

2 Formulação

2.1. Introdução

Conforme apresentado no Capítulo 1, este capítulo resolve o problema inicial da determinação de campos eletromagnéticos no interior de guias coaxiais. Serão apresentados o sistema de coordenadas, a geometria, as Equações de Maxwell que representam o problema e as condições de contorno para a aplicação do Método dos Elementos Finitos (MEF).

2.2. Sistema de Coordenadas e Geometria

No sistema de coordenadas cilíndricas aplicado neste trabalho, serão consideradas as seguintes convenções conforme a Figura 2.1.

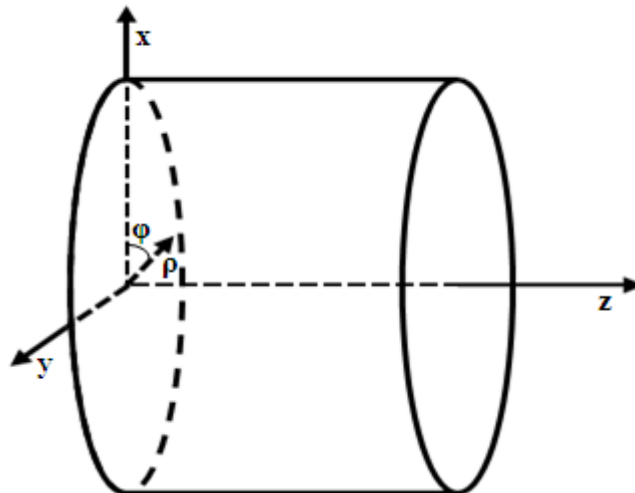


Figura 2.1 - Sistemas de Coordenadas Retangulares e Cilíndricas

Observe que na Figura 2.1 há dois sistemas de coordenadas aplicados ao cilindro, um é o sistema de coordenadas retangulares (x, y, z) e o outro é o sistema

de coordenadas cilíndricas (ρ, φ, z) . Como a estrutura considerada é um guia coaxial com simetria cilíndrica, e estando o seu eixo longitudinal sobre o eixo z do sistema de coordenadas cilíndricas, pode-se modelar apenas uma das metades das seções longitudinais do guia, conforme a figura abaixo:

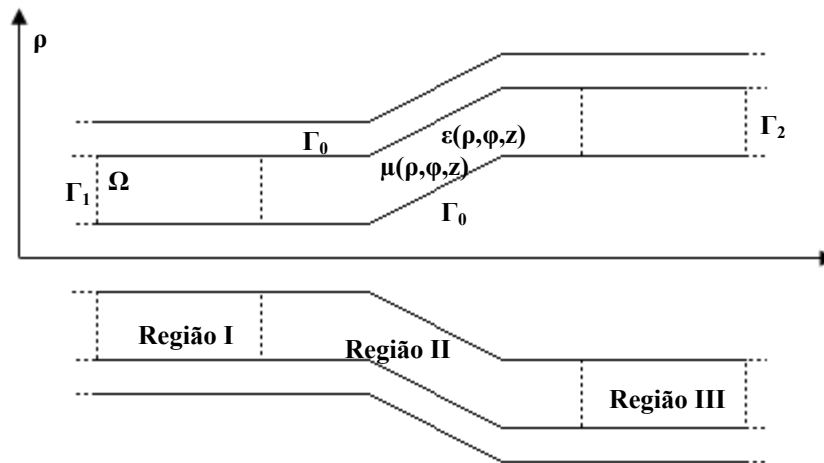


Figura 2.2 - Geometria do Problema

Sendo este guia, excitado somente pelo modo TEM aplicado a porta de entrada Γ_1 , tanto a porta de entrada quanto a porta de saída deverão estar localizadas a uma determinada distância das discontinuidades, tal que se assegure somente a existência do modo TEM de propagação sobre estas portas, isto é, embora ocorram outros modos de propagação nas discontinuidades da Região II, eles estarão completamente atenuados quando chegarem as portas de entrada e saída.

Observa-se que o modo TEM utilizado para excitar o guia não apresenta dependência azimutal e como conseqüência H_ϕ e E_ρ são as únicas componentes de campo não nulas. Como mostrado em [1], devido às discontinuidades apresentadas na Região II, os modos TM são excitados somente nesta região.

2.3. Equações de Maxwell

Considerando-se um meio homogêneo, isotrópico, com ou sem perdas e utilizando o regime senoidal permanente as equações de Maxwell na forma diferencial, para esse caso, são descritas conforme abaixo [5]:

$$\nabla \times \vec{E} = -j\omega\mu\vec{H} - \vec{M} \quad 2.1$$

$$\nabla \times \vec{H} = j\omega\varepsilon\vec{E} + \vec{J} \quad 2.2$$

$$\nabla \cdot \vec{E} = \rho / \varepsilon \quad 2.3$$

$$\nabla \cdot \vec{H} = \rho_m / \mu \quad 2.4$$

Equações de continuidade das cargas:

$$\nabla \cdot \vec{J} = -j\omega\rho \quad 2.5$$

$$\nabla \cdot \vec{M} = -j\omega\rho_m \quad 2.6$$

Levando em consideração que:

$$\varepsilon = \varepsilon_0\varepsilon_r(\rho, z) \quad 2.7$$

$$\mu = \mu_0\mu_r(\rho, z) \quad 2.8$$

Onde:

ε - permissividade do meio.

μ - permeabilidade do meio.

ρ - densidade volumétrica de carga elétrica.

ρ_m - densidade volumétrica de carga magnética.

\vec{J} - densidade superficial de corrente elétrica.

\vec{M} - densidade superficial de corrente magnética.

ϵ_r - permissividade relativa do meio.

μ_r - permeabilidade relativa do meio.

Como a fonte gera uma onda TEM na porta de entrada Γ_1 da Figura 2.2, não havendo dependência azimutal, o campo magnético no interior do dispositivo terá uma única componente não nula em H_ϕ , assim sendo [2]:

$$\vec{H} = H_\phi(\rho, Z)\hat{i}_\phi \quad 2.9$$

Da mesma forma para que haja acoplamento do campo elétrico entre as regiões, a componente azimutal será nula:

$$\vec{E} = E_\rho(\rho, z)\hat{i}_\rho + E_z(\rho, z)\hat{i}_z \quad 2.10$$

Levando em consideração que no interior do guia coaxial não existem cargas elétricas ou magnéticas, não existindo também em decorrência disto, a circulação de correntes, as quatro equações de Maxwell na forma diferencial podem ser resumidas a seguinte forma:

$$\nabla \times \vec{H} = j\omega\epsilon\vec{E} \quad 2.11$$

$$\nabla \times \vec{E} = -j\omega\mu\vec{H} \quad 2.12$$

$$\nabla \cdot \vec{E} = 0 \quad 2.13$$

$$\nabla \cdot \vec{H} = 0 \quad 2.14$$

e a partir destas, como mostrado em [1], pode-se obter a equação vetorial de onda conforme descrita abaixo:

$$\nabla \times \left[\frac{\nabla \times \vec{H}}{\varepsilon_r(\rho, z)} \right] - k_0^2 \mu_r \vec{H} = 0 \quad 2.15$$

onde k_0 é a constante de propagação no espaço livre, $k_0 = \omega \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}$, $\varepsilon_r(\rho, z)$ descreve a permissividade relativa em todas as regiões do guia.

2.4. Campos sobre as portas

Como mencionado anteriormente, as regiões I e III foram dimensionadas para a propagação exclusiva do modo TEM, e dimensionadas para que, nas portas de entrada e saída, a contribuição dos demais modos seja desconsiderada.

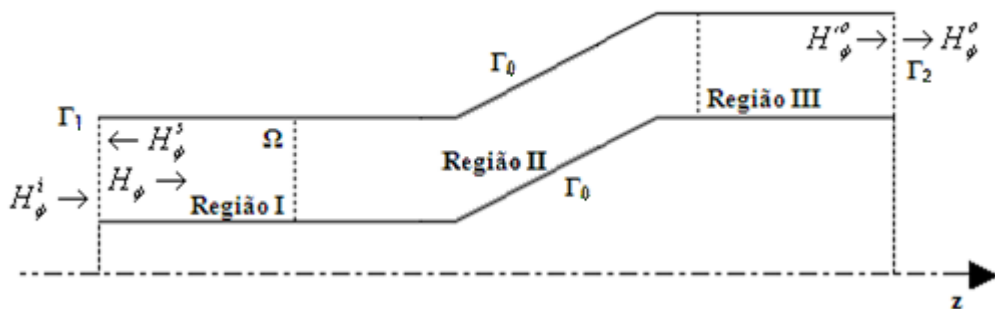


Figura 2.3 – Decompondo o Campo Magnético

Desta forma, o campo magnético na porta de entrada será composto das contribuições H_ϕ^1 associada ao modo incidente se propagando na direção positiva do eixo z e do campo H_ϕ^2 , associado ao modo refletido pelas descontinuidades da região II e se propagando na direção negativa deste mesmo eixo.

De outra forma, na porta de saída haverá, somente, a presença da contribuição do campo H_ϕ^0 , como representado na Figura 2.3.

Os campos existentes, considerando a existência de um único modo nas portas, nestas regiões podem ser descritos conforme seguem abaixo [1]:

$$H_{\phi}^i(\rho, z) = H_{\phi}^i(\rho) e^{-jkz} = \frac{H^i}{\rho} e^{-jkz} \quad 2.16$$

$$H_{\phi}^s(\rho, z) = H_{\phi}^s(\rho) e^{jkz} = \frac{H^s}{\rho} e^{jkz} \quad 2.17$$

$$H_{\phi}^o(\rho, z) = H_{\phi}^o(\rho) e^{-jkz} = \frac{H^o}{\rho} e^{-jkz} \quad 2.18$$

onde H_{ϕ}^i é o campo magnético incidente, H_{ϕ}^s é o campo magnético espalhado e o H_{ϕ}^o é o campo magnético na Porta 2, de saída. Através da Equação 2.11 pode-se estabelecer a seguinte relação entre o campo elétrico e magnético nas Portas:

$$\vec{E} = \frac{\nabla \times \vec{H}}{j\omega\epsilon} = \frac{1}{j\omega\epsilon} \left(-\frac{\partial H_{\phi}}{\partial z} \hat{i}_{\rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial(\rho H_{\phi})}{\partial \rho} \hat{i}_z \right) \quad 2.19$$

onde a componente em z do campo elétrico é nula, pois o campo magnético varia somente com ρ devido a existência exclusiva do modo TEM sobre as portas:

$$E_{\rho} \Big|_{\Gamma_1} = \frac{1}{j\omega\epsilon} \left[-\frac{\partial H_{\phi}}{\partial z} \right] \Big|_{\Gamma_1} = -\frac{1}{j\omega\epsilon} \frac{\partial}{\partial z} (H_{\phi}^i + H_{\phi}^s) \Big|_{\Gamma_1} = \frac{k}{\omega\epsilon} [H_{\phi}^i - H_{\phi}^s] \Big|_{\Gamma_1} \quad 2.20$$

$$E_{\rho} \Big|_{\Gamma_2} = \frac{1}{j\omega\epsilon} \left[-\frac{\partial H_{\phi}^o}{\partial z} \right] \Big|_{\Gamma_2} = -\frac{1}{j\omega\epsilon} \frac{\partial}{\partial z} (H_{\phi}^o) \Big|_{\Gamma_2} = \frac{k}{\omega\epsilon} [H_{\phi}^o] \Big|_{\Gamma_2} \quad 2.21$$

Pode-se reescrever a expressão para o campo elétrico E_{ρ} sobre a porta 1 em função do campo H_{ϕ} sobre a mesma porta, considerando que $H_{\phi} = H_{\phi}^i + H_{\phi}^s$ e substituí-lo em 2.20 levando a Equação 2.22:

$$E_{\rho}|_{\Gamma_1} = \frac{k_1}{\omega\epsilon} \left[H_{\phi}^i - H_{\phi}^s \right] \Big|_{\Gamma_1} = \frac{k_1}{\omega\epsilon} \left[2H_{\phi}^i - H_{\phi} \right] \Big|_{\Gamma_1} \quad 2.22$$

2.5. Aplicando o Método de Galerkin

No MEF não se resolve diretamente a equação diferencial 2.15, o problema é desenvolvido para uma equação integral relacionada ao comportamento físico do problema. No Método de Galerkin, utilizam-se funções auxiliares chamadas funções peso, \vec{w} , e através da operação produto interno é gerado um sistema de equações lineares que será posteriormente resolvido. Usando a equação de onda 2.15 para se aplicar o produto interno por \vec{w} , tem-se que:

$$\int_v \nabla \times \left[\frac{\nabla \times \vec{H}}{\epsilon_r(\rho, z)} \right] \cdot \vec{w} dV - \int_v k_0^2 \mu_r(\rho, z) \vec{H} \cdot \vec{w} dV = 0 \quad 2.23$$

Aplicando a igualdade abaixo ao primeiro termo da Equação 2.23 obtém-se a Equação 2.25:

$$\nabla \cdot (\vec{C} \times \vec{B}) = (\nabla \times \vec{C}) \cdot \vec{B} - \vec{C} \cdot (\nabla \times \vec{B}) \quad 2.24$$

$$\int_v \nabla \cdot \left[\frac{1}{\epsilon_r(\rho, z)} (\nabla \times \vec{H}) \times \vec{w} \right] dV + \int_v \frac{1}{\epsilon_r(\rho, z)} [\nabla \times \vec{w} \cdot \nabla \times \vec{H}] dV - \int_v k_0^2 \mu_r \vec{H} \cdot \vec{w} dV = 0 \quad 2.25$$

A aplicação do Teorema de Gauss ao primeiro termo da Equação 2.25 a deixa no seguinte formato, sendo \hat{n} um vetor unitário normal as paredes do volume v:

$$\oint_s \frac{1}{\varepsilon_r(\rho, z)} [\nabla \times \vec{H} \times \vec{W}] \cdot \hat{n} ds + \int_v \frac{1}{\varepsilon_r(\rho, z)} [\nabla \times \vec{W} \cdot \nabla \times \vec{H}] dV - \int_v k_0^2 \mu_r \vec{H} \cdot \vec{W} dV = 0 \quad 2.26$$

Utilizando a Equação 2.11, a integral de superfície da Equação 2.26 pode ser escrita em termos do campo elétrico sobre as paredes da estrutura conforme mostrado na Equação 2.27:

$$\oint_s \frac{1}{\varepsilon_r(\rho, z)} [\vec{E} \times \vec{W}] \cdot \hat{n} ds + \int_v \frac{1}{\varepsilon_r(\rho, z)} [\nabla \times \vec{W} \cdot \nabla \times \vec{H}] dV - \int_v k_0^2 \mu_r \vec{H} \cdot \vec{W} dV = 0 \quad 2.27$$

Utilizando a propriedade vetorial comutativa, $(\vec{W} \times \vec{E}) \cdot \hat{n} = (\hat{n} \times \vec{E}) \cdot \vec{W}$, a Equação 2.27 assume o seguinte formato:

$$j\omega \oint_s (\hat{n} \times \vec{E}) \cdot \vec{W} ds + \int_v \frac{1}{\varepsilon_r(\rho, z)} [\nabla \times \vec{W} \cdot \nabla \times \vec{H}] dV - \int_v k_0^2 \mu_r \vec{H} \cdot \vec{W} dV = 0 \quad 2.28$$

Sobre as paredes metálicas, a componente tangencial de campo elétrico é nula, $(\hat{n} \times \vec{E})|_C = 0$, fazendo com que na integral de contorno seja considerada somente as contribuições das portas de entrada e saída do guia, logo a Equação 2.28 pode ser simplificada para a Equação 2.30 como se segue:

$$\int_v \frac{1}{\varepsilon_r(\rho, z)} [\nabla \times \vec{W} \cdot \nabla \times \vec{H}] dV - \int_v k_0^2 \mu_r \vec{H} \cdot \vec{W} dV = -j\omega \oint_{s_1} (\hat{n} \times \vec{E}) \cdot \vec{W} ds - j\omega \oint_{s_2} (\hat{n} \times \vec{E}) \cdot \vec{W} ds$$

2.29

Lembrando que sobre as portas de entrada e saída:

$$j\omega(\hat{n} \times \vec{E}) = \frac{1}{\varepsilon} \left(\frac{\partial H_\phi}{\partial z} \right) \quad 2.30$$

A Equação 2.29 pode ser reescrita como a Equação 2.31:

$$\int_v \frac{1}{\varepsilon_r(\rho, z)} [\nabla \times \vec{W} \cdot \nabla \times \vec{H}] dV - \int_v k_0^2 \mu_r \vec{H} \cdot \vec{W} dV = - \oint_{s_1} \frac{1}{\varepsilon} \left(\frac{\partial H_\phi}{\partial z} \right) \cdot \vec{W} ds - \oint_{s_2} \frac{1}{\varepsilon} \left(\frac{\partial H_\phi}{\partial z} \right) \cdot \vec{W} ds \quad 2.31$$

Considerando que a geometria da estrutura pôde ser simplificada para o caso bidimensional, conforme mostrado na Seção 2.2 os campos não possuem dependência azimutal, a Equação 2.31 pode ser resolvida para a coordenada cilíndrica ϕ , onde $v \rightarrow s$ e $s \rightarrow \Gamma$, e aplicando-se as Equações 2.23 e 2.24 a este resultado, tem-se a Equação 2.32:

$$\begin{aligned} 2\pi \int_{\Omega} \frac{1}{\varepsilon_r} [\nabla \times \vec{W} \cdot \nabla \times \vec{H}] ds - 2\pi k_0^2 \mu_r \int_{\Omega} \vec{H} \cdot \vec{W} ds + 2\pi \frac{jk_0}{\sqrt{\varepsilon_{r_1}}} \int_{\Gamma_1} \vec{H} \cdot \vec{W} dl + \\ 2\pi \frac{jk_0}{\sqrt{\varepsilon_{r_2}}} \int_{\Gamma_2} \vec{H} \cdot \vec{W} dl = 4\pi \frac{jk_0}{\sqrt{\varepsilon_{r_1}}} \int_{\Gamma_1} \vec{H}^i \cdot \vec{W} dl \end{aligned} \quad 2.32$$

Onde $ds = \rho d\rho dz$ e $dl = \rho d\rho$.

A formulação acima permite a resolução de uma série de problemas supondo que a descontinuidade está bastante afastada para que os modos evanescentes, TM, não alcancem tanto a porta de entrada quanto a porta de saída de tal forma que possamos supor a existência exclusiva do modo TEM, porém, pode-se pensar em uma formulação mais abrangente com a introdução de uma

corrente magnética na porta de entrada, conforme será detalhada na seção seguinte.

2.6. Corrente Magnética na Porta de Entrada

A formulação apresentada anteriormente foi desenvolvida considerando a presença exclusiva do modo TEM na porta de entrada. Alternativamente, visando considerar a existência de outros modos sobre a porta de entrada, a formulação eletromagnética apresentada anteriormente será modificada supondo que a estrutura seja excitada por uma fonte de corrente magnética sobre a porta de entrada com dependência idêntica a do modo TEM.

$$\vec{M}_{\Gamma_1} = -\hat{n} \times \vec{E}_{TEM} = \frac{1}{j\omega\epsilon} \frac{\partial \vec{H}_\phi^i}{\partial z} \Big|_{\Gamma_2} = \frac{k_1}{\omega\epsilon} \frac{\vec{H}_\phi^i}{\eta} = \frac{k_1}{\omega\epsilon} \frac{H_0}{\eta\rho} \quad 2.33$$

Na porta de saída, dimensionada para a propagação exclusiva do modo TEM, será suposta a distribuição de campo E_ρ associado ao campo magnético H_ϕ dada pela Equação 2.21.

Reorganizando a Equação 2.29:

$$\int_v \frac{1}{\epsilon_r(\rho, z)} [\nabla \times \vec{W} \cdot \nabla \times \vec{H}] dV - \int_v k_0^2 \mu_r \vec{H} \cdot \vec{W} dV = j\omega \int_{s_1} \vec{M}_{\Gamma_1} \cdot \vec{W} ds + j\omega \int_{s_2} \vec{M}_{\Gamma_2} \cdot \vec{W} ds \quad 2.34$$

Evoluindo a Equação 2.36.

$$\int_v \frac{1}{\epsilon_r(\rho, z)} [\nabla \times \vec{W} \cdot \nabla \times \vec{H}] dV - \int_v k_0^2 \mu_r \vec{H} \cdot \vec{W} dV + \frac{jk_2}{\epsilon_2} \int_{s_2} \vec{H}_\phi \vec{W} ds = j\omega \int_{s_1} \vec{M}_{\Gamma_1} \cdot \vec{W} ds \quad 2.35$$

Fazendo as substituições:

$$\int_v \frac{1}{\varepsilon_r(\rho, z)} [\nabla \times \vec{W} \cdot \nabla \times \vec{H}] dV - \int_v k_0^2 \mu_r \vec{H} \cdot \vec{W} dV + \frac{jk_2}{\varepsilon_2} \int_{s_2} \vec{H}_\phi \vec{W} ds = \frac{jk_1 H_0}{\eta \varepsilon_1} \int_{s_1} \frac{\vec{W}}{\rho} ds \quad 2.36$$

Da mesma forma que na seção anterior, a geometria da estrutura pode ser simplificada para o caso bidimensional, conforme mostrado na Seção 2.2 os campos não possuem dependência azimutal, e a Equação 2.36 pode ser resolvida para a coordenada cilíndrica ϕ , onde $v \rightarrow s$ e $s \rightarrow \Gamma$, resultando na Equação 2.37, abaixo:

$$\begin{aligned} 2\pi \int_{\Omega} \frac{1}{\varepsilon_r(\rho, z)} [\nabla \times \vec{W} \cdot \nabla \times \vec{H}] ds - 2\pi k_0^2 \mu_r \int_{\Omega} \vec{H} \cdot \vec{W} ds + 2\pi \frac{jk_2}{\varepsilon_2} \int_{\Gamma_2} \vec{H}_\phi \vec{W} dl = \\ 2\pi \frac{jk_1 H_0}{\eta \varepsilon_1} \int_{\Gamma_1} \frac{\vec{W}}{\rho} dl \end{aligned} \quad 2.37$$

Onde $ds = \rho d\rho dz$ e $dl = \rho d\phi$.

No próximo capítulo serão apresentadas algumas modificações nas Equações 2.32 e 2.37 a fim de possibilitar a aplicação do Método de Elementos Finitos.