

1

Introdução

A formulação matemática de fenômenos naturais envolve, necessariamente, alguma simplificação das leis que os regem, caso contrário, seria impossível tratá-los analiticamente ou numericamente. Essas simplificações, entretanto, podem não preservar algumas características intrínsecas ao fenômeno. Assim, as propriedades robustas do modelo também serão válidas para o evento estudado.

Nesta dissertação, estudaremos a transitividade robusta e a ergodicidade de certos sistemas dinâmicos definidos na reta (exceto por um ponto). Transitividade e ergodicidade significam, em aspectos topológicos e mensuráveis respectivamente, que o sistema é formado por uma única peça dinâmica. Isto é, o estudo do sistema não pode ser dividido no estudo de diferentes partes "relevantes", independentes entre si.

Seja (X, d) um espaço métrico completo e $f : X \rightarrow X$ uma aplicação contínua. Dizemos que f é transitiva se existir uma órbita densa em X . Veremos, no próximo capítulo (Corolário 2.4), que os abertos invariantes pela ação de uma aplicação transitiva devem ser, necessariamente, densos no espaço ambiente. Assim, o conceito de transitividade mostra-se essencial para a compreensão da dinâmica global de um sistema.

Se (X, \mathcal{A}, μ) é um espaço de medida (estamos particularmente interessados no caso em que a medida é absolutamente contínua em relação à medida de Lebesgue) e $f : X \rightarrow X$ é uma aplicação que preserva a medida μ , então o estudo do comportamento assintótico de f pode ser feito a partir de uma abordagem estatística, restringindo a análise das órbitas apenas a conjuntos de medida positiva. Dizemos que f é ergódica se todo subconjunto invariante de medida positiva coincidir com X a menos de um conjunto de medida zero.

A diferença entre as abordagens mensurável e topológica de uma dinâmica é que, na primeira, os conjuntos que consideramos irrelevantes são os que têm medida nula, enquanto que, na segunda, conjuntos irrelevantes (magros) são aqueles cujo fecho possui interior vazio (ou, ainda, uma união enumerável de conjuntos deste tipo).

Nosso principal objetivo, nesse texto, é investigar a transitividade robusta e a ergodicidade de aplicações diferenciáveis definidas em um aberto denso da reta. Um importante exemplo de aplicação diferenciável e transitiva na reta - que, inclusive, motivou grande parte da análise feita nesse texto - é a transformação de Boole $\varphi(x) = x - 1/x$, definida em toda a reta, exceto em $x = 0$. O fato do espaço não ser compacto gera certas dificuldades e particularidades no estudo da dinâmica tanto do ponto de vista topológico, quanto do ponto de vista estatístico.

Uma aplicação diferenciável robustamente transitiva não pode, por exemplo, ser definida em toda a reta. Isso é consequência do fato de que a existência de pontos críticos impossibilita a robustez da transitividade (podemos criar pontos periódicos atratores com C^1 -perturbações). Por outro lado, se a aplicação não possui pontos críticos e está definida em toda a reta, então deve ser monótona (digamos, crescente) e, portanto, qualquer aberto (p, ∞) é invariante e não denso. Isso, por sua vez, contradiz o fato da aplicação ser transitiva (Corolário 2.4). Assim, restringiremos nossos estudos às aplicações transitivas definidas em $\mathbb{R} - \{0\}$ - um passo inicial para a compreensão de todas as dinâmicas transitivas em subconjuntos abertos densos da reta.

No próximo capítulo da dissertação, além de apresentarmos algumas definições e resultados gerais sobre transitividade e ergodicidade, mostraremos dois exemplos de dinâmicas transitivas e ergódicas definidas no círculo \mathbb{S}^1 : a rotação irracional e a aplicação expansora. A segunda, diferentemente da primeira, é robustamente transitiva, como será mostrado na Proposição 4.14,3.1. Na Seção 2.3, definiremos a dinâmica do shift no espaço de seqüências de dois símbolos, que é comumente usada para provar, por meio de uma conjugação, que uma certa aplicação é transitiva (como faremos na própria Seção 2.3 e na Seção 4.1).

No terceiro capítulo, apresentaremos uma grande classe de funções, introduzida recentemente por S. Muñoz(Mun), que, de certa forma, generaliza a transformação de Boole. Essas funções, que chamaremos de sistemas alternantes, possuem características particularmente úteis no estudo da transitividade robusta e da ergodicidade de aplicações definidas em $\mathbb{R} - \{0\}$. Veremos que a análise de um sistema alternante $f : \mathbb{R} - \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ pode ser entendida através da análise de uma transformação $f_I : I - \{0\} \rightarrow I$, onde I é um intervalo compacto tal que

$$\mathbb{R} - \{0\} = \bigcup_{n=0}^{\infty} f^{-n}(I).$$

Essa transformação, ferramenta clássica de teoria ergódica infinita, é chamada

de transformação induzida por f em I , e é definida por $f_I(x) = f^{n(x)}(x)$, onde $n(x)$ é o primeiro iterado positivo de x que está em I .

No quarto capítulo, mostraremos que a transitividade da transformação de Boole não é robusta, mas que existe uma família de transformações $f_a(x) = ax - 1/x$ que são robustamente transitivas (Corolário 4.20). Esse resultado ilustra bem a teoria desenvolvida na dissertação e sua demonstração é um bom exemplo de como a análise da transformação induzida nos permite estudar a robustez da transitividade na reta.

No último capítulo, mostraremos que sistemas alternantes, sob condições específicas, são ergódicos com respeito à medida de Lebesgue (5.5). Isso será feito aplicando o conhecido Teorema do Folclore (Teorema 5.4) à transformação induzida.

Tendo em vista a nítida similaridade existente entre as noções de transitividade e ergodicidade, poderíamos nos perguntar sob quais condições um sistema alternante é robustamente ergódico. Este problema, que é, de fato, relevante, encontra-se em aberto e ultrapassa o escopo desta dissertação.