

5 Projeto de Otimização Determinístico (DDO)

5.1. Introdução

O DDO (Deterministic Design Optimization) é um método de projeto ótimo baseado no método de projeto semiprobabilístico. No método semiprobabilístico a segurança é considerada garantida pelo uso de fatores de majoração para as cargas e de minoração para as resistências. Após a utilização dos fatores de segurança, o problema de otimização trata as variáveis como determinísticas e busca minimizar a função objetivo (custo, volume de material, etc.). As variáveis podem estar sujeitas às restrições de: geometria, segurança, estabilidade, serviço, etc. Este problema é representado da seguinte forma:

$$\begin{aligned} & \text{Minimizar } f(x) \\ & \text{Sujeito a } g_i(x) \leq 0, \quad i = 1, \dots, m \\ & \quad \quad \quad h_j(x) = 0, \quad j = 1, \dots, n \\ & \quad \quad \quad x_{\min} \leq x \leq x_{\max} \end{aligned} \quad (5.1)$$

onde x designa o vetor das variáveis de projeto determinísticas, $g_i(x)$ as restrições de desigualdade, $h_j(x)$ as restrições de igualdade e x_{\min} e x_{\max} são, respectivamente, os limites mínimos e máximos para as variáveis de projeto.

Os valores dos fatores de segurança utilizados dependem principalmente das normas de projeto e, algumas vezes, da experiência do engenheiro.

5.2. Dimensionamento ótimo de uma seção de concreto armado à flexão composta reta

Neste trabalho o dimensionamento de um pórtico plano de concreto armado requer a avaliação dos esforços solicitantes e resistentes nas seções críticas (seções das extremidades do elemento). A necessidade de obtenção destes esforços origina um subproblema também dependente das variáveis de projeto (h , altura da seção; A_{ss} e A_{si} , armaduras longitudinais; A_{sw} , armaduras transversais e os parâmetros de deformação D). Todas essas variáveis de projeto serão

detalhadas no próximo item, com exceção dos parâmetros de deformação D que são tratados neste item.

O critério adotado para o cálculo da resistência de uma seção crítica é o apresentado por Melo et al. (2004), onde se verifica a capacidade resistente em problemas de otimização de estruturas constituídas de barras de concreto armado. O parâmetro D é avaliado através da solução de um problema de maximização sem restrição do co-seno do ângulo entre os vetores solicitante $\{V_S\}^T = [M_S \ N_S]$ e resistente $\{V_R\}^T = [M_R \ N_R]$, como mostra a Figura 5.1 e é definido na Eq. (5.2). Através da maximização do problema exposto na Eq. (5.2), que busca o parâmetro D para $\theta = 0^\circ$, obtém-se $W = 1$. Este valor já era esperado, pois o valor máximo da função é bem conhecido.

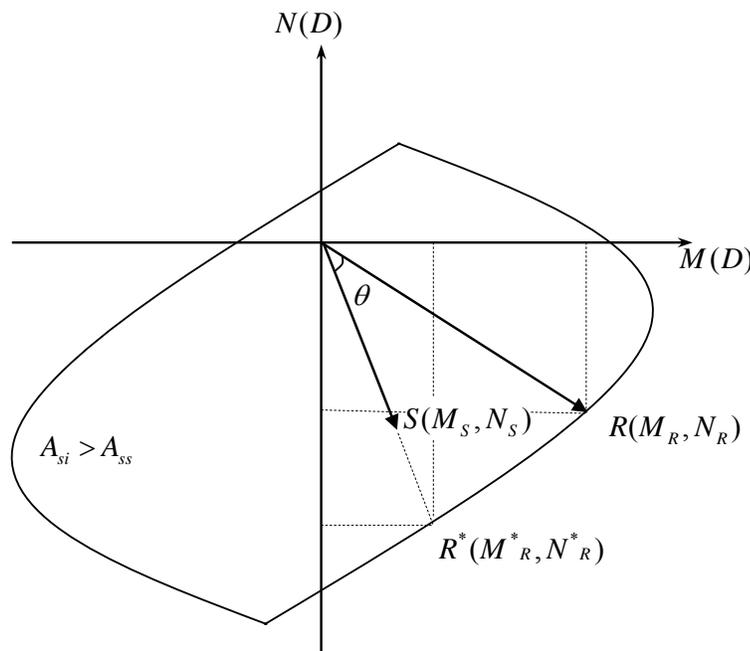


Figura 5.1 – Envoltória resistente de uma seção (Melo et al. 2004).

Após a determinação das características da seção e dos esforços solicitantes, o parâmetro de deformação D pode ser obtido através do seguinte problema de programação matemática sem restrição:

$$\text{Maximizar } W(D) = \cos \theta \tag{5.2}$$

$$W = \{v_R\} \bullet \{v_S\} = \frac{M_R M_S + N_R N_S}{\left[(M_R^2 + N_R^2)(M_S^2 + N_S^2) \right]^{\frac{1}{2}}}$$

onde $\{v_R\}$ e $\{v_S\}$ são os vetores unitários nas direções dos esforços resistentes e solicitantes, respectivamente.

Resolvendo-se o problema (5.2), tem-se o parâmetro de deformação D^* e os esforços $[M_R^* N_R^*]$, que definem o vetor apresentado na Figura 5.1. Caso o módulo par solicitante $[M_S N_S]$ não ultrapasse o módulo do par resistente depois do alinhamento dos vetores, a seção irá resistir ao par solicitante.

Na Figura 5.2 apresentam-se os domínios de estado limite último de uma seção transversal, segundo a NBR 6118 (ABNT, 2004), onde ocorre:

1. Ruptura convencional por deformação plástica excessiva:
 - reta **a** – tração uniforme;
 - domínio 1 – tração não uniforme, sem compressão;
 - domínio 2 – flexão simples ou composta sem ruptura à compressão do concreto ($0 \leq \varepsilon_c < 3,5 \text{‰}$);
2. Ruptura convencional por encurtamento limite do concreto:
 - domínio 3 – flexão simples (seção subarmada) ou composta;
 - domínio 4 – flexão simples (seção superarmada) ou composta;
 - domínio 4a: flexão composta com armaduras comprimidas;
 - domínio 5: compressão não uniforme, sem tração;
 - reta **b** – compressão uniforme.

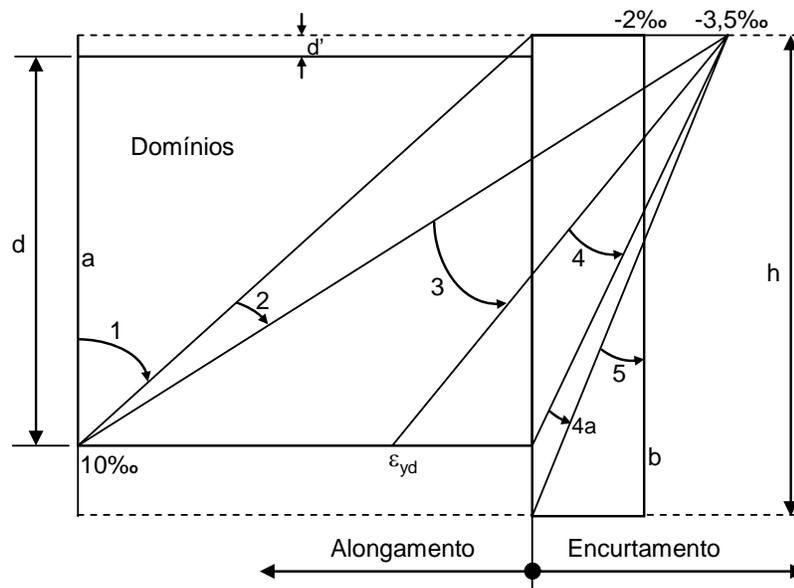


Figura 5.2 – Domínios de estado limite último de uma seção transversal.

No problema definido na Equação (5.2) a variável de projeto é o parâmetro de deformação D (Eboli, 1989) que define a configuração deformada resistente da seção. Em Eboli (1989) as deformações das fibras extremas correspondentes aos domínios definidos na Figura 5.2 são definidas em função do parâmetro D como representado pela Figura 5.3.

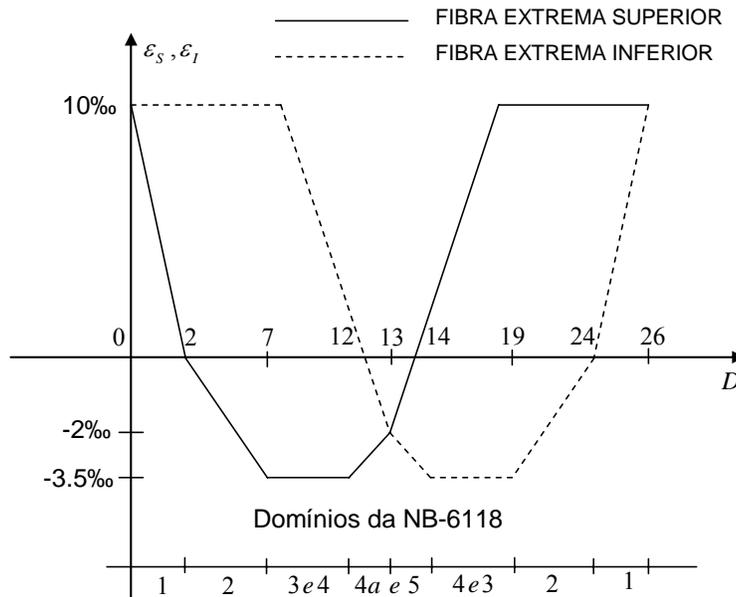


Figura 5.3 – Funções $\epsilon_s(D)$ e $\epsilon_l(D)$.

Neste trabalho é utilizado o parâmetro de deformação D de forma adimensional, ou seja, o valor de D varia de zero a um, como adotado em Melo (2000b). A adimensionalização é feita para se ter mais estabilidade numérica no algoritmo de solução do problema de otimização. Na Tabela 5.1 são apresentados os valores limites para o parâmetro de deformação D utilizados neste trabalho em cada domínio do ELU, onde \bar{h} é a altura na seção de referência e d' é a distância do centro de gravidade da armadura à borda mais próxima da seção.

Domínios	Limites
1	$0 \leq D \leq \frac{10}{27}$
2	$\frac{10}{27} \leq D \leq \frac{1}{2}$
3	$\frac{1}{2} \leq D \leq \frac{1}{27} (23,5 - \varepsilon_{yd} \times 10^3)$
4	$\frac{1}{27} (23,5 - \varepsilon_{yd} \times 10^3) \leq D \leq \frac{23,5}{27}$
4a	$\frac{23,5}{27} \leq D \leq \frac{1}{27} \left[27 - \frac{3,5(\bar{h} - d')}{\bar{h}} \right]$
5	$\frac{1}{27} \left[27 - \frac{3,5(\bar{h} - d')}{\bar{h}} \right] \leq D \leq 1$

Tabela 5.1 – Valores limites para D (Melo et al. 2004).

Para determinação dos esforços resistentes ou para construção da envoltória da Figura 5.1, que é obtida variando-se o parâmetro D de zero a um, as seguintes expressões são utilizadas:

$$N_R(D) = \iint_A \sigma_X(D) dA = \iint_{Ac} \sigma_X(D) dA + \sigma_{si}(D) A_{si} + \sigma_{ss}(D) A_{ss} \quad (5.3)$$

$$M_R(D) = - \iint_A \sigma_X(D) y dA = - \iint_{Ac} \sigma_X(D) y dA - \sigma_{si}(D) y_{si} A_{si} - \sigma_{ss}(D) y_{ss} A_{ss} \quad (5.4)$$

5.3.

Descrição do problema proposto via método DDO

Neste trabalho é utilizado o algoritmo apresentado por Melo (2000b) com algumas adaptações para a NBR 6118 (ABNT, 2004) para se obter o projeto ótimo determinístico, que é descrito a seguir.

5.3.1.

Variáveis de projeto

As variáveis de projeto são contínuas. Elas relacionam-se com cada elemento do modelo de elementos finitos e são descritas a seguir:

1. A altura da seção transversal, h . A altura pode assumir diferentes valores no mesmo vão, mas um único valor no mesmo elemento. O número

máximo de variáveis correspondentes a (h) é dado quando ele se iguala ao número de elementos do modelo (ne);

2. As armaduras longitudinais inferiores e superiores nas seções dos nós de extremidade. Sendo o número de variáveis igual (Figura 5.4):

- ao valor de ne para as armaduras inferiores dos nós i ($A_{si,i}$);
- ao valor de ne para as armaduras inferiores dos nós j ($A_{si,j}$);
- ao valor de ne para as armaduras superiores dos nós i ($A_{ss,i}$);
- ao valor de ne para as armaduras superiores dos nós j ($A_{ss,j}$).

Nó i e j representam a extremidade esquerda e direita do elemento, respectivamente.

3. A armadura transversal por unidade de comprimento, A_{sw} . A_{sw} é considerada constante ao longo do elemento, sendo assim, o número de variáveis correspondentes é igual ao valor de ne ;

4. Os parâmetros de deformação D , que descrevem as configurações resistentes no ELU, das seções de extremidades. Sendo, ne variáveis para os parâmetros D dos nós i (D_i), e ne variáveis para os parâmetros dos nós j (D_j).

O número máximo de variáveis de projeto será $8ne$.

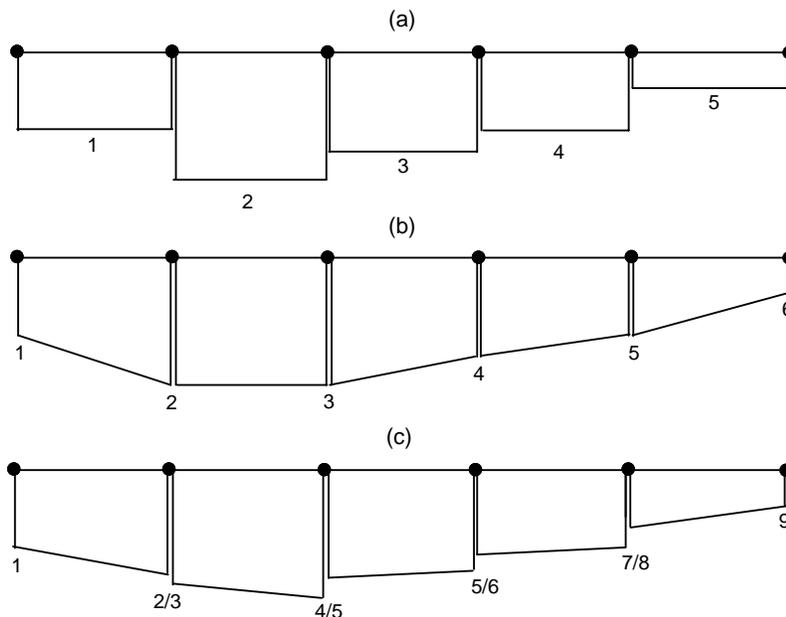


Figura 5.4 – Padrões de distribuição da armadura longitudinal (A_{ss} e A_{si}).

A Figura 5.4 apresenta três padrões de distribuição de armadura longitudinal possíveis para este trabalho. Ao se igualar as armaduras dentro do elemento, tem-

se a distribuição mostrada pela Figura 5.4a, ou seja, por exemplo ($A_{si,i} = A_{si,j}$). Ao se igualar as armaduras associadas a um mesmo nó, tem-se a distribuição mostrada pela Figura 5.4b, ou seja, por exemplo ($A_{si,i+1} = A_{si,j}$). Por último o caso geral, sem vinculação (Figura 5.4c), ou seja, por exemplo ($A_{si,i} \neq A_{si,j} \neq A_{si,i+1}$). Na Figura 5.4 os números abaixo de cada item representam um exemplo, onde uma estrutura é formada por 5 elementos, portanto: na Figura 5.4a tem-se 5 variáveis (A_{si}); na Figura 5.4b tem-se 6 variáveis (A_{si}) e na Figura 5.4c tem-se 9 variáveis (A_{si}).

5.3.2. Função objetivo

A função objetivo assumida representará o custo total dos materiais do pórtico e o custo da fôrma. Ela é representada matematicamente por

$$f = C_a \sum_{m=1}^{ne} (V_{si,m} + V_{ss,m} + V_{st,m}) + C_c \sum_{m=1}^{ne} b_m h_m l_m + C_f \sum_{m=1}^{ne} 2h_m l_m \quad (5.5)$$

$$V_{si,m} = \frac{(A_{si,i} + A_{si,j})_m}{2} l_m \quad (5.6)$$

$$V_{ss,m} = \frac{(A_{ss,i} + A_{ss,j})_m}{2} l_m \quad (5.7)$$

$$V_{st,m} = A_{sw,m} l_m (b_m + h_m - 4c) \quad (5.8)$$

onde,

$C_a = C_s \gamma_s$ é o custo do aço por unidade de volume;

C_s é o custo do aço por unidade de peso;

C_c é o custo do concreto por unidade de volume;

C_f é o custo da fôrma por unidade de área;

γ_s é o peso específico do aço;

$V_{si,m}$ é o volume da armadura longitudinal inferior do m -ésimo elemento;

$V_{ss,m}$ é o volume da armadura longitudinal superior do m -ésimo elemento;

$V_{st,m}$ é o volume da armadura transversal do m -ésimo elemento;

$A_{sw,m}$ é a armadura transversal por unidade de comprimento do elemento;

b_m é a largura da seção do m -ésimo elemento;

h_m é a altura da seção do m -ésimo elemento;

l_m é o comprimento da seção do m -ésimo elemento;

c é o cobrimento da armadura.

A primeira parcela representa o custo das armaduras necessárias, a segunda o custo do concreto e a última representa o custo da fôrma. É considerada a utilização de estribos de dois ramos, sem a inclusão do comprimento dos ganchos do estribo.

5.3.3. Restrições de resistência

A estrutura deve atender a critérios que avaliem a capacidade resistente das seções de extremidades dos elementos. Nesta formulação, utilizam-se restrições em cada seção de extremidade, ou seja, um total de $4ne$ (onde ne é o número de elementos). Para que a seção resista à solicitação de flexo-compressão, as restrições definidas por (5.9) e (5.10) devem ser atendidas:

$$\text{sign}(N_s)N_R(x) \geq \text{sign}(N_s)N_s(x,u) \quad (5.9)$$

$$\text{sign}(M_s N_s) \frac{M_R(x)}{N_R(x)} \geq \text{sign}(M_s N_s) \frac{M_s(x,u)}{N_s(x,u)} \text{ se } N_s \neq 0 \quad (5.10)$$

$$\text{sign}(M_s)M_R(x) \geq \text{sign}(M_s)M_s(x,u) \text{ se } N_s = 0$$

onde $N_R(x)$ é o esforço resistente normal e $M_R(x)$ é o momento resistente de cálculo numa seção de extremidade do elemento. Para o cálculo de $M_R(x)$ e $N_R(x)$ é considerado que $f_c = f_{cd}$ e $f_y = f_{yd}$. N_s é a força normal solicitante e M_s é o momento solicitante de cálculo. Para o cálculo de M_s e N_s é considerado $f_c = f_{cm}$ e $f_y = f_{ym}$. $\text{Sign}(x)$ retorna o sinal da expressão dada (se $x \geq 0$ $\text{Sign}(x)$ retorna +1, caso contrario é retornado -1).

São estabelecidas também as restrições quanto ao esmagamento da biela comprimida e para o cálculo da armadura transversal necessária, sendo uma restrição para cada elemento, ou seja, ne restrições. Estas restrições são representadas matematicamente por:

$$V_{sd} \leq V_{Rd2} \quad (5.11)$$

$$V_{Rd2} = 0,27(1 - f_{ck}/250)f_{cd} b d \quad (5.12)$$

$$A_{sw} \geq A_{sw,nec} \quad (5.13)$$

$$V_{Rd3} = V_c + V_{sw} \geq V_{Sd} \quad (5.14)$$

$$V_{sw} = (A_{sw,nec}/s) 0,9 d f_{ywd} (\text{sen} \alpha_{sw} + \text{cos} \alpha_{sw}) \quad (5.15)$$

onde,

- V_{Sd} - é a força cortante solicitante de cálculo na seção;
- V_{Rd2} - é a força cortante resistente de cálculo relativa à ruína das diagonais comprimidas de concreto;
- f_{cd} - é a resistência característica de dimensionamento do concreto à compressão;
- V_{Rd3} - é a força cortante resistente de cálculo relativa à ruína por tração diagonal;
- V_c - é a parcela de força cortante absorvida por mecanismos complementares ao de treliça (considera-se para este trabalho $V_c = 0$);
- V_{sw} - a parcela absorvida pela armadura transversal;
- α_{sw} - é o ângulo de inclinação da armadura transversal em relação ao eixo longitudinal do elemento estrutural, podendo-se tomar valores na faixa $45^\circ \leq \alpha_{sw} \leq 90^\circ$ (assumindo-se que a armadura vertical é composta por estribos verticais, ou seja, $\alpha_{sw} = 90^\circ$);
- f_{ywd} - é a resistência de projeto da armadura de cisalhamento;
- b - é largura da seção;
- d - é a altura útil da seção transversal;
- A_{sw}/s - é a área da seção transversal total de estribos por metro linear de viga.

É considerado o modelo I da NBR 6118 (ABNT, 2004) que admite diagonais de compressão inclinadas de $\theta = 45^\circ$ em relação ao eixo longitudinal do elemento estrutural.

Para a análise destas restrições, que fazem parte do ELU, os coeficientes de ponderação das resistências e das ações são considerados segundo o estabelecido pela NBR 6118.

5.3.4. Restrições para o ELS

Para evitar que a estrutura sofra deslocamentos que ultrapassem os limites de deformação excessiva estabelecidos pela NBR 6118 (ABNT, 2004), são impostas restrições aos deslocamentos nodais u_j , calculados com as ações externas de serviço como segue

$$\text{sign}(u_j)u_j \leq u_{j,\text{lim}} \quad j = 1, \dots, \text{ndr} \quad (5.16)$$

onde $u_{j,\text{lim}}$ é o valor admissível para cada deslocamento j e ndr é o número de deslocamentos nodais restritos.

Em casos de controle de deslocamento nodal excessivo em vigas, considera-se a flecha adicional diferida decorrente das cargas de longa duração em função da fluência. De maneira aproximada pode-se obter a flecha total através do produto da flecha imediata pelo fator α_f dado pela expressão:

$$\alpha_f = \frac{\Delta \xi}{1 + 50\rho'} \quad (5.17)$$

$$\rho' = \frac{As'}{b d} \quad (5.18)$$

$$\Delta \xi = \xi(t) - \xi(t_0)$$

$$\xi(t) = 0,68(0,996^t) t^{0,32} \quad \text{para } t \leq 70 \text{ meses} \quad (5.19)$$

$$\xi(t) = 2 \quad \text{para } t > 70 \text{ meses}$$

sendo t_0 a idade, em meses, relativa à data de aplicação da carga de longa duração; t o tempo, em meses, quando se deseja o valor da flecha diferida; ρ' a taxa de armadura comprimida; $\xi(t)$ o coeficiente função do tempo e As' a área da seção da armadura longitudinal de compressão. O valor da flecha total é obtido ao multiplicar-se a flecha imediata por $(1 + \alpha_f)$.

Para a análise do ELS os coeficientes de ponderação das resistências e das ações podem ser conservadoramente tomados iguais a um ($\gamma_m = \gamma_f = 1$).

5.3.5. Restrições com relação à altura das vigas

Com o intuito de não permitir o comportamento de viga parede na estrutura, é estabelecido um limite superior para a altura total da viga,

$$h \leq \kappa l \quad (5.20)$$

onde $\kappa = 0,5$ para vigas simplesmente apoiadas de um único tramo e $\kappa = 0,333$ nos demais casos e l é o vão da viga.

5.3.6. Restrições referentes às armaduras

As restrições que se referem às armaduras de flexão estabelecem valores mínimos para as armaduras de tração. A Tabela 5.2 estabelece os valores mínimos para armadura de flexão segundo a norma NBR 6118. As restrições são representadas matematicamente a seguir:

$$A_s \geq A_{s,\min} \quad (5.21)$$

Forma da seção	Valores mínimos de $\rho_{\min} (A_{s,\min}/A_c)$							
	f_{ck} ω_{\min}	20	25	30	35	40	45	50
Retangular	0,035	0,150	0,150	0,173	0,201	0,230	0,259	0,288

Tabela 5.2 – Taxas mínimas de armadura de flexão (NBR 6118, 2003).

Para a armadura transversal são determinados limites com relação à área mínima $A_{sw,\min}$:

$$A_{sw} \geq A_{sw,\min} \quad (5.22)$$

Sendo,

$$\frac{A_{sw,\min}}{s} = 0,2 \frac{f_{ct,m}}{f_{ywk}} b \operatorname{sen} \alpha_{sw} \quad (5.23)$$

onde,

α_{sw} - é o ângulo de inclinação da armadura transversal em relação ao eixo longitudinal do elemento estrutural, podendo-se tomar valores na faixa $45^\circ \leq \alpha_{sw} \leq 90^\circ$ (assumindo-se que a armadura vertical é composta por estribos verticais, ou seja, $\alpha_{sw} = 90^\circ$);

f_{ywk} - é a resistência ao escoamento da armadura de cisalhamento;

- $f_{ct,m}$ - é a resistência à tração média do concreto ($f_{ct,m} = 0,3f_{ck}^{2/3}$);
- b - é largura da seção;
- A_{sw}/s - é a área da seção transversal total de estribos por metro linear de viga.

Para a análise destas restrições, que fazem parte do ELU, os coeficientes de ponderação das resistências e das ações são considerados segundo o estabelecido pela NBR 6118 (ABNT, 2004).

5.3.7. Restrição relativa ao fator de carga crítica

Esta restrição estabelece a garantia de que a carga devida aos esforços solicitantes não ocasione a perda de estabilidade, i.e., garanta que o valor do fator de carga crítica de instabilidade (λ^*) seja maior que o valor do fator de proporcionalidade correspondente às cargas de projeto (λ_f). Quando $\lambda^* < \lambda_f$ o equilíbrio não é satisfeito. Para que isso seja prevenido tem-se a restrição

$$\lambda^* \geq \lambda_{inf}^* \quad (5.24)$$

sendo λ_{inf}^* uma constante com $\lambda_{inf}^* \geq \lambda_f$. Entretanto, λ_{inf}^* não deve ser confundido com um coeficiente de segurança estrutural, mas entendido como uma forma de se assegurar que a estabilidade do equilíbrio para cargas de projeto é pelo menos igual às definidas por λ_f .

5.3.8. Restrições laterais

As restrições laterais definem os limites mínimos e máximos para as variáveis de projeto.

$$x_{i,\min} \leq x_i \leq x_{i,\max} \quad i = 1 \dots nvp. \quad (5.25)$$

onde nvp é o número de variáveis de projeto.

5.3.9. Adimensionalização de variáveis

Para não ocorrer instabilidade numérica nos algoritmos de otimização devido à diversidade de unidades de medidas presentes nas restrições, nas variáveis de projeto e na função objetivo, é recomendável que se faça a adimensionalização das grandezas envolvidas. Para isso são empregados os seguintes fatores de escala:

1. as variáveis de projeto e a função objetivo são adimensionalizadas dividindo as mesmas por seus respectivos valores iniciais,

$$\begin{aligned}\hat{h} &= \frac{h_i}{h_i^0} \quad i = 1, \dots, nh \\ \hat{A}_{si,j} &= \frac{A_{si,j}}{A_{si,j}^0} \quad j = 1, \dots, nsi \\ \hat{A}_{ss,k} &= \frac{A_{ss,k}}{A_{ss,k}^0} \quad k = 1, \dots, nss \\ \hat{A}_{sw,l} &= \frac{A_{sw,l}}{A_{sw,l}^0} \quad l = 1, \dots, nsw \\ \hat{f}(\hat{x}) &= \frac{f(\hat{x})}{f(\hat{x}^0)}\end{aligned}\tag{5.26}$$

onde nh , nsi , nss , nsw são o número de: alturas, armaduras longitudinais inferiores, armaduras longitudinais superiores e armaduras de cisalhamento, respectivamente. Os parâmetros de deformação D já são adimensionais. Após a adimensionalização tem-se o novo vetor de variáveis adimensionais, \hat{x} ;

2. a restrição relativa à força normal é multiplicada pelo fator $\alpha_n = 1/(bh^0 f_{cd})$;
3. a restrição relativa à excentricidade é primeiro reescrita multiplicando-a pela força normal resistente e depois pelo fator $\alpha_m = 1/(b(h^0)^2 f_{cd})$. Para essa transformação, é necessário que haja a igualdade de sinais dos esforços;

4. as demais restrições são adimensionalizadas através dos seus respectivos valores mínimos ou máximos admissíveis.

5.3.10.

O problema de DDO

Após a adimensionalização, a função objetivo e as restrições do problema de DDO estão apresentadas a seguir. Este problema tem como objetivo encontrar o vetor das variáveis adimensionais que represente o valor ótimo da função objetivo efetiva,

$$\hat{f}(\hat{x}) = \frac{C_c}{f^0} \left[c_{ac} \sum_{m=1}^{ne} (V_{si,m} + V_{ss,m} + V_{st,m}) + \sum_{m=1}^{ne} b_m h_m^0 \hat{h}_m l_m + 2c_{fc} \sum_{m=1}^{ne} h_m^0 \hat{h}_m l_m \right] \quad (5.28)$$

submetida às seguintes restrições:

$$\text{sign}(N_s)_i [N_s(x,u) - N_R(x)]_i \alpha_{n_i} \leq 0 \quad i = 1 \dots ns.$$

$$\text{sign}(M_s)_i \left[N_R(x) \frac{M_s(x,u)}{N_s(x,u)} - M_R(x) \right]_i \alpha_{m_i} \leq 0 \quad \text{se } N_s \neq 0 \quad i = 1 \dots ns.$$

$$\text{sign}(M_s)_i [M_s(x,u) - M_R(x)]_i \alpha_{m_i} \leq 0 \quad \text{se } N_s = 0 \quad i = 1 \dots ns.$$

$$\text{sign}(u_j) \frac{u_j}{u_{j,\text{lim}}} - 1 \leq 0 \quad j = 1 \dots ndr.$$

$$\frac{h_k^0 \hat{h}_k}{\kappa l_k} - 1 \leq 0 \quad k = 1 \dots nh.$$

$$1 - \frac{A_{s_l}^0 \hat{A}_{s_l}}{A_{s,\text{min}_l}} \leq 0 \quad l = 1 \dots nst.$$

$$\frac{V_{Sd}}{V_{Rd2}} - 1 \leq 0 \quad k = 1 \dots ne.$$

$$1 - \frac{A_{sw_k}^0 \hat{A}_{sw_k}}{A_{sw,\text{nec}_k}} \leq 0 \quad k = 1 \dots ne.$$

$$1 - \frac{A_{sw_k}^0 \hat{A}_{sw_k}}{A_{sw,\text{min}_k}} \leq 0 \quad k = 1 \dots ne.$$

$$1 - \frac{\lambda^*}{\lambda_{\text{inf}}^*} \leq 0$$

$$\hat{x}_{i,\text{min}} \leq \hat{x}_i \leq \hat{x}_{i,\text{max}} \quad i = 1 \dots nvp. \quad (5.29)$$

sendo ns o número de seções de extremidade, ndr o número de deslocamentos restritos, nst o número de armaduras tracionadas na flexão, nh o número de alturas diferentes como variáveis, ne o número de elementos, $c_{ac} = C_a / C_c$ e $c_{fc} = C_f / C_c$.