

## 4 Análise de confiabilidade de estruturas

Nos primórdios da engenharia civil, o desconhecimento técnico-científico conduzia a projetos excessivamente seguros, mas em contrapartida de custo muito elevado. Hoje em dia, o progresso científico nos permite projetar estruturas confiáveis e econômicas.

Na teoria da confiabilidade de estruturas, muitas técnicas eficientes têm sido desenvolvidas nos últimos 30 anos para se estimar a confiabilidade. Dentre elas têm-se, principalmente, o método de confiabilidade de primeira ordem (First Order Reliability Method, FORM) e o método de confiabilidade de segunda ordem (Second Order Reliability Method, SORM) (Melchers, 2002). O FORM propicia, na maioria dos problemas, uma precisão satisfatória com um tempo de análise computacional reduzido quando comparado a outros métodos, o que justifica sua larga utilização nas mais diversas aplicações de projeto, como por exemplo neste trabalho. São considerados dois tipos de variáveis:

1. Variáveis determinísticas  $x$ : são as incógnitas do problema de dimensionamento ótimo. Elas formam o vetor que representa os parâmetros de controle do sistema, sendo elas as dimensões geométricas da estrutura e as áreas transversais de aço longitudinal e transversal (vide seção 5.3.1);
2. Variáveis randômicas  $u$ : essas variáveis representam as incertezas associadas à estrutura, sendo as propriedades mecânicas dos materiais e as ações externas. São identificadas por suas distribuições e por seus parâmetros probabilísticos. Em conjunto com o vetor  $x$ , elas são usadas no processo de otimização baseado em confiabilidade (Vide seção 6.5).

No FORM, a análise de confiabilidade requer a identificação das distribuições e dos parâmetros probabilísticos de cada variável aleatória. Sendo assim, é necessário compreender cada um destes parâmetros para que haja uma boa caracterização das variáveis aleatórias que compõem o problema.

#### 4.1. Conceitos básicos de probabilidade

Há dois tipos de experimentos: determinísticos e não-determinísticos. Quando os resultados dos experimentos de um determinado fenômeno são previsíveis, o fenômeno é chamado de determinístico. Caso contrário, se os resultados dos experimentos não forem previsíveis, o fenômeno é chamado de aleatório ou não-determinístico. Neste último caso, cada experimento deve ser associado a um valor de probabilidade de ocorrência do evento relacionado ao fenômeno em observação.

Usualmente uma função densidade de probabilidade  $f_X(x)$ , é identificada por PDF (Probability Density Function). Sendo expressa matematicamente em (4.1) a probabilidade da variável X assumir valores entre  $a$  e  $b$ .

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f_X(x) dx \quad (4.1)$$

onde X é a variável aleatória (randômica). Para que  $f_X(x)$  seja considerada uma PDF ela deve satisfazer as seguintes condições:

- $f_X(x) \geq 0,0$  para qualquer  $x$  ;
  - $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) dx = 1,0$ ;
  - $\int_a^b f_X(x) dx = P(a \leq X \leq b)$ .
- ( 4.2)

A função cumulativa de probabilidades (Cumulative Distribution Function, CDF),  $F_X(x)$ , é definida por:

- $F_X(-\infty) = 0,0$ ;
  - $0 \leq F_X(x) \leq 1,0$ ;
  - $F_X(\infty) = 1,0$ .
- ( 4.3)

Existem muitas funções teóricas que satisfazem as condições descritas para a PDF e para a CDF. A escolha de uma delas para representar um determinado fenômeno (ou variável) depende, basicamente, de se fazer ajustes em relação aos dados coletados. A PDF que mais se aproximar do histograma que representa os dados coletados para a variável, será utilizada para representá-la na análise.

#### 4.1.1. Parâmetros de uma variável aleatória

A operação matemática que é utilizada para a obtenção da expectância é a integração ponderada de uma variável randômica. A expectância de uma função de uma variável randômica é:

$$E\langle g(X) \rangle \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) f_x(x) dx \quad (4.4)$$

onde  $g(x)$  é a função da variável randômica e  $f_x(x)$  é a PDF de X. Como se pode observar pela Eq. (4.4) a expectância de uma função de uma variável randômica é a integral do produto de  $g(x)$  por  $f_x(x)$ .

A principal expectância é conhecida como *média* ou valor esperado (primeiro momento) de uma variável aleatória X e é obtida com  $g(x) = X$ :

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_x(x) dx = \mu_X \quad (4.5)$$

Outras expectâncias importantes de uma função de uma variável randômica são:

1. o *valor quadrado médio* (segundo momento) de uma variável randômica,

$$E\langle X^2 \rangle \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_x(x) dx \quad (4.6)$$

2. a *variância* (segundo momento em torno da média ou segundo momento central) de uma variável randômica é definida como

$$\text{Var}(X) \equiv E\langle (X - \mu_X)^2 \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu_X)^2 f_x(x) dx = E\langle X^2 \rangle - (\mu_X)^2 \quad (4.7)$$

3. o *desvio padrão* da variável randômica é definido como

$$\sigma_X = +\sqrt{\text{Var}(X)} \quad (4.8)$$

O *coeficiente de variação*,  $\delta$ , de X é expresso pelo desvio padrão dividido pela média:

$$\delta = \frac{\sigma_X}{\mu_X} \quad (4.9)$$

Por convenção,  $\delta$  é adotado sempre positivo, mesmo que a média venha a ser negativa.

A expectância também pode ser aplicada a mais de uma variável randômica. Assim, a expectância de uma função de várias variáveis randômicas  $g(x_1, x_2, \dots, x_n)$  é definido como

$$E\langle g(X_1, X_2, \dots, X_n) \rangle \equiv \int_{x_1=-\infty}^{+\infty} \dots \int_{x_n=-\infty}^{+\infty} g(x_1, x_2, \dots, x_n) f_x(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n \quad (4.10)$$

Quando se fala de expectância de duas variáveis randômicas, existem dentre elas algumas que são frequentemente úteis, tais como:

1. o valor esperado do produto de duas variáveis randômicas  $X_j$  e  $X_k$  é

$$E\langle X_j X_k \rangle \equiv \int_{x_j=-\infty}^{+\infty} \int_{x_k=-\infty}^{+\infty} x_j x_k f_{x_j, x_k}(x_j, x_k) dx_j dx_k \quad (4.11)$$

onde de  $f_{x_j, x_k}(x_j, x_k)$  é a PDF conjunta de  $X_j$  e  $X_k$ ;

2. quando existirem duas variáveis randômicas, existirão várias medidas estatísticas que podem ser usadas para capturar como as duas variáveis randômicas se movem juntas através do tempo. As duas mais largamente usadas são a correlação (coeficiente de correlação) e a covariância. A covariância fornece uma medida não padronizada do grau no qual elas se movem juntas, e é estimada tomando o produto dos desvios da média para cada variável em cada período. Assim, a *covariância* entre  $X_j$  e  $X_k$  é definida como

$$\begin{aligned} Cov(X_j X_k) &\equiv E\langle (X_j - \mu_j)(X_k - \mu_k) \rangle = E\langle X_j X_k \rangle - E\langle X_j \rangle E\langle X_k \rangle \\ &= \int_{x_j=-\infty}^{+\infty} \int_{x_k=-\infty}^{+\infty} (x_j - \mu_j)(x_k - \mu_k) f_{x_j, x_k}(x_j, x_k) dx_j dx_k \end{aligned} \quad (4.12)$$

$$E\langle X_j \rangle \equiv \mu_j \equiv \int_{x_j=-\infty}^{+\infty} x_j f_{x_j, x_k}(x_j, x_k) dx_j dx_k$$

$$E\langle X_k \rangle \equiv \mu_k \equiv \int_{x_j=-\infty, x_k=-\infty}^{+\infty} x_k f_{x_j, x_k}(x_j, x_k) dx_j dx_k$$

3. o *coeficiente de correlação* estabelece um índice de relação linear entre duas variáveis aleatórias e pode ser representado matematicamente por,

$$\rho_{jk} = \frac{Cov(X_j, X_k)}{\sigma_{X_j} \sigma_{X_k}} \quad (4.13)$$

onde  $\sigma_{X_j}$  e  $\sigma_{X_k}$  são os desvios padrões das variáveis randômicas.

O coeficiente de correlação entre duas variáveis aleatórias tem seu valor sempre dentro do intervalo  $(-1 \leq \rho_{jk} \leq 1)$  como pode ser visualizado na Figura 4.1 e classificado verbalmente pela Tabela 4.1.

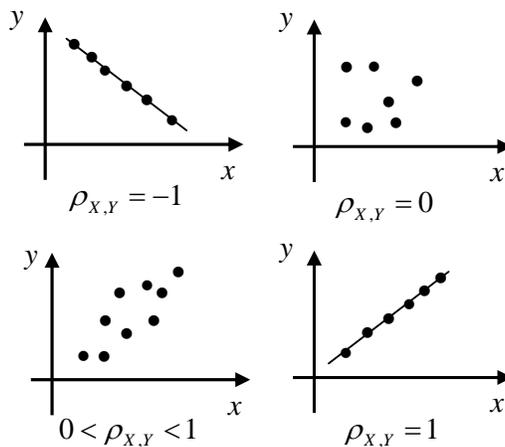


Figura 4.1 – Representação gráfica do coeficiente de correlação.

Intervalo do $\rho$	Grau de dependência
0,0 à 0,3	Baixo
0,3 à 0,5	Médio
0,5 à 0,7	Importante
0,7 à 0,9	Forte
0,9 à 1,0	Muito Forte

Tabela 4.1 – Grau de dependência de correlação entre variáveis (Soares e Venturini, 2001).

Quando  $\rho_{jk} = 0$  diz-se que as variáveis aleatórias são estatisticamente independentes ou não-correlacionadas, pois suas características estatísticas não se alteram devido à presença de uma outra variável, ou seja, a realização de uma variável não depende ou influi na realização da outra variável. A maioria das variáveis da análise de estruturas pertence a este grupo.

#### **4.1.2. Distribuições probabilísticas**

Todas as funções que atendam às condições estabelecidas em (4.2) para uma função PDF podem ser usadas como distribuição de probabilidades. Buscando-se que a PDF represente estatisticamente da melhor forma possível um determinado fenômeno, as mais diversas distribuições podem ser utilizadas. Nas diversas bibliografias (Hart, 1982; Nowak, 2000; JCSS<sup>3</sup>, 2000; JCSS<sup>2</sup>, 2001; Melchers, 2002) são apresentadas várias funções de distribuição de probabilidades que podem ser utilizadas na prática da engenharia, tais como:

- Distribuição normal ou Gaussiana;
- Distribuição lognormal;
- Distribuição exponencial;
- Distribuição de Rayleigh;
- Distribuição uniforme;
- Distribuição Tipo I (máximos extremos) ou Gumbel;
- Distribuição Tipo I (mínimos extremos);
- Distribuição Tipo II (máximos extremos);
- Distribuição Tipo III (mínimos extremos) ou Weibull;
- Distribuição Gamma;
- Distribuição Beta.

No Apêndice B são apresentados mais detalhes com relação às principais distribuições de probabilidades.

#### **4.1.3. Função densidade de probabilidade conjunta**

Em análises onde se tenha duas ou mais variáveis aleatórias, é necessário estabelecer o comportamento conjunto destas variáveis. Para a compreensão deste

comportamento de dependência, será empregada aqui a descrição para duas variáveis aleatórias dependentes entre si, X e Y. Contudo, estes mesmos conceitos se estendem para um número qualquer de variáveis aleatórias.

Através da PDF conjunta,  $f_{X,Y}(x,y)$ , das variáveis aleatórias dependentes entre si, X e Y, determina-se a CDF conjunta de probabilidades, por:

$$F_{X,Y}(a,b) = P(X \leq a, Y \leq b) = \int_{-\infty}^a \int_{-\infty}^b f_{X,Y}(x,y) dx dy \quad (4.14)$$

onde a PDF conjunta das variáveis aleatórias deve satisfazer as condições seguintes:

- $f_{X,Y}(x,y) \geq 0,0$  para qualquer x e y;
- $\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y) dx dy = 1,0$ ;
- $\int_a^b \int_c^d f_{X,Y}(x,y) dx dy = P(a \leq X \leq b, c \leq Y \leq d)$ .

## 4.2. Estado limite

O conceito de um estado limite relacionado à confiabilidade de estruturas pode ser definido como o limite entre um desempenho aceitável ou não aceitável da estrutura. Este limite é representado matematicamente por uma função de comportamento ou função de estado limite.

A função de falha pode representar vários estados limites que impossibilitem a utilização de uma determinada estrutura, onde tradicionalmente cada modo de falha pode ser considerado separadamente e, assim, pode-se definir para cada modo um estado limite específico.

Três tipos de estados limites podem ser considerados, segundo a NBR 6118 (ABNT, 2004):

1. *Estados limites últimos* (ELU) – correspondem ao esgotamento da capacidade resistente da estrutura como um todo ou de parte da mesma.

Podem-se citar alguns exemplos de modos de falha:

- Perda do equilíbrio da estrutura, admitida como corpo rígido;
- Esgotamento, total ou parcial, da capacidade resistente da estrutura, devido às solicitações normais, tangenciais e efeitos de segunda ordem.

2. *Estados limites de serviço* (ELS) – caracterizam a não recomendação de utilização da estrutura, mesmo que não tenha sido esgotada a capacidade resistente da mesma. Alguns exemplos de modos de falha são:
- Estado limite de formação de fissuras – estado em que se inicia a fissuração;
  - Estado limite de abertura de fissuras – estado em que as fissuras se apresentam com aberturas iguais aos máximos valores especificados. Quando ultrapassado pode possibilitar corrosão da armadura, penetração de agentes externos e perda irreversível de resistência da seção de concreto;
  - Estado limite de deformações excessivas – estado no qual os limites de deformação estabelecidos para utilização normal da estrutura são atingidos;
  - Estado limite de vibrações excessivas – estado no qual as vibrações atingem os limites estabelecidos para a utilização normal da construção.
3. *Estados limites de fadiga* (ELF) – estão relacionados com o acúmulo de danos à estrutura devido à atuação de cargas cíclicas que geram um mecanismo que envolve a formação e a propagação de fissuras até o colapso da estrutura. O ELF ocorre nas barras de aço inseridas no concreto, particularmente naquelas sob tração.

#### 4.2.1.

#### **Função de falha (função de comportamento ou função de estado limite)**

As funções de comportamento ou de estado limite são formuladas utilizando equações fornecidas em normas que descrevem os diversos estados limites. Tomando como exemplo a seção de uma viga que esteja submetida a um momento fletor devido a cargas externas, para se garantir que a capacidade resistente da seção não seja ultrapassada (condição  $R > S$ , também conhecido como *problema básico*) pode-se estabelecer a seguinte função de falha:

$$G(R,S) = R - S \quad (4.16)$$

onde  $R$  representa a capacidade resistente da seção e  $S$  o esforço solicitante na seção.

Considerando inicialmente as variáveis no espaço original  $U$ , sendo  $R$  e  $S$  variáveis independentes com distribuições normais (Figura 4.2a), é possível obter as variáveis normais reduzidas (padrão, ou seja, com média zero e desvio padrão unitário),  $r$  e  $s$ :

$$r = \frac{R - \mu_R}{\sigma_R} \quad (4.17)$$

$$s = \frac{S - \mu_S}{\sigma_S} \quad (4.18)$$

No espaço das variáveis reduzidas,  $V$  (ou seja, com média zero e desvio padrão unitário, Figura 4.2b) a função de falha  $G(V)$  pode ser escrita como:

$$G(V) = r\sigma_R + \mu_R - s\sigma_S - \mu_S \quad (4.19)$$

onde  $\sigma$  e  $\mu$  são o desvio padrão e a média das variáveis randômicas, respectivamente.

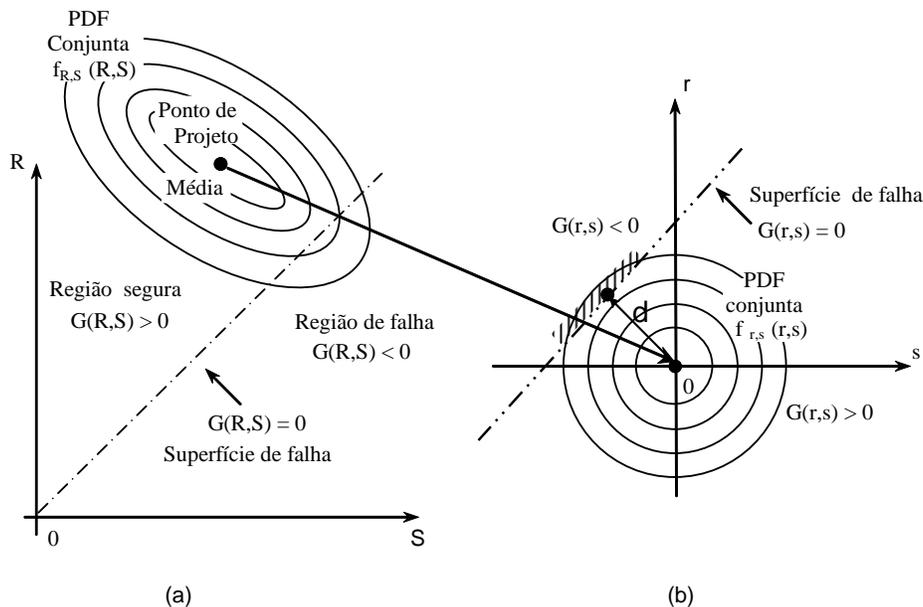


Figura 4.2 – Representação da superfície de falha na PDF conjunta: (a) espaço original  $U$ ; (b) espaço reduzido  $V$ .

A função de falha delimita o limite desejável e não desejável de tensões na seção ( $G=0$ ). Desta forma, quando  $G \geq 0$  a estrutura está segura ou atende ao

critério de comportamento desejado, já quando  $G < 0$  a estrutura não está segura ou não atende ao critério de desempenho desejado. A probabilidade de falha ( $P_f$ ) é dada pela probabilidade de ocorrer  $G < 0$ , e é representada da seguinte forma:

$$P_f = P(R - S < 0) = P(G < 0) \quad (4.20)$$

A Figura 4.2 mostra, para o caso de duas variáveis aleatórias normais, independentes e contínuas ( $R$  e  $S$ ), a superfície de falha (definida por  $G = 0$ ), o espaço seguro (dado por  $G > 0$ ) e o espaço de falha (definido por  $G < 0$ ). A área hachurada representa a região onde a função de comportamento assume valores menores do que zero. Na Figura 4.2 os círculos representam valores constantes da função PDF,  $f_{R,S}(R,S)$ , e  $d$  a menor distância de  $G(r,s)=0$  até a origem.

Pode-se descrever o exemplo anterior de uma forma mais geral fazendo  $\mathbf{u} = \{X_1, X_2, \dots, X_n\}$  como o vetor das variáveis randômicas que pode representar os parâmetros de resistência, cargas, dimensões e outros. Logo, a função de comportamento fica  $G(X_1, X_2, \dots, X_n)$  dependente do vetor  $\mathbf{u}$ .

### 4.3. Índice de confiabilidade

Na Figura 4.2b é mostrada a superfície de falha do *problema básico*  $G(r,s) = G(V) = 0$  no espaço das variáveis reduzidas. Através da geometria analítica é fácil demonstrar que a distância da reta  $G(V)=0$  até a origem, no espaço das variáveis reduzidas é igual a:

$$d = \frac{\mu_R - \mu_S}{\sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_S^2}} \quad (4.21)$$

que é também conhecido como índice de confiabilidade,  $\beta$ . Portanto, a distância do ponto sobre a superfície de falha mais próximo a origem é o próprio índice de confiabilidade.

Deve ser observado que o ponto sobre a superfície de falha mais próximo à origem é também o ponto sobre a reta com maior probabilidade de ocorrência, ou seja, o ponto com maior valor de função PDF,  $f_{R,S}(R,S)$  sobre a superfície de falha. Este ponto é chamado de ponto de projeto ou ponto mais provável de falha (MPP- Most Probable Point).

Estendendo-se para um número  $n$  qualquer de variáveis aleatórias normais estatisticamente independentes  $X_i = N(\mu_i, \sigma_i)$ , usando  $X_i$  para identificar as variáveis aleatórias envolvidas na análise e  $x$  para suas correspondentes variáveis reduzidas, caso  $G(u)$  seja uma função linear das variáveis  $X_i$  tem-se:

$$G(u) = a_0 + \sum_{i=1}^n a_i X_i \quad (4.22)$$

onde  $a_i$  são as constantes. Assim, o índice confiabilidade é representado como

$$\beta = \frac{a_0 + \sum_{i=1}^n a_i \mu_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2 \sigma_i^2}} \quad (4.23)$$

Uma outra forma de interpretação e obtenção de  $\beta$  é encontrada na literatura. Tomando-se novamente o *problema básico*  $G(u) = R - S$ , como uma combinação linear de duas variáveis randômicas normais padrão independentes. Assim,  $G(u)$  é considerada uma função de variáveis aleatórias normais independentes, para a qual é possível mostrar que:

$$\mu_{G(u)} = \mu_R - \mu_S \quad (4.24)$$

$$\sigma_{G(u)} = \sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_S^2} \quad (4.25)$$

sendo  $\mu_{G(u)}, \mu_R, \mu_S, \sigma_{G(u)}, \sigma_R, \sigma_S$  as médias e os desvios padrões das variáveis aleatórias e da função de comportamento. Desta forma, pode-se determinar a probabilidade de falha como,

$$P_f = P(G(u) \leq 0.0) = \Phi\left(\frac{k - \mu_{G(u)}}{\sigma_{G(u)}}\right) \quad (4.26)$$

onde  $\Phi$  é a função cumulativa da distribuição normal padrão. Fazendo  $k = G(u) = 0$  obtém-se a probabilidade da função de falha ser violada.

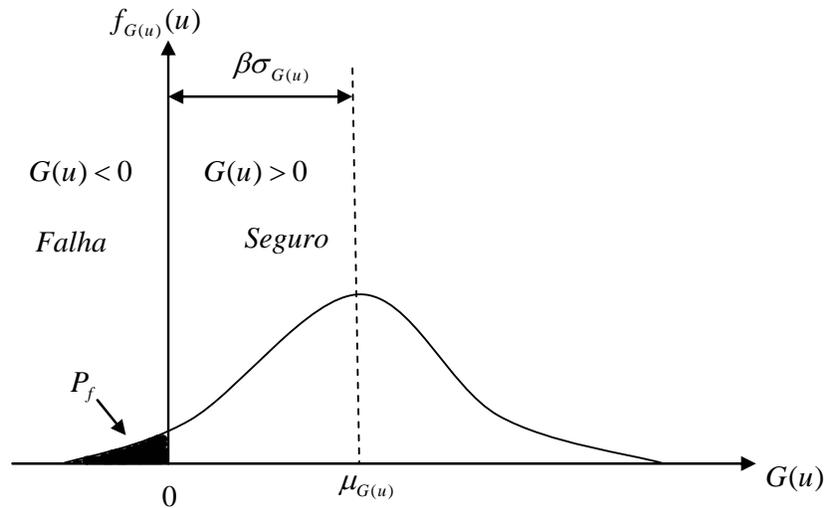


Figura 4.3 – Margem de segurança.

A Figura 4.3 mostra a representação gráfica do índice de confiabilidade,  $\beta$ , e da probabilidade de falha,  $P_f$ . Assim tem-se:

$$\beta = \frac{\mu_{G(u)}}{\sigma_{G(u)}} \Rightarrow \frac{\mu_R - \mu_S}{\sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_S^2}} \quad (4.27)$$

$$P_f = \int_{G(u) \leq 0} f_{G(u)}(u) du \quad (4.28)$$

Observa-se, portanto, que o índice  $\beta$  mede a distância entre o valor médio de  $G(u)$  e a origem (ponto zero) em unidades de desvios padrões de  $G(u)$ . Para uma função qualquer, o método FORM aproxima  $G(u)$  por um hiperplano que passa pelo MPP e é tangente a  $G(u)$  nesse ponto, permitindo assim o cálculo aproximado de  $\beta$  pela Equação (4.27), ou seja, os valores calculados da média e da variância de  $G(u)$  são aproximados devido à linearização da função.

A avaliação da Equação (4.28) para o *problema básico* (R, S) pode ser obtida exatamente. De uma forma geral, a função  $G(u)$  pode não ser linear e conter várias variáveis randômicas, ou seja, conduzindo a uma função PDF conjunta de múltiplas variáveis randômicas e correlacionadas,  $f_{G(u)}(u)$ , no espaço original  $U$ . Tal integral  $n$ -dimensional ( $n$  é o número de variáveis randômicas) num domínio complexo ( $G(u) \leq 0$ ) é de difícil obtenção e muitas vezes dispendiosa computacionalmente. Por isso costuma-se calcular o índice de confiabilidade  $\beta$  no espaço reduzido  $V$  (espaço normal padrão) e correlacioná-lo com a probabilidade de falha (métodos de segundo momento),  $P_f$  (Eq. (4.29) e Tabela 4.2).

$$\beta = -\Phi^{-1}(P_f) \text{ ou } P_f = \Phi(-\beta) \quad (4.29)$$

Com o objetivo de obter o índice de confiabilidade,  $\beta$ , para as mais variadas distribuições e funções de desempenho com variáveis dependentes ou não, foram elaborados vários métodos ao longo das últimas décadas. Entre eles destacam-se por sua relativa eficiência e simplicidade os métodos de segundo momento (Second-Moment Methods, FORM e SORM). Como já mencionado, o método FORM que é um método de segundo momento de primeira ordem, lineariza a função de comportamento no ponto de projeto. O termo segundo momento se deve à necessidade somente da utilização das médias e das variâncias.

$P_f$	$\beta$
$10^{-1}$	1,28
$10^{-2}$	2,33
$10^{-3}$	3,09
$10^{-4}$	3,71
$10^{-5}$	4,26
$10^{-6}$	4,75

Tabela 4.2 – Relação entre Índice de confiabilidade  $\beta$  e probabilidade de falha  $P_f$ .

#### 4.3.1.1.

#### Índices de confiabilidade relacionados à vida do projeto

As normas brasileiras ainda não regulamentaram a verificação dos níveis de confiabilidade requeridos para as estruturas. Entretanto, o CEN (2001) define, três níveis de classes de consequência, para a análise de confiabilidade. A Tabela 4.3 estabelece valores mínimos de índices de confiabilidade relacionados com as classes de consequências e confiabilidade para os estados limites últimos (ELU) e os estados limites serviço (ELS). Além disso, são feitas correspondências com os períodos de referência de um e 50 anos. Por exemplo, para uma estrutura pertencente à classe de consequência CC2 e considerando o ELU com um período de referência de 50 anos tem-se  $\beta = 3,8$  (Tabela 4.3), ou seja, estima-se que haverá uma probabilidade de falha máxima de  $P_f = 7,2 \times 10^{-5}$  em 50 anos.

Muitas vezes as análises de estruturas civis de concreto armado são consideradas pertencentes à classe de consequência CC2. Esta classe corresponde a consequências médias para a perda de vidas humanas, econômicas, sociais ou

consideráveis conseqüências ambientais, sendo aplicável a escolas, residências, hotéis e etc.

		Valores de $\beta$			
		ELU		ELS	
Classe de Conseqüências	Classe de Confiabilidades	1 ano de período de referência	50 anos de período de referência	1 ano de período de referência	50 anos de período de referência
CC3	RC3	5,2	4,3	-	-
CC2	RC2	4,7	3,8	2,9	1,5
CC1	RC1	4,2	3,3	-	-

Tabela 4.3 – Classes de conseqüências e confiabilidade, e valores de índices de confiabilidade (JCSS<sup>1</sup>, 2000; CEN, 2001; Gulvanessian et al., 2002).

#### 4.4. Método de simulação de Monte Carlo (MC)

O método de MC surgiu oficialmente, no ano de 1949, com o artigo *The Monte Carlo Method* de autoria dos matemáticos John Von Neumann e Stanislaw Ulam. Este método de cálculo de probabilidade, que se baseia em simulações aleatórias, é um dos mais antigos do gênero, sendo de fácil compreensão física e amplamente utilizado pelos engenheiros. Este método apresenta boa precisão e é de fácil implementação computacional, não exigindo maiores conhecimentos matemáticos.

Como o próprio nome indica, o método de simulação de MC envolve a geração de um grande número de valores randômicos para cada variável aleatória. Com estes valores, a função de comportamento é avaliada e assim observados seus resultados. No caso da análise da confiabilidade de estruturas, isto quer dizer que cada variável randomicamente gerada vai formar um vetor  $\mathbf{u}_i = \{X_1, X_2, \dots, X_n\}$  de variáveis randômicas. A função de comportamento é então avaliada  $G(\mathbf{u}_i)$ , se ela for violada (i.e.  $G(\mathbf{u}_i) \leq 0$ ), a estrutura ou o elemento não satisfaz às condições mínimas exigidas. Assim o experimento é repetido muitas vezes e em cada vez um novo vetor  $\mathbf{u}_i = \{X_1, X_2, \dots, X_n\}$  é gerado. Finalmente, se um número  $N$  de experimentos são feitos, a probabilidade de falha é dada aproximadamente por:

$$P_f \approx \frac{n(G(\mathbf{u}_i) \leq 0)}{N} \quad (4.30)$$

onde  $n(G(u_i) \leq 0)$  é o número de vezes que a função de comportamento teve valores  $G(u_i) \leq 0$  e  $N$  é o número de avaliações da função de comportamento necessárias para a precisão desejada.

Apesar da simplicidade do método de simulação de MC, o tempo necessário para a obtenção da probabilidade via MC demanda inúmeras análises da função de comportamento, ou seja, a sua utilização não é recomendável em problemas de otimização considerando incertezas, nos quais são utilizados métodos iterativos, o que conduziria a um número excessivo de análises, inviabilizando o processo.

Para mais detalhes sobre este método podem ser consultadas as seguintes referências: Hart (1982), Soares e Venturini (2001) e Melchers (2002).

#### 4.5. Método de confiabilidade de 1ª ordem (FORM)

No método FORM as variáveis aleatórias  $\mathbf{u}$ , cujas distribuições são quaisquer, correlacionadas ou não (espaço original  $\mathbf{U}$ ), são transformadas em variáveis normais padrões reduzidas e independentes (espaço normal padrão  $\mathbf{V}$ ). A função de comportamento  $\mathbf{G}(\mathbf{U})$  é escrita em função das variáveis no espaço  $\mathbf{V}$  como  $\mathbf{G}(\mathbf{V})$ . A superfície de falha  $\mathbf{G}(\mathbf{V}) = 0,0$  é aproximada por uma superfície linear (ou hiperplano) no ponto com a menor distância até a origem, identificado como  $V^*$  (ponto de projeto no espaço das variáveis reduzidas ou ponto mais provável de falha, ‘MPP – Most Probable Point’), que é também o ponto sobre o hiperplano, cujo valor da função densidade de probabilidade conjunta das variáveis é maior.

Com a obtenção do ponto, determina-se o índice de confiabilidade ( $\beta$ ) que é a distância deste ponto até a origem, calculada pela Eq. (4.31). A probabilidade de falha ( $P_f$ ) pode ser então simplesmente calculada pela Eq. (4.32).

$$\beta = \text{sign}(G(\mu)) \|V^*\| \quad (4.31)$$

$$P_f = P(F) = \int_F f_V(V) dV \cong \Phi(-\beta) \quad (4.32)$$

onde,  $F$  indica o domínio de falha  $G(V) < 0$ , conforme ilustra a Figura 4.4 para um caso bidimensional (duas variáveis aleatórias),  $\Phi$  é a CDF normal padrão e  $V^*$  é o ponto de projeto (MPP) no espaço reduzido.

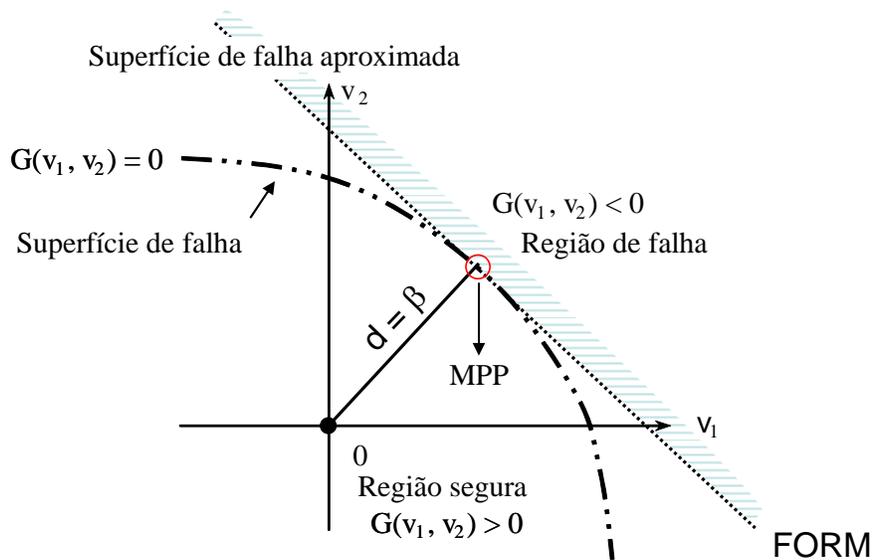


Figura 4.4 - Função de falha com duas variáveis randômicas no espaço normal padrão reduzido.

Como se pode observar, a determinação do ponto  $V^*$  (MPP) é um dos passos fundamentais para a obtenção da probabilidade de falha pelo método FORM. Para encontrar este ponto, formula-se um problema de otimização P (ou de programação não-linear) com uma restrição, tal que:

$$\begin{aligned} \text{P: } & \text{minimizar } \|V\| \\ & \text{Sujeito a } G(V) = 0 \end{aligned} \quad (4.33)$$

A obtenção do ponto de projeto  $V^*$ , leva a um problema de otimização, que pode ser resolvido por vários algoritmos. O algoritmo mais usado na análise de confiabilidade estrutural é o desenvolvido por Hasofer e Lind (1974) e aprimorado por Rackwitz e Fiessler (1978). Este algoritmo é comumente identificado como HLRF e é resumido pela seguinte expressão recursiva:

$$\mathbf{V}^{k+1} = \frac{1}{\|\nabla G(\mathbf{V}^k)\|^2} [\nabla G(\mathbf{V}^k)^T \mathbf{V}^k - G(\mathbf{V}^k)] \nabla G(\mathbf{V}^k) \quad (4.34)$$

onde  $\nabla G(\mathbf{V}^k)$  é o gradiente da função de falha no espaço reduzido e  $G(\mathbf{V}^k)$  é o valor da função de falha, ambos avaliados no ponto  $V^k$ .

Outros algoritmos também são recomendáveis para a avaliação de  $V^*$ , tais como: programação quadrática seqüencial (PQS) e método do gradiente projetado.

Para a análise de confiabilidade pelo método FORM é necessário um processo iterativo, como descrito resumidamente a seguir:

1. Escolher um ponto de partida  $\mathbf{U}$  no espaço original (geralmente o vetor das médias) e calcular a matriz dos coeficientes de correlação normais equivalentes;

$$\rho_{U_i U_j}^E = F \rho_{U_i U_j} \quad (4.35a)$$

onde  $\rho_{U_i U_j}^E$  é o coeficiente de correlação equivalente das variáveis aleatórias  $U_i$  e  $U_j$  e  $F$  depende do tipo de distribuição de ambas as variáveis (Melchers, 2002);

2. Calcular as médias e desvios padrões normais equivalentes no ponto de partida através das expressões

$$\sigma_{U_i}^N = \frac{\phi\left(\Phi^{-1}\left(F_{U_i}\left(U_i^k\right)\right)\right)}{f_{U_i}\left(U_i^k\right)} \quad (4.35b)$$

$$\mu_{U_i}^N = U_i^k - \sigma_{U_i}^N \Phi^{-1}\left(F_{U_i}\left(U_i^k\right)\right) \quad (4.35c)$$

e montar a matriz  $\boldsymbol{\sigma}$  e o vetor  $\mathbf{m}$ , com os respectivos desvios padrões e médias normais equivalentes;

3. Avaliar a função de falha  $G(\mathbf{U})$ , o Jacobiano e o gradiente de  $G(\mathbf{V})$  no espaço reduzido através das expressões a seguir,

$$G(\mathbf{V}) = G(\mathbf{U}) \quad (4.35d)$$

$$\mathbf{J} = \Gamma \boldsymbol{\sigma}^{-1} \quad (4.35e)$$

$$\nabla G(\mathbf{V}) = (\mathbf{J}^{-1})^T \nabla G(\mathbf{U}) \quad (4.35f)$$

onde  $\Gamma = L^{-1}$  e contém a inversa da matriz triangular inferior,  $L$ , obtida da decomposição de Choleski da matriz dos coeficientes de correlação normais equivalentes;

4. Transformar o ponto de partida para o espaço reduzido usando transformação de Nataf (Melchers, 2002);

$$\mathbf{V} = \mathbf{J}(\mathbf{U} - \mathbf{m}) \quad (4.35g)$$

5. Avaliar o novo ponto  $\mathbf{V}^{k+1}$  através do algoritmo HLRF (Eq. 4.34);
6. Avaliar o índice de confiabilidade;

$$\beta = \text{sign}(G(\boldsymbol{\mu})) \left\| \mathbf{V}^{k+1} \right\| \quad (4.35h)$$

7. Avaliar o novo ponto  $\mathbf{U}^{k+1}$  no espaço original através da expressão a seguir;

$$\mathbf{U}^{k+1} = \mathbf{U}^k + (\mathbf{J}^{-1})^T (\mathbf{V}^{k+1} - \mathbf{V}^k) \quad (4.35i)$$

8. Tomar  $\mathbf{U}^{k+1}$  como novo ponto de partida e repetir os passos 2 a 8 até a convergência, i.e.,

$$\frac{\|\mathbf{V}^{k+1}\| - \|\mathbf{V}^k\|}{\|\mathbf{V}^{k+1}\|} \leq TOL \quad (4.35j)$$

9. Avaliar a probabilidade de falha pelo método FORM através de:

$$P_f^{FORM} = \Phi(-\beta) \quad (4.35k)$$

Entretanto, há casos em que se pode ter mais de uma função de comportamento,  $G(\mathbf{U})$ . Nesses casos há que se efetuar a análise de confiabilidade de sistemas.

#### 4.6. Confiabilidade de sistemas

Para o caso onde se têm mais de uma função de falha, verifica-se inicialmente se o sistema é um sistema em série ou em paralelo. A probabilidade de falha de cada função de falha pode ser calculada, usando o método FORM, para cada modo de falha, sendo depois avaliada a probabilidade do sistema falhar como um todo, considerando a contribuição de todos os modos.

É considerado um sistema em *série* quando a falha de um dos seus componentes significa a falha completa do mesmo e neste caso a probabilidade de falha do sistema é dada pela probabilidade de qualquer um dos componentes falhar (Figura 4.5). Esta probabilidade é expressa pela união dos eventos que representam a falha dos componentes individuais, ou seja:

$$P_f^s = P \left[ \bigcup_{i=1}^j (G_i(\mathbf{V}) \leq 0.0) \right] \quad (4.36)$$

onde  $j$  é o número de componentes individuais identificados na análise.

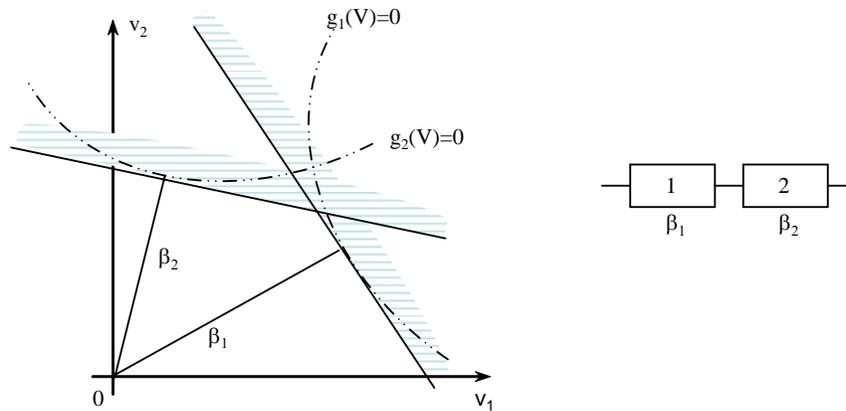


Figura 4.5 – Definição de sistema na análise de confiabilidade de estruturas, sistema em série.

Um sistema é considerado em *paralelo* quando a falha do mesmo somente ocorre após a falha de todos os seus componentes (Figura 4.6). A probabilidade de falha deste sistema é expressa pela intersecção dos eventos que representam a falha dos componentes individuais:

$$P_f^P = P \left[ \bigcap_{i=1}^j (G_i(\mathbf{V}) \leq 0.0) \right] \quad (4.37)$$

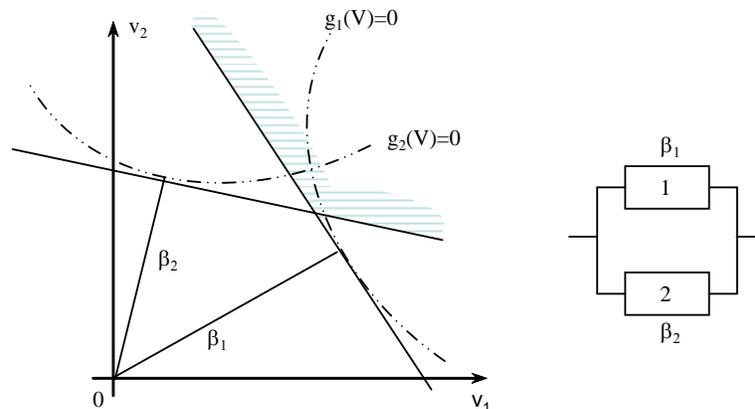


Figura 4.6 – Definição de sistema na análise de confiabilidade de estruturas, sistema em paralelo.

Outros detalhes são comentados no apêndice A.

#### 4.7. Determinação dos coeficientes parciais de segurança para um projeto específico

Em projetos estruturais dimensionados pelo método semiprobabilístico, os estados limites são verificados utilizando-se certos valores de projeto para as variáveis. O valor de projeto resulta do produto ou divisão do valor característico (no sentido mais desfavorável ao projeto) da variável por um coeficiente parcial de segurança. O valor característico é definido como um valor que, de acordo com a distribuição de probabilidades da variável, representa um determinado percentual que pode ser ultrapassado. Esses valores característicos dependem do tipo de material e da classe da estrutura.

Na determinação dos coeficientes parciais de segurança de uma estrutura específica, determinam-se, para um estado limite, os valores destes coeficientes depois de se obter o resultado ótimo, ou seja, após se obter um resultado cujo valor desejado da probabilidade de falha é alcançado.

Assim, a determinação dos coeficientes parciais de segurança pode ser feita com a caracterização estatística das variáveis aleatórias do problema e com a determinação de um valor alvo (ou aceitável) para a probabilidade de falha. Em seguida determina-se um projeto inicial (dimensões iniciais) e procede-se iterativamente obtendo novas dimensões e avaliando as respectivas probabilidades de falha da função de comportamento considerada pelo método FORM, até que se obtenha um projeto que satisfaça a probabilidade de falha desejada.

Após se chegar ao projeto ótimo e se obter, pelo FORM, o MPP desse projeto, os fatores parciais de segurança podem ser obtidos em relação a cada variável aleatória a partir de:

$$\gamma_{fi} = \frac{U_i^*}{U_i^k} \quad (4.38)$$

$$\gamma_{mi} = \frac{U_i^k}{U_i^*} \quad (4.39)$$

onde  $\gamma_{fi}$  é fator parcial de segurança relacionado às ações impostas à estrutura,  $\gamma_{mi}$  é fator parcial de segurança relacionado às resistências dos materiais,  $U_i^*$  é o valor correspondente à variável  $i$  no ponto de projeto quando a probabilidade de falha é alcançada e  $U_i^k$  é o valor característico desta variável.

Vários trabalhos têm sido desenvolvidos nos últimos anos com relação a este assunto, tais como: Ellingwood (1996), Nowak e Szerszen (2004), Diniz (2005) e Santos e Eboli (2006).

#### 4.8. Fator de importância

O fator de importância das variáveis aleatórias para cada função de falha, Eq. (4.40), é fornecido, também, pelo método FORM, sendo determinado pelo quadrado da sensibilidade, Eq. (4.41), que é o gradiente da função de comportamento normalizado no ponto de projeto ( $V^*$ ).

$$I_i = \alpha_i^2 \quad (4.40)$$

$$\alpha = \frac{\nabla G(V^*)}{\|\nabla G(V^*)\|} \quad (4.41)$$

esse fator indica qual o nível de importância de cada variável aleatória para a obtenção da confiabilidade da estrutura no ponto de projeto.

#### 4.9. Níveis dos métodos de projeto

De acordo com Soares e Venturini (2001), são mencionados na literatura quatro níveis para a classificação quanto ao nível do método de projeto de confiabilidade de uma estrutura:

- Métodos de nível I são métodos de confiabilidade que usam apenas um parâmetro estatístico (valor médio) para cada variável aleatória do projeto. Este método também é conhecido por método das tensões admissíveis;
- Métodos de nível II são métodos de confiabilidade que usam dois parâmetros estatísticos (valores característicos) para cada variável aleatória do projeto (média e desvio padrão). Este método também é conhecido por método semiprobabilístico;
- Métodos de nível III são métodos de confiabilidade que usam como medida a probabilidade de falha e assumem como conhecidas às

funções de distribuições probabilísticas das variáveis aleatórias do projeto;

- Métodos de nível IV são métodos de confiabilidade que buscam a união da otimização com a estatística, assim sendo, é um projeto ótimo que leva em consideração as incertezas das variáveis de interesse.

Através dos níveis citados acima se pode agora classificar este trabalho como fazendo parte dos métodos de nível IV. Pois o mesmo busca o projeto ótimo de estruturas planas de concreto armado considerando as incertezas das variáveis de interesse.