frac{\partial A_{si}}{\partial \chi} \\ &\quad - \frac{\partial \sigma_{ss}}{\partial \chi} y_{ss} A_{ss} - \sigma_{ss} \frac{\partial y_{ss}}{\partial \chi} A_{ss} - \sigma_{ss} y_{ss} \frac{\partial A_{ss}}{\partial \chi}\end{aligned}\quad (7.1)$$

A parcela devido ao concreto é dividida em três regiões: 1, 2 e 3 (Figura 7.1). Sendo ε_a e ε_b as deformações nas fibras que representam, para cada caso, os limites inferior e superior de integração, respectivamente. y_a e y_b são, respectivamente, as ordenadas das deformações nas fibras inferior e superior de integração. Na Tabela 7.1 são representadas as deformações e ordenadas necessárias nas integrações a seguir.

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial \chi} \iint_{reg.2} \sigma_x dA &= - \frac{\sigma_{cd} b}{3 \varepsilon_{c2}^2 \chi^2} \left\{ \begin{aligned} &3 \chi \varepsilon_b (2 \varepsilon_{c2} + \varepsilon_b) \frac{\partial \varepsilon_b}{\partial \chi} - 3 \chi \varepsilon_a (2 \varepsilon_{c2} + \varepsilon_a) \frac{\partial \varepsilon_a}{\partial \chi} \\ &- [3 \varepsilon_{c2} (\varepsilon_b^2 - \varepsilon_a^2) + \varepsilon_b^3 - \varepsilon_a^3] \frac{\partial \chi}{\partial \chi} \end{aligned} \right\} \\ \frac{\partial}{\partial \chi} \iint_{reg.3} \sigma_x dA &= - \sigma_{cd} b \left(\frac{\partial y_b}{\partial \chi} - \frac{\partial y_a}{\partial \chi} \right)\end{aligned}\quad (7.2)$$

$$\frac{\partial}{\partial \chi} \iint_{reg.2} \sigma_x y dA = - \frac{\sigma_{cd} b}{6 \varepsilon_{c2}^2 \chi^3} \left\{ \begin{aligned} & 2\chi \left[3\varepsilon_{c2} (\varepsilon_b^2 - \varepsilon_a^2) + \varepsilon_b^3 - \varepsilon_a^3 \right] \frac{\partial \varepsilon_0}{\partial \chi} \\ & + 6\chi \left[2\varepsilon_{c2} \varepsilon_0 \varepsilon_b + (\varepsilon_0 - 2\varepsilon_{c2}) \varepsilon_b^2 - \varepsilon_b^3 \right] \frac{\partial \varepsilon_b}{\partial \chi} \\ & - 6\chi \left[2\varepsilon_{c2} \varepsilon_0 \varepsilon_a + (\varepsilon_0 - 2\varepsilon_{c2}) \varepsilon_a^2 - \varepsilon_a^3 \right] \frac{\partial \varepsilon_a}{\partial \chi} \\ & - \left[\frac{12\varepsilon_{c2} \varepsilon_0 (\varepsilon_b^2 - \varepsilon_a^2) + 4(\varepsilon_0 - 2\varepsilon_{c2}) (\varepsilon_b^3 - \varepsilon_a^3)}{-3(\varepsilon_b^4 - \varepsilon_a^4)} \right] \frac{\partial \chi}{\partial \chi} \end{aligned} \right\}$$

$$\frac{\partial}{\partial \chi} \iint_{reg.3} \sigma_x y dA = - \sigma_{cd} b \left(y_b \frac{\partial y_b}{\partial \chi} - y_a \frac{\partial y_a}{\partial \chi} \right)$$

$$\frac{\partial}{\partial \chi} \iint_{reg.1} \sigma_x dA = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial \chi} \iint_{reg.1} \sigma_x y dA = 0$$

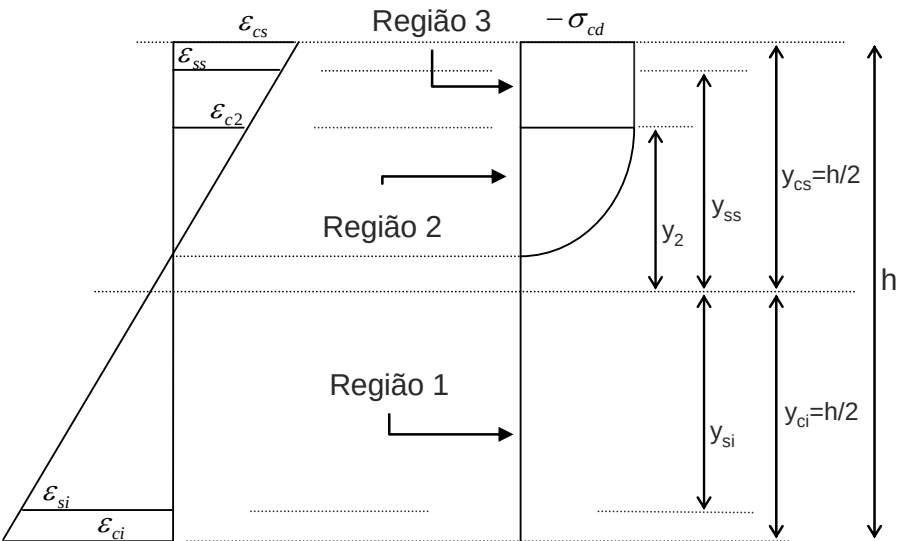


Figura 7.1 – Tensão e deformação na seção.

Domínios	Regiões	ε_a	ε_b	y_a	y_b
reta a	1	-	-	-	-
1	1	-	-	-	-
2a	1, 2	0	ε_{cs}	-	-
2b, 3, 4 e 4a	1, 2, 3	0	$-\varepsilon_{c2}$	y_2	y_{cs}
5	2, 3	ε_{ci}	$-\varepsilon_{c2}$	y_2	y_{cs}
reta b	2	-	-	y_{ci}	y_{cs}

Tabela 7.1 – Regiões e limites de integração.

7.3. Esforços internos solicitantes

As sensibilidades dos esforços internos solicitantes são obtidas derivando-se as Equações (3.7) nos pontos de integração em relação aos termos explícitos de x (Eq. 7.3).

$$\begin{aligned}\frac{\partial N_s(x,u)}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x} \iint_{A_c} \sigma_x dA + \frac{\partial \sigma_{si}}{\partial x} A_{si} + \sigma_{si} \frac{\partial A_{si}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{ss}}{\partial x} A_{ss} + \sigma_{ss} \frac{\partial A_{ss}}{\partial x} \\ \frac{\partial M_s(x,u)}{\partial x} &= -\frac{\partial}{\partial x} \iint_{A_c} \sigma_x y dA - \frac{\partial \sigma_{si}}{\partial x} y_{si} A_{si} - \sigma_{si} \frac{\partial y_{si}}{\partial x} A_{si} - \sigma_{si} y_{si} \frac{\partial A_{si}}{\partial x} \\ &\quad - \frac{\partial \sigma_{ss}}{\partial x} y_{ss} A_{ss} - \sigma_{ss} \frac{\partial y_{ss}}{\partial x} A_{ss} - \sigma_{ss} y_{ss} \frac{\partial A_{ss}}{\partial x}\end{aligned}\quad (7.3)$$

A Eq. (7.3) está em função das variáveis de projeto x e das deformações caracterizadas pelo campo de deslocamento u obtido na análise (Eq. 3.6). Devido à característica do concreto a sua sensibilidade é dividida em três regiões: 1, 2 e 3.

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x} \iint_{reg.2} \sigma_x dA &= -\frac{\sigma_{cd} b}{\varepsilon_{c2}^2 \chi} \left[\varepsilon_b (2\varepsilon_{c2} + \varepsilon_b) \frac{\partial \varepsilon_b}{\partial x} - \varepsilon_a (2\varepsilon_{c2} + \varepsilon_a) \frac{\partial \varepsilon_a}{\partial x} \right] \\ \frac{\partial}{\partial x} \iint_{reg.3} \sigma_x dA &= -\sigma_{cd} b \left(\frac{\partial y_b}{\partial x} - \frac{\partial y_a}{\partial x} \right) \\ \frac{\partial}{\partial x} \iint_{reg.2} \sigma_x y dA &= -\frac{\sigma_{cd} b}{\varepsilon_{c2}^2 \chi^2} \left\{ \begin{aligned} & \left[2\varepsilon_{c2} \varepsilon_0 \varepsilon_b + (\varepsilon_0 - 2\varepsilon_{c2} \varepsilon_b) \varepsilon_{c2}^2 - \varepsilon_{c2}^3 \right] \frac{\partial \varepsilon_b}{\partial x} \\ & - \left[2\varepsilon_{c2} \varepsilon_0 \varepsilon_a + (\varepsilon_0 - 2\varepsilon_{c2} \varepsilon_a) \varepsilon_{c2}^2 - \varepsilon_{c2}^3 \right] \frac{\partial \varepsilon_a}{\partial x} \end{aligned} \right\} \\ \frac{\partial}{\partial x} \iint_{reg.3} \sigma_x y dA &= -\sigma_{cd} b \left(y_b \frac{\partial y_b}{\partial x} - y_a \frac{\partial y_a}{\partial x} \right)\end{aligned}\quad (7.4)$$

Além das três diferentes regiões (Figura 7.1) há também os nove casos de deformação na seção de concreto. A Tabela 7.2 mostra esses possíveis casos, onde ε_{cs} e ε_{ci} são as deformações nas fibras extremas superior e inferior, respectivamente.

Caso	$\varepsilon_{cs} (\%)$	$\varepsilon_{ci} (\%)$	Regiões
1	$\varepsilon_{cs} > 0$	$\varepsilon_{ci} > 0$	1
2	$-2 \leq \varepsilon_{cs} \leq 0$	$\varepsilon_{ci} > 0$	1, 2
3	$\varepsilon_{cs} < -2$	$\varepsilon_{ci} > 0$	1, 2, 3
4	$\varepsilon_{cs} > 0$	$-2 \leq \varepsilon_{ci} \leq 0$	1, 2
5	$-2 \leq \varepsilon_{cs} \leq 0$	$-2 \leq \varepsilon_{ci} \leq 0$	2
6	$\varepsilon_{cs} < -2$	$-2 \leq \varepsilon_{ci} \leq 0$	2, 3
7	$\varepsilon_{cs} > 0$	$\varepsilon_{ci} < -2$	1, 2, 3
8	$-2 \leq \varepsilon_{cs} \leq 0$	$\varepsilon_{ci} < -2$	2, 3
9	$\varepsilon_{cs} < -2$	$\varepsilon_{ci} < -2$	3

Tabela 7.2 – Casos de deformação.

7.4. Deslocamentos

A determinação da sensibilidade dos deslocamentos $\mathbf{u}$ em relação às variáveis de projeto $\mathbf{x}$ (Eq. 7.5) é obtida pela derivada da equação de equilíbrio Eq. (3.7).

$$\frac{\partial F(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial \mathbf{u}} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}} + \frac{\partial F(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial \mathbf{x}} - \frac{\partial \mathbf{P}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} = 0 \quad (7.5)$$

A primeira parcela é devida à dependência implícita das forças internas e a segunda parcela à parte explícita. Sendo $\mathbf{K}_t = \partial F(\mathbf{x}, \mathbf{u}) / \partial \mathbf{u}$ a matriz de rigidez tangente, tem-se

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}} = \mathbf{K}_t^{-1} \left(\frac{\partial \mathbf{P}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} - \frac{\partial F(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial \mathbf{x}} \right) \quad (7.6)$$

neste trabalho as cargas externas $\mathbf{P}$ independem das variáveis de projeto $\mathbf{x}$. A sensibilidade dos deslocamentos em relação às variáveis de projeto é apresentada na Eq. (7.7).

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}} = -\mathbf{K}_t^{-1} \frac{\partial F(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial \mathbf{x}} \quad (7.7)$$

A derivada explícita das forças internas F em relação a x fica então

$$\frac{\partial F(x, u)}{\partial x} = T_m^T \sum_{m=1}^{ne} \frac{\partial f_m(x, u)}{\partial x} \quad (7.8)$$

onde T_m^T é a transposta da matriz de transformação do elemento m e f_m é o vetor das forças no m -ésimo elemento que depende dos esforços solicitantes N e M (Eq. 3.6), nos pontos de Gauss,

$$\frac{\partial f_m(x, u)}{\partial x} = \int_l \left[\begin{array}{c} \frac{\partial N(x, u)}{\partial x} \phi_u' \\ \frac{\partial N(x, u)}{\partial x} v' \phi_v' + \frac{\partial M(x, u)}{\partial x} \phi_v'' \end{array} \right] \partial x \quad (7.9)$$

ϕ é o vetor das funções de interpolação relativas aos deslocamentos (Eq. 3.12).

7.5.

Carga crítica

O fator de carga crítica λ^* está implicitamente ligado à variação das variáveis de projeto x . Entretanto o fator de carga λ é um parâmetro independente que representa o carregamento monotônico da estrutura. Resumindo, a carga crítica é o fator de carga máximo suportado pela estrutura antes de seu colapso quer seja por instabilidade quer seja por ruptura. Esse limite de colapso é representado pela equação de equilíbrio Eq. (7.10).

$$F(x, u) - \lambda^* P_s(x) = 0. \quad (7.10)$$

Derivando-se a Eq. (7.10) em relação às variáveis de projeto x ,

$$\frac{\partial F(x, u)}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial F(x, u)}{\partial x} - \frac{\partial \lambda^*}{\partial x} P(x) - \lambda^* \frac{\partial P_s(x)}{\partial x} = 0 \quad (7.11)$$

onde F é o vetor de forças nodais internas da estrutura e P_s é o vetor das forças nodais externas em serviço. Sendo $K_t^* = \partial F(x, u) / \partial u$ a matriz de rigidez tangente e o sinal $*$ representa o nível de carga crítica ($\lambda = \lambda^*$).

$$K_t^* \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial F(x, u)^*}{\partial x} - \frac{\partial \lambda^*}{\partial x} P(x) - \lambda^* \frac{\partial P_s(x)}{\partial x} = 0 \quad (7.12)$$

onde a matriz K_t^* é singular ($K_t^* \varphi = \varphi^T K_t^* = 0$), ou seja, quando multiplicada por seu autovetor φ que equivale a um autovalor nulo conduz a Eq. (7.13).

$$\frac{\partial \lambda^*}{\partial x} = \frac{\varphi^T \left[\frac{\partial F(x, u)^*}{\partial x} - \lambda^* \frac{\partial P_s(x)}{\partial x} \right]}{\varphi^T P(x)} \quad (7.13)$$

Como $\mathbf{P}$ independe de $\mathbf{x}$ ($\partial P(x)/\partial x = 0$), a sensibilidade do fator de carga crítica em relação a $\mathbf{x}$ é expresso pela Eq. (7.14).

$$\frac{\partial \lambda^*}{\partial x} = \frac{\varphi^T \frac{\partial F(x, u)^*}{\partial x}}{\varphi^T P} \quad (7.14)$$

7.6.

Função objetivo

As derivadas da função objetivo (Eq. 5.28) em relação as variáveis de projeto $\mathbf{x}$ são apresentadas aqui para um caso geral, ou seja, que uma mesma variável x_i pode representar mais de um elemento (h, A_{sw}) ou seção (A_{si}, A_{ss}, D). Para o caso da sensibilidade em relação à altura h_i , tem-se

$$\frac{\partial \hat{f}(\hat{x})}{\partial \hat{h}_i} = \frac{C_c h_i^0}{f^0} \left[c_{ac} \sum_{k \in \Lambda_{h_i}} (A_{sw_k}^0 \hat{A}_{sw_k} l_k) + \sum_{k \in \Lambda_{h_i}} (b_k l_k) + \sum_{k \in \Lambda_{h_i}} (l_k) \right] \quad (7.15)$$

onde Λ_h é o conjunto de elementos com altura h_i . O índice i representa o número da variável de projeto que deriva e o índice k representa o número de um determinado elemento ($\Lambda_{h_i} \supset h_k$) sendo $k = i$.

No caso da sensibilidade em relação à armadura inferior e superior (A_{si}, A_{ss}) fica,

$$\frac{\partial \hat{f}(\hat{x})}{\partial \hat{A}_{si}} = \frac{C_a A_{si}^0}{2 f^0} \left[\sum_{k \in \Lambda_{si1,i}} (l_k) + \sum_{z \in \Lambda_{si2,i}} (l_z) \right] \quad (7.16)$$

$$\frac{\partial \hat{f}(\hat{x})}{\partial \hat{A}_{ss}} = \frac{C_a A_{ss}^0}{2 f^0} \left[\sum_{k \in \Lambda_{ss1,i}} (l_k) + \sum_{z \in \Lambda_{ss2,i}} (l_z) \right] \quad (7.17)$$

onde $\Lambda_{ss1}, \Lambda_{ss2}, \Lambda_{ss1}$, e Λ_{ss2} são o conjunto das áreas de aço longitudinais inferior e superior para os nós 1 e 2 (A_{si} e A_{ss}). O índice i representa o número da variável de projeto que deriva à função objetivo. k e z representam os números de um determinado elemento ($\Lambda_{si} \supset \{A_{si_k}, A_{si_z}\}$ e $\Lambda_{ss} \supset \{A_{ss_k}, A_{ss_z}\}$).

Para as derivadas com relação às armaduras transversais A_{sw} tem-se,

$$\frac{\partial \hat{f}(\hat{x})}{\partial \hat{A}_{swi}} = \frac{C_u A_{swi}^0}{f^0} \left[\sum_{z \in \Lambda_{swi}} (b_k + h_k - 4c) l_k \right] \quad (7.18)$$

onde Λ_{sw} é o conjunto de elementos com armadura transversal A_{sw} . O índice i representa o número da variável de projeto que deriva à função objetivo e k é o índice que representa o número de um determinado elemento ($\Lambda_{swi} \supset A_{swk}$).

Devido à função objetivo independer dos parâmetros de deformação D sua sensibilidade é nula para qualquer D_i (Eq. 7.19).

$$\frac{\partial \hat{f}(\hat{x})}{\partial D_i} = 0 \quad \forall i \quad (7.19)$$

7.7. Restrições

As sensibilidades das restrições em relação às variáveis de projeto x são representadas para um caso geral. O índice i determina cada uma das variáveis de projeto e o índice k , dependendo do tipo da restrição, tem as variações indicadas na Eq. (5.29).

As derivadas em relação ao critério de resistência são

$$\begin{aligned} \frac{\partial g_{1k}}{\partial \hat{x}_i} &= \text{sign}(N_s)_k \left(\frac{\partial N_s}{\partial \hat{x}_i} - \frac{\partial N_R}{\partial \hat{x}_i} \right)_k \alpha_{n_k} \\ \frac{\partial g_{2k}}{\partial \hat{x}_i} &= \begin{cases} \text{sign}(M_s)_k \left[\frac{\partial N_s}{\partial \hat{x}_i} \frac{M_s}{N_s} + \frac{M_R}{N_s^2} \left(N_s \frac{\partial M_s}{\partial \hat{x}_i} - M_s \frac{\partial N_s}{\partial \hat{x}_i} \right) - \frac{\partial M_R}{\partial \hat{x}_i} \right]_k \alpha_{m_k} & N_s \neq 0 \\ \text{sign}(M_s)_k \left(\frac{\partial M_s}{\partial \hat{x}_i} - \frac{\partial M_R}{\partial \hat{x}_i} \right)_k \alpha_{m_k} & N_s = 0 \end{cases} \quad (7.20) \\ \frac{\partial g_{3k}}{\partial \hat{x}_i} &= \text{sign}(V_s)_k \left(V_{Rd2} \frac{\partial V_s}{\partial \hat{x}_i} - V_s \frac{\partial V_{Rd2}}{\partial \hat{x}_i} \right)_k \frac{1}{V_{Rd2}^2} \end{aligned}$$

onde

$$\frac{\partial V_{Rd2}}{\partial \hat{x}_i} = 0,27 \left(1 - \frac{f_{ck}}{250} \right) f_{cd} b h^0 \frac{\partial h}{\partial \hat{x}_i}. \quad (7.21)$$

Em relação ao estado limite de utilização

$$\frac{\partial g_{4k}}{\partial \hat{x}_i} = \text{sign}(u_k) \frac{1}{u_{k,\text{lim}}} \frac{\partial u_k}{\partial \hat{x}_i} \quad (7.22)$$

$$\frac{\partial g_{5_k}}{\partial \hat{x}_i} = \frac{1}{\omega_{k, \lim}} \frac{\partial \omega_k}{\partial \hat{x}_i} \quad (7.23)$$

sendo

$$\frac{\partial \omega_k}{\partial \hat{x}_i} = \alpha_s s_m \frac{\partial \varepsilon_s}{\partial \hat{x}_i}. \quad (7.24)$$

Em relação ao limite das alturas

$$\frac{\partial g_{6_k}}{\partial \hat{x}_i} = \frac{h_k^0}{\kappa l_k} \frac{\partial \hat{h}_k}{\partial \hat{x}_i}. \quad (7.25)$$

Em relação ao limite das armaduras longitudinais e transversais

$$\begin{aligned} \frac{\partial g_{7_k}}{\partial \hat{x}_i} &= -\frac{A_{s_k}^0}{A_{s, \min_k}^2} \left(A_{s, \min_k} \frac{\partial \hat{A}_{s_k}}{\partial \hat{x}_i} - \hat{A}_{s_k} \frac{\partial A_{s, \min_k}}{\partial \hat{x}_i} \right) \\ \frac{\partial g_{8_k}}{\partial \hat{x}_i} &= -\frac{A_{sw_k}^0}{A_{sw, nec_k}^2} \left(A_{sw, nec_k} \frac{\partial \hat{A}_{sw_k}}{\partial \hat{x}_i} - \hat{A}_{sw_k} \frac{\partial A_{sw, nec_k}}{\partial \hat{x}_i} \right) \\ \frac{\partial g_{9_k}}{\partial \hat{x}_i} &= -\frac{A_{sw_k}^0}{A_{sw, \min_k}^2} \frac{\partial \hat{A}_{sw_k}}{\partial \hat{x}_i}. \end{aligned} \quad (7.26)$$

Em relação ao fator de carga crítica

$$\frac{\partial g_{10}}{\partial \hat{x}_i} = \frac{1}{\lambda_{\inf}^*} \frac{\partial \lambda^*}{\partial \hat{x}_i}. \quad (7.27)$$

Na avaliação das restrições probabilísticas é utilizado o valor do ponto de projeto $\mathbf{u}^*$ (MPP-Most Probable Point) obtido pelo FORM, substituindo os valores utilizados na análise determinística ($\mathbf{f}_c$, $\mathbf{f}_y$ e as cargas externas definidas como aleatórias), tem-se (Enevoldsen, 1993)

$$\frac{\partial G_{P1}}{\partial \hat{x}_i} = \frac{1}{\|\nabla_U g(\mathbf{u}^*, \mathbf{x})\|} \frac{\partial g_4}{\partial \hat{x}_i} \quad (7.28)$$

$$\frac{\partial G_{P2}}{\partial \hat{x}_i} = \frac{1}{\|\nabla_U g(\mathbf{u}^*, \mathbf{x})\|} \frac{\partial g_{10}}{\partial \hat{x}_i} \quad (7.29)$$

onde $\nabla_U g(\mathbf{u}^*, \mathbf{x})$ é o gradiente das variáveis aleatórias no espaço original $\mathbf{U}$. Nas Eqs. (7.28) e (7.29) são utilizadas as derivadas em relação ao estado limite de utilização, deformação excessiva ($\partial g_4 / \partial \hat{x}_i$), e em relação ao fator de carga crítica ($\partial g_{10} / \partial \hat{x}_i$). Porém, aqui elas são avaliadas sem utilizar fatores de minoração de

resistências ($\gamma_m = 1$), majoração de cargas ($\gamma_f = 1$) e o limite inferior da carga crítica ($\lambda_{inf}^* = 1$).

7.8.

Funções de comportamento

Neste trabalho as funções de comportamento são representadas pelo limite de deformação máxima (ELS) e pelo fator de carga crítica mínima (ELU) (Eqs. 7.30 e 7.31).

$$\frac{\partial G_2}{\partial X_i} = \text{sign}(u_k) \frac{1}{u_{k, \text{lim}}} \frac{\partial u_k}{\partial X_i} \quad (7.30)$$

$$\frac{\partial G_1}{\partial X_i} = \frac{\partial \lambda^*}{\partial X_i} \quad (7.31)$$

onde X_i é uma variável aleatória e

$$\frac{\partial u}{\partial X_i} = K_t^{-1} \left(\frac{\partial P(X_i)}{\partial X_i} - \frac{\partial F(X_i, u)}{\partial X_i} \right) \quad (7.32)$$

$$\frac{\partial \lambda^*}{\partial X_i} = \frac{\varphi^T \left[\frac{\partial F(X_i, u)^*}{\partial X_i} - \lambda^* \frac{\partial P_s(X_i)}{\partial X_i} \right]}{\varphi^T P(X_i)}. \quad (7.33)$$

Desta vez a parcela nas Eqs. (7.32) e (7.33) referentes à carga externa $\mathbf{P}$ pode depender da carga aleatória X_i ($\partial P(X_i, u)/\partial X_i \neq 0$).

Como foi visto nos itens anteriores as derivadas das funções de comportamento dependem das derivadas de N_s e M_s em relação ao vetor das variáveis aleatórias $\mathbf{u}$ ($\mathbf{f}_c$, $\mathbf{f}_y$ e as cargas externas definidas como aleatórias).

Os esforços internos (N_s e M_s) possuem duas parcelas distintas que os compõem: uma devido ao concreto $\mathbf{f}_c$ e a outra à armadura longitudinal $\mathbf{A}_s$. Ambas possuem características distintas quanto a sua não-linearidade física: o concreto possui nove casos de deformação na seção (Tabela 7.1), por causa das três regiões de tensão (Figura 7.1), e a armadura longitudinal possui quatro casos conforme Figura 7.2.

Derivando-se a Eq. (3.6) em relação a uma variável aleatória X_i tem-se,

$$\frac{\partial N_s}{\partial X_i} = \iint_{Ac} \frac{\partial \sigma_x}{\partial X_i} dA + \frac{\partial \sigma_{si}}{\partial X_i} A_{si} + \frac{\partial \sigma_{ss}}{\partial X_i} A_{ss} \quad (7.34)$$

$$\frac{\partial M_s}{\partial X_i} = - \iint_{Ac} \frac{\partial \sigma_x}{\partial X_i} y dA - \frac{\partial \sigma_{si}}{\partial X_i} y_{si} A_{si} - \frac{\partial \sigma_{ss}}{\partial X_i} y_{ss} A_{ss} \quad (7.35)$$

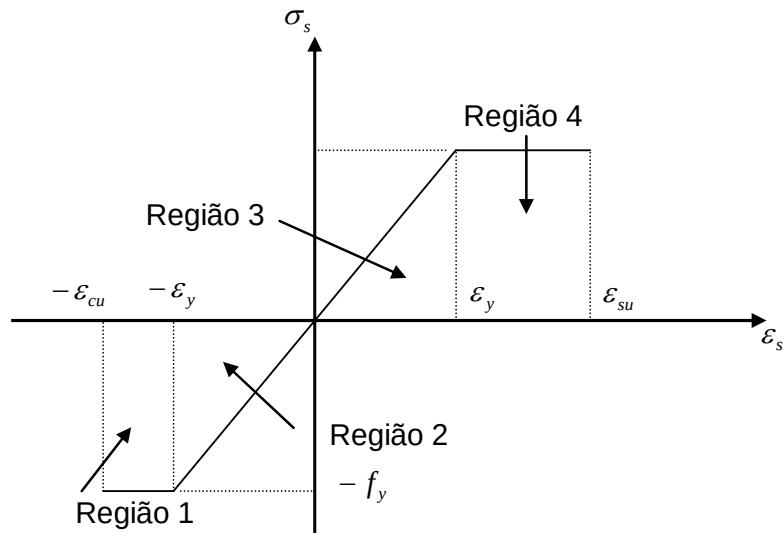


Figura 7.2 – Diagrama tensão-deformação de cálculo do aço classe A – Regiões.