



**Miguel Adriano Koiller Schnoor**

**Transitividade robusta e ergodicidade de  
aplicações na reta**

**Dissertação de Mestrado**

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre pelo Programa de Pós-graduação em Matemática do Departamento de Matemática da PUC-Rio

Orientador: Prof. Lorenzo J. Díaz

Rio de Janeiro  
agosto de 2007



**Miguel Adriano Koiller Schnoor**

**Transitividade robusta e ergodicidade de  
aplicações na reta**

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre pelo Programa de Pós-graduação em Matemática do Departamento de Matemática do Centro Técnico Científico da PUC-Rio. Aprovada pela Comissão Examinadora abaixo assinada.

**Prof. Lorenzo J. Díaz**

Orientador

Departamento de Matemática — PUC-Rio

**Prof. Enrique Ramiro Pujals**

IMPA

**Prof. Vanderlei Minori Horita**

UNESP

**Prof. Flávio Abdenur**

PUC-Rio

**Prof. Rafael Ruggiero**

PUC-Rio

**Prof. José Eugênio Leal**

Coordenador Setorial do Centro Técnico Científico — PUC-Rio

Rio de Janeiro, 20 de agosto de 2007

Todos os direitos reservados. É proibida a reprodução total ou parcial do trabalho sem autorização da universidade, do autor e do orientador.

### **Miguel Adriano Koiller Schnoor**

Graduação: Matemática-Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro (2002-2005).

Mestrado: Matemática-Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro (2005-2007).

#### Ficha Catalográfica

Schnoor, Miguel A. K.

Transitividade robusta e ergodicidade de aplicações na reta / Miguel Adriano Koiller Schnoor; orientador: Lorenzo J. Díaz. — Rio de Janeiro : PUC–Rio, Departamento de Matemática, 2007.

v., 63 f: il. ; 29,7 cm

1. Dissertação (mestrado) - Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Departamento de Matemática.

Inclui referências bibliográficas.

1. Matemática – Tese. 2. Sistemas alternantes. 3. Transitividade robusta. 4. Ergodicidade. 5. Dinâmica simbólica. 6. Transformação de Boole.

I. Díaz, Lorenzo J.. II. Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro. Departamento de Matemática. III. Título.

CDD: 510

A meu pai, que sempre me inspirou.

## Agradecimentos

Agradeço, em especial, a meus pais e minhas irmãs, pelo amor e incentivo que sempre me deram.

Ao meu orientador, Lorenzo Díaz, por seu constante apoio.

Ao Pe Paul Schweitzer, que a mim dedicou, em momentos tão difíceis, sua atenção e afeto.

A todos meus professores, por tudo o que aprendi com eles.

Aos meus colegas da PUC, pelo convívio e pela amizade.

A todos os funcionários do Departamento de matemática, especialmente à Creuza, que consegue resolver todos os nossos problemas sem perder o bom humor.

À CAPES e à PUC-Rio, pelos auxílios que tornaram possível a execução desse trabalho.

## Resumo

Schnoor, Miguel A. K.; Díaz, Lorenzo J.. **Transitividade robusta e ergodicidade de aplicações na reta**. Rio de Janeiro, 2007. 63p. Dissertação de Mestrado — Departamento de Matemática, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

Em meados do século XIX, G. Boole mostrou que a transformação  $x \mapsto x - 1/x$ , definida em  $\mathbb{R} - \{0\}$ , preserva a medida de Lebesgue (Bl). Mais de um século depois, R. Adler e B. Weiss mostraram que essa aplicação, chamada de transformação de Boole, é, de fato, ergódica com respeito à medida de Lebesgue (Adl). Nesse trabalho, apresentaremos o conceito de sistemas alternantes, definido recentemente por S. Muñoz (Mun), que consiste numa grande classe de aplicações na reta que generaliza a transformação de Boole e que torna possível uma análise abrangente de propriedades como transitividade robusta e ergodicidade. Para mostrar que, sob certas condições, sistemas alternantes são ergódicos com relação à medida de Lebesgue, mostraremos, usando o Teorema do Folclore, que a transformação induzida do sistema alternante é ergódica.

## Palavras-chave

Sistemas alternantes. Transitividade robusta. Ergodicidade. Dinâmica simbólica. Transformação de Boole.

## Abstract

Schnoor, Miguel A. K.; Díaz, Lorenzo J.. **Ergodicity and robust transitivity on the real line**. Rio de Janeiro, 2007. 63p. MsC Thesis — Department of Mathematics, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

In the middle of the 19th century, G. Boole proved that the transformation  $x \mapsto x - 1/x$ , defined on  $\mathbb{R} - \{0\}$ , is a Lebesgue measure preserving transformation (Ble). Over one hundred years later, R. Adler and B. Weiss proved that this map, called Boole's map, is, in fact, ergodic with respect to the Lebesgue measure (Adl). In this work, we present the notion of alternating systems, recently introduced by S. Muñoz (Mun), which is a large class of functions on the real line that generalizes the Boole's map and allows us to make a wide analysis on certain properties such as robust transitivity and ergodicity. In order to show that, under certain conditions, alternating systems are ergodic with respect to the Lebesgue measure, we show, using the Folklore Theorem, that the induced transformation of an alternating system is ergodic.

## Keywords

Alternating systems. Robust transitivity. Ergodicity. Symbolic dynamics. Boole's map.

## Sumário

1	Introdução	<b>9</b>
2	Transitividade e ergodicidade	<b>12</b>
2.1	Resultados gerais	12
2.2	Aplicações no círculo	20
2.3	O shift unilateral	27
3	Sistemas alternantes	<b>30</b>
3.1	Sistemas alternantes: preliminares	30
3.2	A transformação induzida	37
4	Transitividade de Sistemas Alternantes	<b>41</b>
4.1	Átomo-expansividade	41
4.2	Transitividade robusta	48
5	Ergodicidade de Sistemas Alternantes	<b>59</b>
	Referências Bibliográficas	<b>63</b>