

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **NBR 6118**: Projeto de estruturas de concreto - Procedimento. Rio de Janeiro, 2004.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **NBR 6123**: Forças devidas ao vento em edificações. Rio de Janeiro, 1988.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **NBR 8953**: Concreto para fins estruturais – Classificação por grupos de resistência. Rio de Janeiro, 1992.

ALMEIDA, A. F. de; VAZ, L. E.; VELASCO, M.; EBOLI, C. R. 2005. **Reliability-based design optimization of reinforced concrete cross-section under uniaxial moment and axial force**. XXVI Iberian Latin-American Congress on Computational Methods in Engineering, Guarapari-ES, Brasil.

ALMEIDA, A. F. de; VAZ, L. E.; VELASCO, M.; EBOLI, C. R. 2006. **Projeto ótimo baseado em confiabilidade de uma coluna modelo de concreto armado submetida à flexão composta reta**. VI Simpósio EPUSP sobre Estruturas de concreto, São Paulo-SP, Brasil.

ALMEIDA, A. F. de; VAZ, L. E.; VELASCO, M.; 2007. **Comparação entre o projeto ótimo determinístico e o baseado em confiabilidade de pórticos planos de concreto armado**. XXVIII Iberian Latin-American Congress on Computational Methods in Engineering, Porto, Portugal.

ALMEIDA, A. F. de. **Otimização de componentes pré-moldados de concreto protendido**. 2004. 177 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) – Departamento de Engenharia Civil, Universidade Federal de Goiás, Goiânia – GO.

ALMEIDA, S. R. M. de. **Contribuição ao projeto ótimo de cabos em vigas de concreto protendido**. 2001. 166 f. Tese (Doutorado em Engenharia Civil) – Departamento de Engenharia Civil, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro.

AL-HARTHY, A. S.; FRANGOPOL, D. M., 1994. **Reliability-Based Design of Prestressed Concrete Beams**. ASCE Journal of the Structural Engineering, Vol. 120, No.11, 3156p-3177p.

ANG, A. H. S.; CORNELL, C. A., 1974. **Reliability bases of structural safety and design**. ASCE Journal of the Structural Division, Vol.100, No.9, 1755p-1769p.

ARAÚJO, J. M. 2001. **Probabilistic analysis of reinforced concrete columns**. Advances in engineering software 32, 871p-879p, Elsevier.

ARAÚJO, J. M.; REAL, M. de V., 2002. **Confiabilidade de vigas projetadas de acordo com a nova NBR-6118**. 44º Congresso Brasileiro do Concreto, Belo Horizonte-MG, Brasil.

BALLING, R. J.; YAO, X., 1997. **“Optimization of reinforced concrete frames”**. Journal of structural optimization, Ed. J. S. Arora, ASCE Manuals and Reports on Engineering Practice, v. 123, No. 2, pp. 193-202.

BA-ABBAD, M. A., 2004. **Reliability-Based Design Optimization of a Nonlinear Elastic Plastic Thin-Walled T-Section Beam**. Dissertation, Faculty of Virginia Polytechnic Institute and State University, 247 pages.

CEN, 2001. **European committee for standardization**. EN 1990 – Europe: Basis of Structural Design.

CHAUDHURI, A.; CHAKRABORTY, S., 2006. **Reliability of linear structures with parameter uncertainty under non-stationary earthquake**. Structural Safety 28, 231p–246p, Elsevier.

CHOI, H.H.; LEEB, S.Y.; CHOIC, I.Y.; CHOD, H.N.; MAHADEVAN, S., 2006. **Reliability-based failure cause assessment of collapsed bridge during construction**. Reliability Engineering and System Safety 91, 674p–688p, Elsevier.

CHOI, K. K.; YOUN, B. D., 2001. **Advances in Reliability Based Optimization and Probability Analysis**. NASA/ICASE Series on Risk-Based Design, 2001. Iowa City, USA.

DINIZ, S. M. C., 2005. **Structural reliability-based methods: rational tools for design codes development**. XXVI Iberian Latin-American Congress on Computational Methods in Engineering, Guarapari-ES, Brasil.

EBOLI, C. R., 1989. **Dimensionamento Ótimo de Seções de Concreto Armado à Flexão Composta Oblíqua**. Dissertação de Mestrado, PUC-RJ, Rio de Janeiro-RJ, Brasil.

EBOLI, C. R.; VAZ, L. E.; MULLER, A. L., 2004, **Aplicação do parâmetro beta de confiabilidade em otimização de estruturas**. XXV Iberian Latin-American Congress on Computational Methods in Engineering, Recife-PE, Brasil.

EBOLI, C. R.; VAZ, L. E., 2005. **Optimization of plane trusses with constraints in the reliability index Beta**. 6th World Congresses of Structural and Multidisciplinary Optimization, Rio de Janeiro-RJ, Brasil.

ELLINGWOOD, B. R., 1996. **Reliability-Based condition assessment and LRFD for existing structures**. Structural Safety Vol. 18, No. 2/3, 67p–80p; Elsevier Science Ltd. Netherlands.

ELLINGWOOD, B. R., 2003. **Toward load and resistance factor design for fiber-reinforced polymer composite structures**. Journal of Structural Engineering ASCE, vol. 129, No. 4. 449p–458p.

ENEVOLDSEN, I., 1993. **Sensitivity Analysis of Reliability-Based Optimization Models**. 465p–472p. STRUCTURAL OPTIMIZATION 93.

FRANGOPOL, D. M.; IDE, Y.; SPACONE, E.; IWAKI, I., 1996. **A new look at reliability of reinforced concrete columns**. Structural Safety Vol. 18 No. 2/3, pp. 123-150. Elsevier.

FRIEL, L. L. 1974. **Optimum Singly reinforced concrete sections**. ACI Structural Journal, Vol.71, No.11, pp. 556-558.

GOMES, H. M. 2003, **Análise da confiabilidade estrutural levando em conta a aleatoriedade das propriedades do concreto**. XXIV Iberian Latin-American Congress on Computational Methods in Engineering, Ouro Preto-MG, Brasil.

GULVANESSIAN, H.; CALGARO, J.; HOLICKY, M., 2002. **Designers' guide to EN 1990; EUROCODE: basis of structural design**. 192p. Thomas Telford, London.

HAFTKA, R. T.; GÜRDAL, Z. 1993. **Elements of structural optimization**. 481pp. Kluwer academic publishers, Netherlands.

HART, G. C., 1982. **Uncertainty Analysis, Loads and Safety in Structural Engineering**. 224p. Prentice-Hall Editor, New Jersey, USA.

HASOFER, A. M.; LIND, N. C. 1974. **Exact and invariant Second-Moment code format**, J. Engineering Mechanics Div. ASCE, Vol.100, No.1, 111p-121p.

HOLZER, S. M.; SOLMERS, A. E., 1977. **"Nonlinear Model / Solution Process: Energy Approach"**. Journal of the Engineering mechanics division, V.103, n. 4, 629p-647p.

HOROWITZ, B., 1988. **Dimensionamento ótimo de pilares de concreto armado**. Publicação no 01/08, Universidade Federal de Pernambuco, Brasil.

JCSS¹, Joint Committee on Structural Safety, *Probabilistic Model Code, Part 1: Basis of Design*, 2000.

JCSS², Joint Committee on Structural Safety, *Probabilistic Model Code, Part 2: Loads*, 2001.

JCSS³, Joint Committee on Structural Safety, *Probabilistic Model Code, Part 3: Resistance Models*, 2000.

KANG, M.M.; KIM, L.S.; PULMANO, V.A., 1993. **Minimum-Cost reinforced concrete beams and columns**. In: computational Mechanics, Pulmano & Tin-Loi, V.2, 943p-948p.

KHARMANDA, G.; OLHOFF, N.; EL-HAMI, A., 2004. **Optimum values of structural safety factors for a predefined reliability level with extension to multiple limit states**. 421p-434p. Struct Multidisc Optim 27.

KLEIBER, M.; SIEMASZKO, A.; STOCKI, R., 1999. **Interactive stability-oriented reliability-based design optimization**. Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. 168 (1999) 243p-253p, Elsevier.

LAGAROS, N. D.; PAPADOPOULOS, V., 2006. **Optimum design of shell structures with random geometric, material and thickness imperfections**. International Journal of Solids and Structures, Vol.43, No.22-23, 6948p-6964p, Elsevier.

LEE, S. H.; KWAK, B. M., 2006. **Response surface augmented moment method for efficient reliability analysis**. Structural Safety 28 (2006) 261p-272p, Elsevier.

LEPS, M.; SERJNOHA, M. 2003. **New approach to optimization of reinforced concrete beams**. Computers & Structures 81 (2003) 1957p-1966p, Pergamon.

LIMA, E. C. P.; SAGRILO, L. V. S. – **Confiabilidade Estrutural**, COPPE-UFRJ, Rio de Janeiro, 2002.

LIANG, Q.Q; XIE Y.M.; STEVEN, G.P. 2000. **Topology Optimization of Strut-and-Tie Models in Reinforced Concrete Structures Using an Evolutionary Procedure**. ACI Structural Journal/March (2000) 322p–331p.

LIANG, Q.Q; UY, B.; STEVEN, G.P. 2002. **Performance-Based Optimization for Strut-Tie Modeling of Structural Concrete**. Journal of Structural Engineering /June (2002) 815p–823p.

LOPES, M. T. de A.; EBOLI, C. R; VELASCO, M. de S. L.; VAZ, L. E. 2006. **Confiabilidade à força cortante de seções transversais de vigas de concreto armado reforçadas com compósitos de fibras de carbono**. VI Simpósio EPUSP sobre Estruturas de concreto, São Paulo-SP, Brasil.

MAXWELL, C., 1869, **Scientific papers**, Vol. 2, Dover Publications, New York (1952), pp.175-177.

MELCHERS, R. E., 2002. **Structural Reliability Analysis and Prediction**. 437p. John Wiley & Sons, New York.

MELO, A. M. C. de; VAZ, L. E.; SHEHATA, I. A. El M.. 2004, **Um critério de resistência geral para otimização de pórticos de concreto armado**. XXV CILAMCE, Recife, Brasil.

MELO, A. M. C. de. 2000a, **Optimum design of RC plane frames with nonlinear response**. 157p – 167p. ISSMO 2000, Swansea, Wales, UK.

MELO, A. M. C. de. 2000b, **Projeto ótimo de pórticos planos de concreto armado**. Tese de Doutorado, COPPE-UFRJ, Rio de Janeiro-RJ, Brasil.

MOSES, F., 1997, **Problems and prospects of reliability-based optimization**. 293p – 301p. Engineering Structures, Vol. 19, No. 4, Elsevier.

MÜLLER, A. L.; VAZ, L. E.; EBOLI, C. R, 2003, **Otimização de estruturas reticuladas considerando incertezas**. XXIV Iberian Latin-American Congress on Computational Methods in Engineering, Ouro Preto-MG, Brasil.

NOGUEIRA, C. G., **Um modelo de confiabilidade e otimização aplicados à estruturas de barras de concreto armado**. 2005. 166f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) – Departamento de Engenharia de Estruturas da EESC-USP.

NEVES, R. A.; CHATEAUNEUF, A.; VENTURINI, W. S.; LAMAIRE, M. 2006, **Reliability analysis of reinforced concrete grids with nonlinear material behavior**, Reliability Engineering & System Safety 91 (2006), 735p-744p, Elsevier.

NOWAK, A. S.; SZERSZEN, M. M., 2004, **Reliability-Based calibration for structural concrete, Phase 2**. 97p. Portland Cement Association Research & Development Information, PCA R&D Serial No. 2674, USA.

NOWAK, A. S.; COLLINS, K. R., 2000. **Reliability of structures**. 338 p. McGraw Hill Higher Education, USA.

- PAPADRAKAKIS, M., LAGAROS, N. D., PLEVRIS, V., 2005. **Design optimization of steel structures considering uncertainties**. Engineering Structures 27 (2005) 1408p–1418p, Elsevier.
- PEREIRA, A., 2007. **Projeto ótimo baseado em confiabilidade: Aplicação a treliças espaciais**. Tese de Doutorado, PUC-RJ, Rio de Janeiro-RJ, Brasil.
- RACKWITZ, R.; FIESSLER, B. 1978. **Structural reliability under combined random load sequences**, Computers and structures, Vol.9, No.5, 489p-494p.
- REAL, M. de V.; FILHO, A. C. 2001, **Aplicação do método de Monte Carlo no estudo de vigas e pilares de concreto armado**. 35p – 44p. Teoria e Prática na Engenharia Civil No. 2, Brasil.
- RODRIGUES Jr., S. J., 2005. **Otimização de pilares de edifícios altos de concreto armado**. Tese de Doutorado, PUC-RJ, Rio de Janeiro-RJ, Brasil.
- SALEH, J. H.; MARAIS, K., 2006. **Reliability: How much is it worth? Beyond its estimation or prediction, the (net) present value of reliability**. Reliability Engineering & System Safety 91 (2006) 665p–673p, Elsevier.
- SANTOS, H. de C., 2005. **Reliability based determination of safety factors for earthquake and wind in Brazilian conditions**. 3721p – 3728p. ICOSSAR 2005, Rome, Italy.
- SANTOS, H. de C.; EBOLI, C. R., 2006. **Avaliação da confiabilidade estrutural com base nas normas NBR-6118 e NBR-8681**. VI Simpósio EPUSP sobre Estruturas de concreto, 502p-517p, São Paulo-SP, Brasil.
- SEPULVEDA, A. E.; EPSTEIN, L. D., 1993. **Approximation Concepts for Structural Synthesis with Uncertain Parameters**. 457p-464p. STRUCTURAL OPTIMIZATION 93.
- SOARES, R. C.; VENTURINI, W. S., 2001. **Introdução à Análise de Confiabilidade**. Notas de Aula, São Carlos (2001).
- SOARES, R. C.; MOHAMED, A.; VENTURINI, W. S.; LEMAIRE, M., 2002. **Reliability analysis of non-linear reinforced concrete frames using the response surface method**. Reliability Engineering & System Safety 91 (2002), Elsevier.
- SOUZA Jr., J. B. M., 1992. **Dimensionamento Ótimo de Pilar Padrão de Concreto Armado**. Dissertação de Mestrado, PUC-RJ, Rio de Janeiro-RJ, Brasil.
- SZERSZEN, M. M.; NOWAK, A. S., 2005. **Reliability-based sensitivity analysis of RC columns resistance**. 2525p – 2530p. ICOSSAR 2005, Rome, Italy.
- TSOMPANAKIS, Y., et al., 2005. **Recent advances in reliability-based structural optimization under earthquake loading**. 6th World Congresses of Structural and Multidisciplinary Optimization, Rio de Janeiro-RJ, Brasil.
- TU, J.; CHOI, K. K.; PARK, Y.H., 1999. **A New Study on Reliability-Based Design Optimization**. ASME J. Mech Des, Vol.121, No.4, 557p–564p.
- ULAM, S. M., 2007 Encyclopedia Britannica Article. **Stanislaw Marcin Ulam**. Disponível em: < <http://www.britannica.com/eb/article-9074138/Stanislaw-Marcin-Ulam>>, Acesso em: 20 nov. 2007.

URBAN, A. G. G., 1992. **Dimensionamento Ótimo em concreto armado: Viga contínua e seção transversal retangular submetida à flexão composta reta.** Dissertação de Mestrado, PUC-RJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil.

VAL, D.; BLJUGER, F.; YANKELEVSKY, D., 1995. **Optimization problem solution in reliability analysis of reinforced concrete structures.** 351p – 355p. Computers & Structures Vol. 60, N.3, 1996, Elsevier.

YANG, S.I.; FRANGOPOL, D. M.; KAWAKAMI, Y.; NEVES, L. C., 2006. **The use of lifetime functions in the optimization of interventions on existing bridges considering maintenance and failure costs.** Reliability Engineering and System Safety 91 (2006) 698p–705p, Elsevier.

YOUN, B. D.; CHOI, K. K., 2004. **A new response surface methodology for reliability-based design optimization.** Computers and Structures, Vol.82, No.2-3, 241p–256p, Elsevier.

YOUN, B. D.; CHOI, K. K.; DU, L., 2004. **Adaptive probability analysis using an enhanced hybrid mean value method.** Struct Multidisc Optim.

YOUN, B. D.; CHOI, K. K.; PARK, Y. H., 2003. **Hybrid Analysis Method for Reliability-Based Design Optimization.** J Mech Des, ASME 125, 221p–232p; Proceedings of 2001 ASME Design Engineering Technical Conferences: 27 th Design Automation Conference. Pittsburgh, PA.

YOUN, B. D.; CHOI, K. K.; DU, L., 2005. **Enriched Performance Measure Approach (PMA+) for Reliability-Based Design Optimization.** American Institute of Aeronautics and Astronautics, 16p.

WANG, L.; GRANDHI, R. V., 1993. **Reliability-Based Optimization of Structure.** 441p–448p. STRUCTURAL OPTIMIZATION 93.

ZOU, T.; MAHADEVAN, S., 2006. **A direct decoupling approach for efficient reliability-based design optimization.** Struct Multidisc Optim, 190p–200p.

Apêndice A

CONFIABILIDADE DE SISTEMAS

A.1

Probabilidade de falha de um sistema em série

Segundo a teoria das probabilidades, para a união de eventos, a probabilidade de falha de um sistema em série pode ser obtida por:

$$\begin{aligned}
 p_f^s &= P\left[\bigcup_{i=1}^j (G_i(\mathbf{V}) \leq 0.0)\right] \\
 &= \sum_{i=1}^j P_i - \sum_{i=1}^j \sum_{k>i}^j P_{ik} + \sum_{i=1}^n \sum_{k>i}^n \sum_{l>k}^n P_{ikl} - \dots
 \end{aligned}
 \tag{A.1}$$

onde:

$$P_i = P(G_i(\mathbf{V}) \leq 0.0) \tag{A.2}$$

$$P_{ik} = P[P(G_i(\mathbf{V}) \leq 0.0) \cap P(G_k(\mathbf{V}) \leq 0.0)] \tag{A.3}$$

$$P_{ikl} = P[P(G_i(\mathbf{V}) \leq 0.0) \cap P(G_k(\mathbf{V}) \leq 0.0) \cap P(G_l(\mathbf{V}) \leq 0.0)] \tag{A.4}$$

g_i identifica o i -ésimo componente do sistema e os símbolos Σ e $\cap$ denotam respectivamente, “somatório” e “interseção”.

Como as probabilidades de falha dos componentes individuais geralmente são baixas na análise de problemas estruturais, os termos de terceira ordem podem ser desprezados na maioria das vezes. A probabilidade de falha de um sistema em série (Eq. A.1) pode ser calculada utilizando as seguintes expressões:

$$P_i = \Phi(-\beta_i) \tag{A.5}$$

$$P_{ik} = \Phi(-\beta_i, -\beta_j, \rho_{ik}) \tag{A.6}$$

onde:

β_i, β_j - são os índices de confiabilidade de cada um dos componentes;

ρ_{ik} - é a correlação entre dois componentes;

$\Phi(\cdot)$ - é a função cumulativa de probabilidades normal padrão;

$\Phi(\cdot, \rho)$ - é a função cumulativa bidimensional normal padrão.

A função cumulativa bidimensional normal padrão, pode ser expressa matematicamente por:

$$\Phi(-\beta_i, -\beta_j, \rho_{i,j}) = \Phi(-\beta_i)\Phi(-\beta_j) + \int_0^{\rho_{i,j}} \varphi(-\beta_i, -\beta_j, z) dz \quad (A.7)$$

onde $\varphi(\beta_i, \beta_j, z)$ é a função densidade de probabilidades bidimensional padrão:

$$\varphi(x, y, z) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-z^2}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x^2 + y^2 - 2zxy}{1-z^2}\right)\right] \quad (A.8)$$

A integral da Eq. (A.7) deve ser avaliada numericamente. Alternativamente, têm-se os chamados limites de primeira-ordem e segunda-ordem que podem ser utilizados para evitar a avaliação numérica da mesma. Neste caso são obtidos os limites: superior e inferior da probabilidade de falha de um sistema em série para os dois limites.

Limites para probabilidade P_{ik} :

$$\max[P(A), P(B)] \leq P[g_i, g_k] \leq P(A) + P(B) \quad (A.9)$$

$$P(A) = \Phi(-\beta_i) \Phi\left(-\frac{\beta_k - \rho\beta_i}{\sqrt{1-\rho^2}}\right) \quad (A.10)$$

$$P(B) = \Phi(-\beta_k) \Phi\left(-\frac{\beta_i - \rho\beta_k}{\sqrt{1-\rho^2}}\right) \quad (A.11)$$

Limites de primeira ordem:

$$\max_{n=1}^n [P(F_i)] \leq p_f \leq \left[1 - \prod_{i=1}^n (1 - P(F_i))\right] \quad (A.12)$$

Limites de segunda ordem:

$$\begin{aligned}
& P(F_1) + \sum_{i=2}^n \max \left\{ \left[P(F_i) - \sum_{j=1}^{i-1} P(F_i F_j) \right], 0.0 \right\} \leq p_f \leq \Rightarrow \\
& \Rightarrow \sum_{i=1}^n P(F_i) - \sum_{i=2}^n \max_{j < i} [P(F_i F_j)]
\end{aligned} \tag{A.13}$$

Na Figura A.1a são mostrados os limites de primeira ordem para um sistema com duas funções de falha:

$$G_1(a,b) \rightarrow \beta_1 \rightarrow P(F_1) \text{ e } G_2(a,b) \rightarrow \beta_2 \rightarrow P(F_2) \tag{A.14}$$

Para modos de falha independentes a probabilidade de falha de uma estrutura pode ser representada por:

$$p_f = 1 - \prod_{i=1}^n (1 - P(F_i)) \Rightarrow n = 2 \tag{A.15}$$

onde, F_i é a probabilidade de falha do modo i .

A Eq. (A.15) pode ser expandida da seguinte forma:

$$p_f = P(F_1) + P(F_2) - P(F_1 \cap F_2) \tag{A.16}$$

Contudo, quando $P(F_i) \ll 1$ o termo $P(F_1 \cap F_2)$ pode ser desprezado e a Eq. (A.16) pode ser aproximada para:

$$p_f^{\sup} \cong P(F_1) + P(F_2) \tag{A.17}$$

onde $p_f^{\sup}$ representa o limite de probabilidade de falha superior.

Para a determinação do limite inferior, considera-se o caso onde todos os modos de falha são totalmente dependentes, sendo que o modo que tiver a maior probabilidade de falha será sempre o de provável colapso, conforme Eq. (A.18).

$$p_f^{\inf} = \max_{i=1}^n [P(F_i)] \tag{A.18}$$

Assim, tem-se para um sistema em série os limites inferiores e superiores, onde eles limitam uma região entre completamente independente e totalmente dependente, tomando, portanto, a Eq. (A.18) como limite superior e Eq. (A.17) como inferior, tem-se:

$$\max[P(F_1), P(F_2)] \leq p_f \leq P(F_1) + P(F_2) \tag{A.19}$$

Limites de segunda ordem:

Os limites de segunda ordem são obtidos levando em consideração os termos $P(F_1 \cap F_2)$ na Eq. (A.16). Assim, determina-se o limite inferior por:

$$p_f \geq P(F_1) + \max \{P(F_2) - P(F_1 \cap F_2), 0\} \quad (\text{A.20})$$

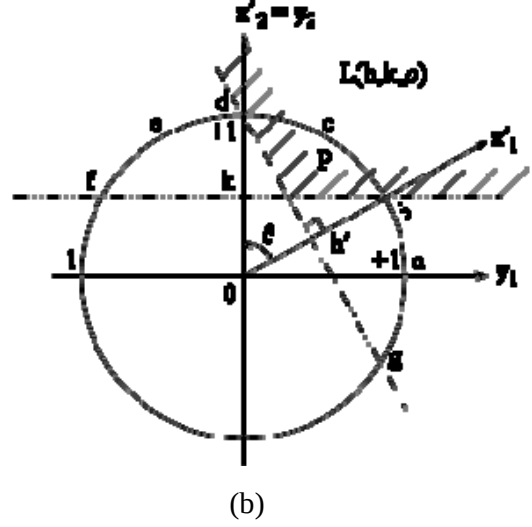
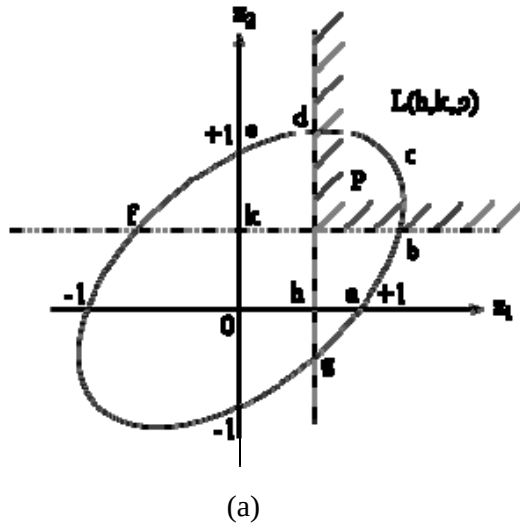
e o limite superior de segunda ordem é obtido por:

$$p_f \leq P(F_1) + P(F_2) - P(F_1 \cap F_2) \quad (\text{A.21})$$

Desta forma, pode-se ressaltar que os limites de segunda ordem possuem uma precisão maior que os de primeira ordem, devido ao fato deste considerar os termos $P(F_1 \cap F_2)$, podendo-se escrever que:

$$\begin{aligned} P(F_1) + \max \{P(F_2) - P(F_1 \cap F_2), 0\} &\leq p_f \leq \\ \Rightarrow P(F_1) + P(F_2) - P(F_1 \cap F_2) &\end{aligned} \quad (\text{A.22})$$

No caso de duas funções de falha, resolvendo-se a Eq. (A.21) obtém-se a probabilidade de falha exata de um sistema em série. Como se pode observar pela Eq. (A.22) é necessário determinar o termo $P(F_1 \cap F_2)$, podendo ser determinado de forma exata através da Eq. (A.6) ou Eq. (A.7), que tem um alto custo computacional, ou pelos limites P_{ik} da Eq. (A.9).



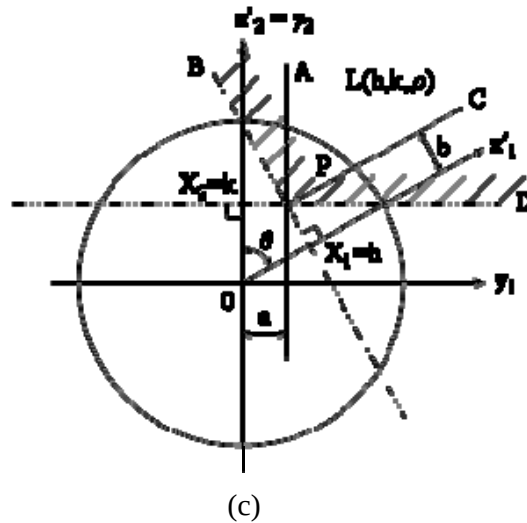


Figura A.1 - Região de integração no espaço inicial (correlacionado) normal bi-variacional; (b) Região de integração transformada no espaço reduzido (independente) normal bi-variacional padrão; (c) Limites BPC e APD para $\Phi(., \rho)$, região fora de BPD.

Considerando inicialmente a Figura A.1a onde se tem um espaço típico de uma função de densidade de probabilidade, com $\rho = 1/2$. Porém é mais conveniente se trabalhar com o espaço reduzido (normal padrão independente) (x_1, x_2) para essa transformação se usa Eq. (A.23).

$$x_1 = \frac{1}{(1-\rho^2)^{1/2}}(y_1 - \rho y_2), \quad x_2 = y_2 \quad (\text{A.23})$$

Fazendo-se a transformação obtém-se a Figura A.1b no espaço reduzido onde o ângulo $\theta < \pi/2$ (onde $\rho = \cos(\theta)$), pode-se notar que houve um giro no sentido anti-horário do eixo. Através da Figura A.1 pode-se determinar a Eq. (A.9).

Na Figura A.1c a parte hachurada representa $\Phi(., \rho)$ limitadas por BPD. No espaço reduzido a região APD representa o produto da probabilidade de $\Phi(-a)$ e $\Phi(-b)$. A região BPC representa o maior limite ($\Phi(-b) \Phi(-h)$) e a APD representa o menor limite ($\Phi(-a) \Phi(-k)$). Desta forma,

$$\begin{aligned} \max[\Phi(-b)\Phi(-h), \Phi(-a)\Phi(-k)] &\leq \Phi(-h, -k, \rho) \\ &\leq \Phi(-b)\Phi(-h) + \Phi(-a)\Phi(-k) \end{aligned} \quad (\text{A.24})$$

$$a = \frac{h - \rho k}{(1 - \rho^2)^{1/2}} \quad (\text{A.25})$$

$$b = \frac{k - \rho h}{(1 - \rho^2)^{1/2}} \quad (\text{A.26})$$

A eqs. (A.24) e (A.9) só valem para valores positivos de $\rho \geq 0$ para valores de $\rho < 0$, tem-se

$$0 \leq \Phi(h, k, \rho) \leq \max[\Phi(b)\Phi(h), \Phi(a)\Phi(k)] \quad (\text{A.27})$$

Assim, pode-se reescrever a equação de limite de segunda ordem do problema.

$$\begin{aligned} P(F_1) + \max\{P(F_2) - P(F_1 \cap F_2)^+, 0\} &\leq p_f \leq \Rightarrow \\ \Rightarrow P(F_1) + P(F_2) - P(F_1 \cap F_2)^- &\end{aligned} \quad (\text{A.28})$$

$$P(F_1 \cap F_2)^- = \max[\Phi(-b)\Phi(-h), \Phi(-a)\Phi(-k)] \quad (\text{A.29})$$

$$P(F_1 \cap F_2)^+ = \Phi(-b)\Phi(-h) + \Phi(-a)\Phi(-k) \quad (\text{A.30})$$

Apêndice B

DISTRIBUIÇÕES DE PROBABILIDADE

B.1

Distribuição normal

A distribuição normal ou gaussiana, *PDF*, pode ser definida por:

$$f_x(x) = \frac{1}{\sigma_x \sqrt{2\pi}} \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{x - \mu_x}{\sigma_x} \right)^2 \right] \quad (\text{B.1})$$

onde x é a variável aleatória, e os parâmetros μ_x e σ_x são a média e o desvio padrão desta variável aleatória, respectivamente.

Muitas vezes a função é representada de uma forma mais simples, sendo: $N(\mu_x, \sigma_x)$, por necessitar de apenas dois parâmetros. Para obter a função cumulativa *CDF*, é necessário empregar integração numérica ou tabelas disponíveis na bibliografia.

$$P(X \leq x) = F_x(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^s e^{-\frac{1}{2}v^2} dv \quad (\text{B.2})$$

onde $s = (x - \mu_x) / \sigma_x$.

Uma forma de avaliação alternativa de $f_x(x)$ e $F_x(x)$ é conseguida introduzindo uma variável reduzida s , que contém média zero e desvio padrão unitário, $N(0,1)$. Os valores de $f_x(x)$ e $F_x(x)$ para esta variável reduzida são tabelados e identificadas por $\phi(s)$ e $\Phi(s)$. Assim, as expressões (B.1) e (B.2) podem ser reescritas da seguinte forma, para um par $N(\mu_x, \sigma_x)$.

$$f_x(x) = \frac{1}{\sigma_x} \phi \left(\frac{x - \mu_x}{\sigma_x} \right) \quad (\text{B.3})$$

$$F_X(x) = \Phi\left(\frac{x - \mu_X}{\sigma_X}\right) \quad (\text{B.4})$$

B.2

Distribuição lognormal

Tem-se uma distribuição lognormal quando estatisticamente $\ln(X)$, sendo X uma variável aleatória, pode ser representado por uma distribuição normal. Assim, a PDF e a CDF, para uma variável lognormal, são definidas por:

$$f_X(x) = \frac{1}{\xi_x \sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2} \left(\frac{\ln x - \lambda}{\xi}\right)^2\right] \quad (\text{B.5})$$

$$F_X(x) = \Phi\left(\frac{\ln x - \lambda}{\xi}\right) \quad (\text{B.6})$$

onde λ é o valor esperado de $\ln(X)$, $\lambda = \ln \mu_X - \frac{1}{2}\xi^2$, e ξ é o desvio padrão de

$$\ln(X), \quad \xi = \sqrt{\ln\left[1 + \left(\frac{\sigma_X}{\mu_X}\right)^2\right]}.$$

B.3

Distribuição beta

A função de distribuição Beta tem como vantagem apresentar grande flexibilidade em se adaptar aos dados probabilísticos observados. Sua PDF é representada por quatro parâmetros (a, b, q, r) , como se vê a seguir:

$$f_X(x) = \frac{1}{\beta(q, r)} \frac{(x-a)^{q-1} (b-x)^{r-1}}{(b-a)^{q+r-1}} \quad a \leq x \leq b \quad (\text{B.7})$$

onde a função Beta é dada por

$$\beta(q, r) = \int_0^1 x^{q-1} (1-x)^{r-1} dx = \frac{\Gamma(q)\Gamma(r)}{\Gamma(q+r)} \quad (\text{B.8})$$

$$\Gamma(k) = \int_0^{\infty} e^{-u} u^{k-1} du = (k-1)! \text{ para } k \text{ inteiros } > 0 \quad (\text{B.9})$$

Como podem ser observados os parâmetros a e b descrevem intervalos de inúmeras distribuições Beta. Fazendo-se $a = 0$ e $b = 1$ obtém-se a função Beta padrão que apresenta PDF e CDF definidas por:

$$f_x(x) = \frac{1}{\beta(q,r)} s^{q-1} (1-s)^{r-1} \quad 0 \leq s \leq 1 \quad (\text{B.10})$$

$$F_s(s) = \frac{\beta_s(q,r)}{\beta(q,r)} \quad 0 \leq s \leq 1 \quad (\text{B.11})$$

B.4

Distribuições de valores extremos

As distribuições de probabilidade de valores extremos são utilizadas na engenharia devido à necessidade de se representar os valores máximos extremos dos carregamentos atuantes sobre a estrutura durante sua vida útil e os valores mínimos de resistência da mesma.

Para a avaliação das distribuições é necessário que sejam coletados dados durante vários anos (no mínimo 20 a 25 anos) para que se ajuste a melhor distribuição possível para os valores. Devido à dificuldade de obtenção destes dados surgiu a chamada estatística de extremos que possibilita definir a distribuição dos valores extremos de uma variável X .

Podem-se citar como principais distribuições de valores extremos utilizados na engenharia, as seguintes:

- Tipo I (máximos) ou Gumbel;
- Tipo I (mínimos);
- Tipo II (máximos);
- Tipo III (mínimos) ou Weibull.

Maiores detalhes sobre estas distribuições e outras são encontradas em (Melchers 2002, Nowak 2000, JCSS 2000, Hart 1982).