3
Sistemas alternantes

Em 1857, George Boole (Ble) provou que, para toda função integrável ϕ, vale a seguinte fórmula:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x - 1/x)dx.$$

Pela Proposição 2.9, sabemos que isso é equivalente a dizer que a transformação $\varphi(x) = x - 1/x$ preserva a medida de Lebesgue na reta. Essa função φ - chamada de *transformação de Boole* - é, na verdade, ergódica com respeito à medida de Lebesgue (Adl).

Nosso objetivo, nesse capítulo, é definir uma classe de funções na reta que abranjam a transformação de Boole e apresentar certas ferramentas que serão necessárias para mostrarmos, nos próximos capítulos, sob que circunstâncias essas funções são transitivas, robustamente transitivas e ergódicas. Chamaremos essa classe de funções que generalizam a transformação de Boole de *sistemas alternantes.*

3.1
Sistemas alternantes: preliminares

Para simplificar a notação da definição de sistemas alternantes, vamos primeiro apresentar algumas definições.

Seja $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$ uma coleção de n números reais distintos. Dizemos que B está *entrelaçado* ao conjunto de números reais $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}\}$ se, para todo intervalo aberto E da partição induzida por A em $\mathbb{R}$, existe um único $i \in \{1, \ldots, n\}$ tal que $b_i \in E$, ou seja, se

$$b_1 < a_1 < b_2 < \ldots < b_{n-1} < a_{n-1} < b_n.$$

Considere uma função *sinal*, definida em $\mathbb{R} - \{0\}$ por

$$sinal(x) = \begin{cases} -1, & x < 0 \\ 1, & x > 0. \end{cases}$$

Dada uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dizemos que a órbita $\mathcal{O}_f^+(x)$ *troca de sinal indefinidamente* se, para todo $N \geq 0$, existe $M > N$ tal que $sinal(f^M(x)) = -sinal(f^N(x))$.

Definição 3.1 *Seja $f : \mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R}$ uma transformação contínua. Dizemos que f é um sistema alternante se:*

(A1) Para todo $n \geq 1$, $f^{-n}(0)$ é um conjunto com 2^n elementos distintos e é entrelaçado ao conjunto

$$\bigcup_{i=0}^{n-1} f^{-i}(0);$$

(A2) $\mathcal{O}_f^+(x)$ troca de sinal indefinidamente para todo $x \in \mathbb{R} - \mathcal{N}$, onde $\mathcal{N}$ é um subconjunto enumerável.

Observe que o conjunto $\mathcal{N}$ da Definição 3.1 deve, necessariamente, conter as pré-imagens de zero, ou seja,

$$\bigcup_{i=0}^{\infty} f^{-i}(0) \subset \mathcal{N},$$

pois, como a órbita dos pontos em $\bigcup_{i=0}^{\infty} f^{-i}(0)$ não estão sequer definidas, então, em particular, não podem trocar indefinidamente de sinal.

Observação 3.2 *Seja $f : \mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R}$ um sistema alternante e $\mathbb{X} \equiv \mathbb{R} - \{f^{-n}(0) : n \geq 0\}$. Mais que ser f-invariante, $\mathbb{X}$ é o conjunto formado pelos pontos da reta cujas órbitas estão definidas e, assim, não apenas faz sentido definir uma dinâmica restrita a $\mathbb{X}$, como essa dinâmica é essencialmente a mesma. Se quisermos, por exemplo, mostrar que f é transitiva, basta procurarmos por um ponto de $\mathbb{X}$ cuja órbita seja densa.*

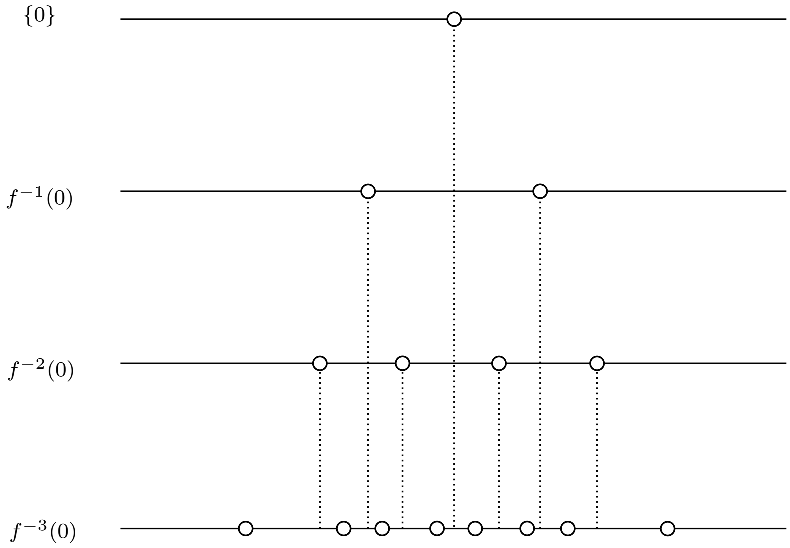

Figura 3.1: Primeira propriedade de um sistema alternante: pré-imagens entrelaçadas e duplicadas.

Lema 3.3 *Seja $f : \mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R}$ uma transformação contínua. Se f satisfaz as propriedades abaixo, então é sistema alternante.*

1. *f é crescente em cada componente conexa de $\mathbb{R} - \{0\}$.*
2. *$f(0, +\infty) = f(-\infty, 0) = \mathbb{R}$.*
3. *A reta $\{x = 0\}$ é uma assíntota vertical de f tal que $f(x) \to \infty$, quando $x \to 0^-$ e $f(x) \to -\infty$, quando $x \to 0^+$.*
4. *$f(x) \to -\infty$, quando $x \to -\infty$ e $f(x) \to +\infty$, quando $x \to +\infty$.*
5. *f está acima da diagonal em $(-\infty, 0)$ e abaixo da diagonal em $(0, +\infty)$.*

Observação 3.4 *Repare que uma das hipóteses acima é redundante, mais precisamente, uma dentre as hipóteses (2),(3) e (4) é redundante. De fato, duas dessas hipótese mais a continuidade de f implicam a terceira. Escolhemos, entretanto, enunciar todas no lema, pois se quisermos mostrar que uma determinada função é um sistema alternante usando o Lema 3.3 podemos escolher uma dentre as hipóteses (2),(3) e (4) para não demonstrar.*

Prova da Observação:

$(3), (4) \Rightarrow (2)$

É conseqüência direta do Teorema do Valor Intermediário.

$(2), (3) \Rightarrow (4)$

Considere $f^- = f|_{(-\infty,0)}$ e $f^+ = f|_{(0,\infty)}$. Vamos mostrar que se $\lim_{x\to 0} f^-(x) = \infty$ e $f(-\infty,0) = \mathbb{R}$, então $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.

Suponha, por absurdo, que $\lim_{x\to-\infty} f(x) \neq -\infty$. Nesse caso, teríamos duas possibilidades: $\lim_{x\to-\infty} f(x) = L$ para algum $L \in \mathbb{R}$ ou $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty$. Em ambos os casos, existiria um $L \in \mathbb{R}$ tal que $f(-\infty,0) = (L,\infty)$, contradizendo (3) (ver figuras 3.2 e 3.3). A demonstração para f^+ é análoga.

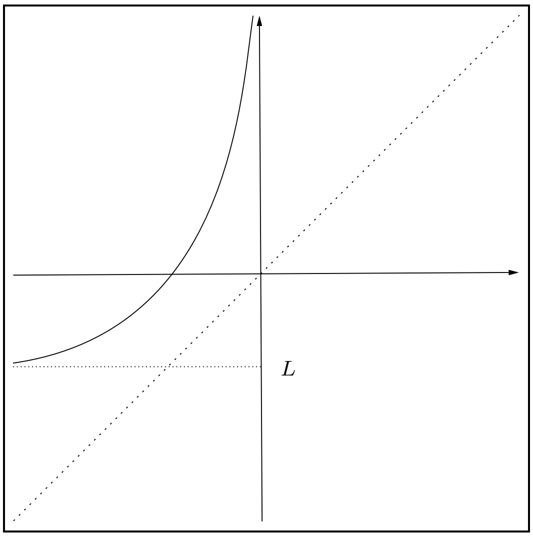

Figura 3.2: $\lim_{x\to-\infty} f(x) = L$

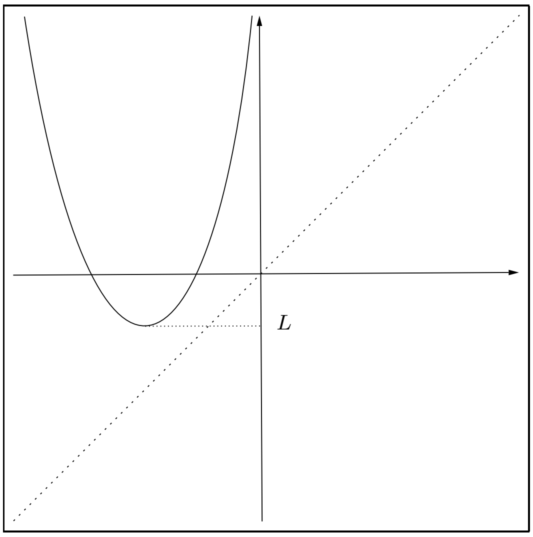

Figura 3.3: $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty$

$(2), (4) \Rightarrow (3)$

Demonstraremos de maneira semelhante à prova anterior. Vamos mostrar que se $\lim_{x\to-\infty} f^-(x) = -\infty$ e $f(-\infty,0) = \mathbb{R}$, então $\lim_{x\to 0} f^-(x) = \infty$.

Suponha, por absurdo, que $\lim_{x\to 0} f^-(x) \neq \infty$. Nesse caso, teríamos duas possibilidades: $\lim_{x\to 0} f^-(x) = L$ para algum $L \in \mathbb{R}$ ou $\lim_{x\to 0} f^-(x) = -\infty$. Em ambos os casos, existiria um $L \in \mathbb{R}$ tal que $f(-\infty,0) = (-\infty,L)$, contradizendo (2).

□

Prova do Lema: Vamos mostrar que $f^{-n}(0)$ possui 2^n elementos usando indução em n. O caso $n = 0$ é trivialmente verificado pois

$$card(f^{-0}(0)) = card(\{0\}) = 1 = 2^0.$$

Suponha que seja verdade para $n = k$. Como f é bijetora em cada componente conexa $(-\infty,0)$ e $(0,\infty)$, então, para cada elemento $x_i \in f^{-k}(0)$, temos que a equação $f(x) = x_i$ possui duas raízes: uma em $(-\infty, 0)$ e a outra em $(0, \infty)$. Assim,

$$card(f^{-k-1}(0)) = 2 \cdot card(f^{-k}(0)) = 2 \cdot 2^k = 2^{k+1}$$

e a indução está completa.

Para terminar de mostrar que a propriedade $(A1)$ é satisfeita, precisamos mostrar que $f^{-n}(0)$ é entrelaçado a $\bigcup_{i=0}^{n-1} f^{-i}(0)$. Como já sabemos que

$$card(f^{-n}(0)) = 2^n = 1 + \sum_{i=0}^{n-1} 2^i = 1 + \sum_{i=0}^{n-1} card(f^{-i}(0)) = 1 + card\left(\bigcup_{i=0}^{n-1} f^{-i}\right),$$

basta mostrarmos que entre dois elementos de $f^{-n}(0)$ sempre há pelo menos um elemento de $\bigcup_{i=0}^{n-1} f^{-i}(0)$. Para isso, considere $x, y \in f^{-n}(0)$ e tome o menor $k < n$ tal que $sinal(f^k(x)) = -sinal(f^k(y))$. Pelo Teorema do Valor Intermediário aplicado a f^k, deve haver um $w \in f^{-k}(0)$ entre x e y. Assim fica provada a propriedade (A1).

Para verificar a propriedade $(A2)$, vamos mostrar que, para todo $x \in \mathbb{X} = \mathbb{R} - \{f^{-n} : n \geq 0\}$, $\mathcal{O}_f^+$ troca indefinidamente de sinal.

Como f é monótona crescente em $(-\infty, 0)$, então, para todo $x \in \mathbb{X} \cap (-\infty, 0)$, deve existir algum inteiro $N = N(x) > 0$, tal que $f^N(x) > 0$. Caso contrário, $\mathcal{O}_f^+(x)$ seria uma seqüência monótona crescente definida em um intervalo limitado e, portanto, deveria convergir para algum real $c < 0$. Mas, nesse caso,

$$f(c) = f(\lim_{n\to\infty} f^n(x^*)) = \lim_{n\to\infty} f^{n+1}(x^*) = c,$$

contradizendo a inexistência de pontos fixos. Com um argumento análogo, podemos mostrar que, para todo $x \in \mathbb{X} \cap (0, \infty)$, existe um inteiro $M = M(x)$ tal que $f^M(x) < 0$. Assim, concluímos que toda órbita de f deve trocar indefinidamente de sinal. $\square$

Repare que a transformação de Boole φ é, de fato, um sistema alternante, pois as hipóteses do Lema 3.3 são facilmente verificadas - basta analisarmos seu gráfico:

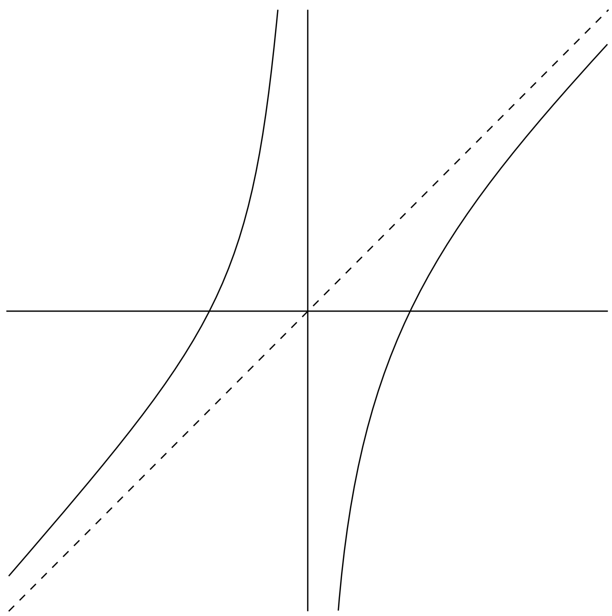

Figura 3.4: O gráfico da transformação de Boole $x \mapsto x - 1/x$.

Nem todo sistema alternante, entretanto, satisfaz o Lema 3.3, como mostraremos a seguir.

Observação 3.5 *A transformação $\psi \equiv 1/x - x = -\varphi$ é um sistema alternante que não satisfaz as hipóteses do Lema 3.3.*

Prova da Observação: Na verdade, é fácil ver que nenhuma das hipóteses do lema são satisfeitas por ψ. Para mostrar que ψ é um sistema alternante, começaremos mostrando a propriedade (A1). Como a transformação de Boole é simétrica, ou seja, $\varphi(-x) = -\varphi(x)$, temos que, para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$\psi^n(x) = (-1)^n \varphi^n(x).$$

Assim, $\psi^n(x) = 0$ se, e somente se, $\varphi^n(x) = 0$ e, dessa maneira, ψ também satisfaz a propriedade (A1) de um sistema alternante.

Para provarmos que ψ satisfaz a propriedade (A2) devemos verificar se o conjunto $\mathcal{N}_\psi$ dos pontos cuja órbita não troca indefinidamente de sinal é enumerável. No caso da transformação de Boole, esse conjunto é exatamente $\mathcal{N}_\varphi \equiv \{\varphi^{-n}(0) : n \in \mathbb{N}\}$. Para ψ, veremos que

$$\mathcal{N}_\psi = \mathcal{N}_\varphi \cup \mathcal{N},$$

onde $\mathcal{N} = \displaystyle\bigcup_{n=0}^{\infty} \psi^{-n}(\pm\sqrt{2}/2)$.

Repare que, como $\psi((-\infty,-1)) = \mathbb{R}_+ - \{0\}$ e $\psi((1,\infty)) = \mathbb{R}_- - \{0\}$, então basta mostrarmos que se $x \in I_+ \equiv (0,1) - \mathcal{N}$, então deve existir um inteiro $N > 0$ tal que $\psi^N(x) \notin I_+$. Para isso, fixe $x \in I_+$ tal que $\psi(x) \in I_+$ e considere o intervalo A cujos extremos são x e $\psi(x)$, ou seja, $A = (x, \psi(x))$ ou $A = (\psi(x), x)$. Como

$$\psi'(x) = -\left(1 + \frac{1}{x^2}\right),$$

então $\inf\{|\psi'(x)| : x \in I_+\} = 2$. Pelo Teorema do Valor Médio,

$$|\psi^n(A)| > 2^n |A|$$

e, portanto, deve haver um inteiro $N > 0$ tal que $|\psi^N(A)| > 1 > |I_+|$. Assim, $|\psi^N(x) - \psi^{N+1}(x)| > |I_+|$ e, portanto, ou $\psi^N(x) \notin I_+$ ou $\psi^{N+1}(x) \notin I_+$. O caso $x \in I_- \equiv (-1,0) - \mathcal{N}$ é análogo. □

Chamaremos uma transformação que satisfaz as hipóteses do Lema 3.3 de *sistema alternante crescente.*

Teorema 3.6 *Seja $f : \mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável tal que:*

1. *f é transitiva.*
2. *Existe $a > 0$ tal que $f'(x) \geq a$, para todo x.*

Então f é um sistema alternante crescente.

Prova: Vamos mostrar que f satisfaz as hipóteses (1),(3),(4) e (5) do Lema 3.3. A hipótese (2), como vimos na Observação 3.4, não precisa ser demonstrada. A hipótese (1) - que f é monótona crescente - é conseqüência imediata de $f'(x) > a > 0$. Vamos mostrar agora que a hipótese (4) é satisfeita, isto é, que $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$ e $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$. Suponha, por absurdo, que $\lim_{x\to\infty} f(x) = c \in \mathbb{R}^+$, ou seja, que para todo $\epsilon > 0$, existe $x_\epsilon \in \mathbb{R}$ tal que $c - f(x) < \epsilon$, se $x \geq x_\epsilon$. Tomando $x, y > x_\epsilon$ tais que $y - x \geq \epsilon/a$, temos, pelo Teorema do Valor Médio, que existe $z \in (x,y)$ tal que

$$f'(z) = \frac{f(y) - f(x)}{y - x} < \frac{c - f(x)}{y - x} < \frac{\epsilon}{(\epsilon/a)} = a,$$

mas isso contradiz a segunda hipótese do teorema. Assim, provamos que $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$. Com um argumento idêntico, podemos mostrar que $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.

Para provar (5) - que f está acima da diagonal em $\mathbb{R}_-$ e abaixo em $\mathbb{R}_+$, precisamos, primeiro, mostrar que f não possui pontos fixos. Suponha, por absurdo, que p é ponto fixo de f, ou seja, que $f(p) = p$. Nesse caso, temos que $f((p,\infty)) = (p,\infty)$, se $p > 0$ ou $f((-\infty,p)) = (-\infty,p)$, se $p < 0$. Sendo assim, pelo Corolário 2.4, f não é transitiva, contrariando a primeira hipótese do teorema.

Bom, sabemos que f não tem pontos fixos, se f não satisfizesse a hipótese (5) teríamos que $f(x) > x$ para todo $x > 0$ ou que $f(x) < x$ para todo $x < 0$. Em qualquer um dos casos, como f é crescente em cada componente conexa, teríamos $f(0,\infty) \subset (0,\infty)$ ou $f(-\infty,0) \subset (-\infty,0)$ e, portanto, novamente pelo Corolário 2.4, f não seria transitiva.

Finalmente, suponha que a hipótese (3) não é satisfeita, ou seja, que existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) \to c$, quando $x \to 0^-$, ou tal que $f(x) \to c$, quando $x \to 0^+$. Como f está abaixo da diagonal em $\mathbb{R}_+$ e acima, em $\mathbb{R}_-$, teríamos que $f^{-1}(c,\infty) \subset (c,\infty)$ ou que $f^{-1}(-\infty,c) \subset (-\infty,c)$, contrariando a transitividade de f (Corolário 2.5). Com isso a prova está completa. $\square$

3.2 A transformação induzida

Considere um sistema alternante crescente $f : \mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R}$. Sejam x_0^- e x_0^+ as raízes negativa e positiva, respectivamente, da equação $f(x) = 0$ e defina $f_- = f|_{(-\infty,0)}$ e $f_+ = f|_{(0,\infty)}$. Chamamos de *seqüências induzidas por f*, as seqüências que definidas recursivamente a seguir:

$$\begin{cases} x_n^+ = f_+^{-1}(x_{n-1}^+), \\ x_1^+ = f_+^{-1}(x_0^+), \end{cases} \qquad \begin{cases} x_n^- = f_-^{-1}(x_{n-1}^-), \\ x_1^- = f_-^{-1}(x_0^-), \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_n^- = f_-^{-1}(x_{n-1}^+), \\ u_1^- = f_-^{-1}(x_0^+), \end{cases} \qquad \begin{cases} u_n^+ = f_+^{-1}(x_{n-1}^-), \\ u_1^+ = f_+^{-1}(x_0^-). \end{cases}$$

Repare que x_n^- e u_n^- são os pontos mínimo e máximo, respectivamente, de $f^{-n}(0) \cap (-\infty,0)$, assim como u_n^+ e x_n^+ são o mínimo e o máximo, respectivamente, de $f^{-n}(0) \cap (0,\infty)$. Pelas hipóteses do Lema 3.3, vemos claramente que $x_n^+ \to \infty$, $x_n^- \to -\infty$ e $u_n^\pm \to 0^\pm$. Além disso, vemos que, por definição, os pontos dessas seqüências possuem a seguinte dinâmica:

$$u_{n+1}^- \longrightarrow x_n^+ \longrightarrow x_{n-1}^+ \longrightarrow \ldots \longrightarrow x_1^+ \longrightarrow x_0^+ \longrightarrow 0,$$
$$u_{n+1}^+ \longrightarrow x_n^- \longrightarrow x_{n-1}^- \longrightarrow \ldots \longrightarrow x_1^- \longrightarrow x_0^- \longrightarrow 0.$$

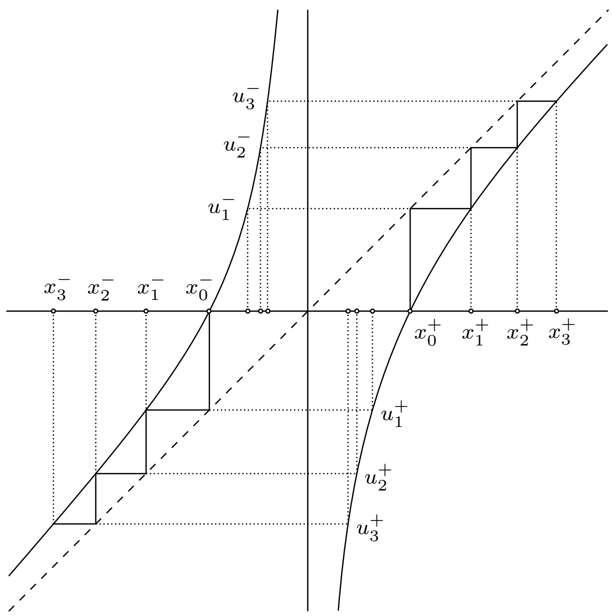

Figura 3.5: Os primeiros quatro termos das seqüências induzidas pela transformação de Boole $x \mapsto x - 1/x$.

Chamaremos de *partição induzida por* f *em* $\mathbb{R}$ a partição disjunta $\mathbb{P}_f$ induzida pelas seqüências definidas anteriormente. Os átomos dessa partição são descritos por

$$\{B_{n+1}^- = (x_{n+1}^-, x_n^-)\}_{n\geq 0}, \{B_{n+1}^+ = (x_n^+, x_{n+1}^+)\}_{n\geq 0},$$
$$\{I_{n+1}^- = (u_{n+1}^-, u_n^-)\}_{n\geq 0}, \{I_{n+1}^+ = (u_n^+, u_{n+1}^+)\}_{n\geq 0},$$

onde $u_0^- = x_0^-$ e $u_0^+ = x_0^+$.

Pela continuidade de f, temos que a dinâmica dos átomos acompanha a dinâmica das seqüências, ou seja,

$$I_{n+1}^- \longrightarrow B_n^+ \longrightarrow B_{n-1}^+ \longrightarrow \ldots \longrightarrow B_1^+ \longrightarrow (0, x_0^+), \tag{3-1}$$
$$I_{n+1}^+ \longrightarrow B_n^- \longrightarrow B_{n-1}^- \longrightarrow \ldots \longrightarrow B_1^- \longrightarrow (x_0^-, 0). \tag{3-2}$$

Dessa forma, se $[x, y] \subset I_{n+1}^-$, então

$$\begin{aligned}
[f(x),f(y)] &\subset B_n^+, \\
[f^2(x),f^2(y)] &\subset B_{n-1}^+, \\
&\vdots \\
[f^m(x),f^m(y)] &\subset B_{n-m+1}^+, \\
&\vdots \\
[f^n(x),f^n(y)] &\subset I^+.
\end{aligned}$$

Para podermos mostrar uma série de propriedades de um sistema alternante f, usaremos uma transformação definida no conjunto $I = [x_0^-, x_0^+]$. Chamaremos tal conjunto de *intervalo distribuidor*.

Lema 3.7

$$\mathbb{R} - \{0\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} f^{-n}(I),$$

Prova: Conseqüência das dinâmicas dos átomos descritas em (3-1) e (3-2). □

Como $\mathbb{X} \equiv \mathbb{R} - \{f^{-n}(0) : n \geq 0\}$ é um conjunto f-invariante, temos também que

$$\mathbb{X} = \bigcup_{n=1}^{\infty} f^{-n}(I \cap \mathbb{X}).$$

Definição 3.8 (transformação induzida) *Sejam $f : \mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R}$ um sistema alternante crescente e $I = [x_0^-, x_0^+]$ seu intervalo distribuidor. Definimos a transformação $f_I : I - \{0\} \to I$ por*

$$f_I(x) = f^{n(x)}(x),$$

onde

$$n(x) \equiv \min\{n \geq 1 : f^n(x) \in I\}.$$

Chamaremos f_I de transformação induzida por f no intervalo distribuidor I.

A seguinte observação implica que f_I está bem definida.

Observação 3.9 *Note que $I = \bigcup_n \overline{I_n^{\pm}}$ e que se $x \in I_n^- \cup I_n^+$, então $f_I(x) = f^n(x)$. Esse fato é conseqüência direta da dinâmica dos átomos descrita em (3-1) e (3-2) e será utilizado com freqüência no decorrer do texto.*

Lema 3.10 *Seja $E \subset I$ um conjunto na σ-álgebra de Borel. Então*

$$f_I^{-1}(E) = \bigcup_{n=1}^{\infty} (I_n \cap f^{-n}(E)) \quad \textit{(disjunta)},$$

onde $I_n = I_n^- \cup I_n^+$.

Prova: Usaremos o símbolo $\bigsqcup$ para denotar a união de conjuntos disjuntos.

Como $\{I_n^-\}_{n\in\mathbb{N}}$ e $\{I_n^+\}_{n\in\mathbb{N}}$ são famílias de intervalos disjuntos, temos que

$$E = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} (E \cap I_n).$$

Além disso, $f_I^{-1}(I_n) = f^{-n}(I_n)$. Assim,

$$f_I^{-1}(E) = f_I^{-1}\left(\bigsqcup_{n=1}^{\infty} (E \cap I_n)\right) = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} f_I^{-1}(E \cap I_n) = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} f^{-n}(E) \cap I_n,$$

e a prova está completa. □

Teorema 3.11 *Seja $f : \mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R}$ um sistema alternante que preserva a medida de Lebesgue e f_I sua transformação induzida. Então f é ergódica (com respeito à medida de Lebesgue na reta) se f_I for ergódica (com respeito à medida de Lebesgue em I).*

Prova: Seja $E \subset \mathbb{R}$ um conjunto mensurável e invariante com medida positiva. Assim, pelo menos um dos conjuntos $(I \cap E)$ e $(I \cap E^c)$ possui medida positiva. Suponha, sem perda, que $\mu(I \cap E) > 0$. Pelo Lema 3.10, temos que

$$\begin{aligned} f_I^{-1}(E \cap I) &= \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n \cap f^{-n}(I \cap E) = \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n \cap f^{-n}(I) \cap E \\ &= \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n \cap E = E \cap I. \end{aligned}$$

Como f_I^{-1} é ergódica, temos $E \cap I = I$ módulo um conjunto de medida zero. Assim,

$$\mathbb{R} = \bigcup_{n=1}^{\infty} f^{-n}(E \cap I) = \bigcup_{n=1}^{\infty} E \cap f^{-n}(I) = E,$$

módulo um conjunto de medida zero. □