

3 Polímeros dielétricos

3.1 Princípios físicos

Polímeros dielétricos se encontram no grupo dos polímeros eletroativos eletrônicos, atuados por campos elétricos (seção 2.4). Os atuadores que utilizam esses materiais se baseiam no simples efeito capacitivo entre dois eletrodos flexíveis (por exemplo, graxas condutoras) depositados nas duas superfícies do polímero.

Polímeros com baixa rigidez elástica e grande constante elétrica podem ser usados para induzir grandes deformações quando submetidos a altos campos eletrostáticos. Eles podem ser representados por capacitores de placas paralelas e sua utilização sob campos elétricos da ordem de kV pode levar a altas deformações e forças significativas [Pelrine et al, 1998].

Quando uma diferença de potencial é aplicada entre os eletrodos depositados no polímero, uma atração eletrostática (força de Maxwell) entre os mesmos aparece devido ao surgimento de cargas opostas nas superfícies do dielétrico. Essa força eletrostática comprime o polímero, fazendo com que sua espessura diminua. Como há conservação de volume do material (coeficiente de *Poisson* dos elastômeros é próximo de 0,5), as outras dimensões livres do dielétrico expandem como mostra a Figura 14. Além disso, a repulsão eletrostática entre cargas de mesmo sinal em cada eletrodo contribui com a expansão lateral do polímero [Pelrine, Kornbluh, e Kofod, 2000].

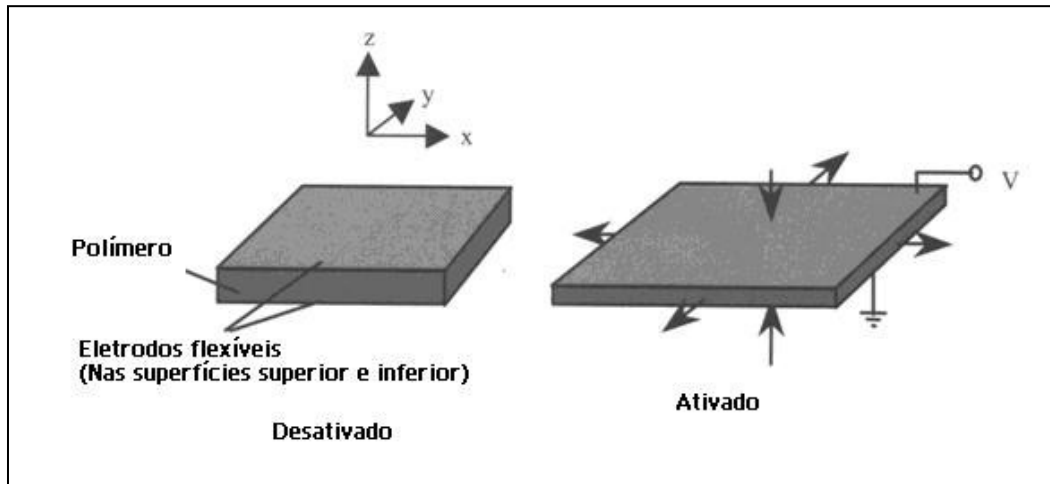


Figura 14: Princípio de operação de atuadores com polímeros dielétricos [Bar-Cohen, 2004].

Utilizando um modelo eletrostático simples, pode-se chegar à pressão efetiva dos eletrodos sobre o polímero (responsável pela deformação do material) como uma função da tensão aplicada. Essa pressão efetiva P , portanto será:

$$P = \epsilon_r \epsilon_0 \left(\frac{V}{z} \right)^2 \quad (3.1)$$

onde ϵ_r é a permissividade relativa do polímero (constante dielétrica), ϵ_0 é a permissividade do vácuo, V é a tensão elétrica aplicada e z é a espessura do polímero.

A deformação resultante do polímero dependerá das condições de contorno, das cargas aplicadas e do módulo de elasticidade do material, que não é linear para grandes deformações. Além disso, a constante dielétrica do material aumenta se o mesmo estiver pré-tensionado antes de ser aplicada a tensão elétrica (de 18 MV/m sem deformação até 218 MV/m depois de deformado 500% nas duas direções planas) [Kofod et al., 2001]. Portanto, um pré-tensionamento do material é necessário para que altas tensões possam ser aplicadas maximizando a atração entre os eletrodos. No entanto, esse pré-tensionamento é anisotrópico, tornando o módulo de elasticidade diferente nas direções planas. Com isso a modelagem geral para a deformação resultante do polímero não é simples.

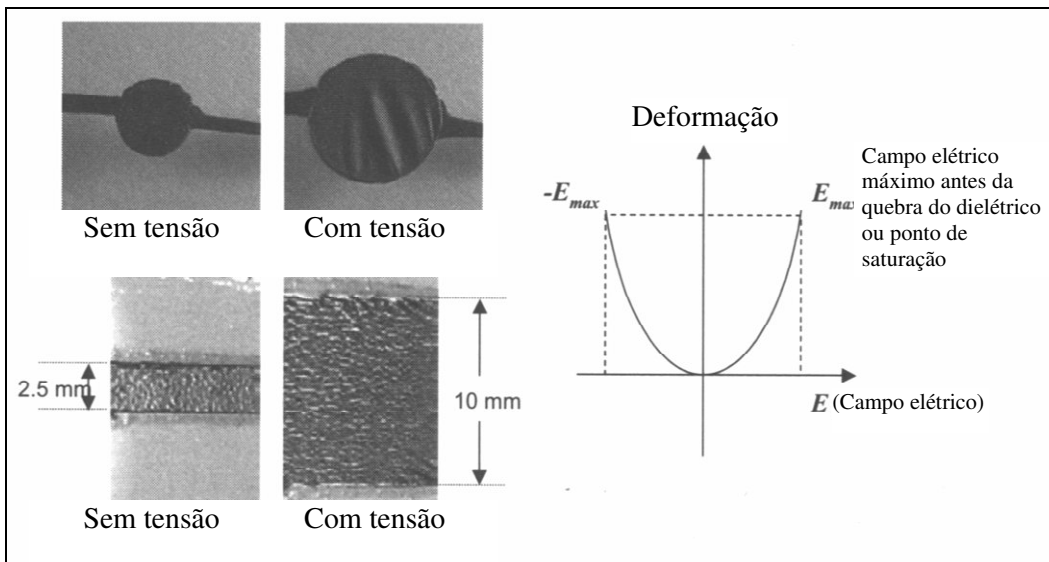


Figura 15: Na parte esquerda da figura, são mostradas as deformações circular (em cima) e linear (em baixo) do polímero antes e depois da sua ativação. A área escura corresponde aos eletrodos. O elastômero é transparente. Na parte direita encontra-se tipicamente a espessura ou deformação planar em resposta a um campo elétrico aplicado para um polímero sem cargas externas [Bar-Cohen, 2004].

Em seguida são apresentados alguns exemplos de atuadores desenvolvidos na literatura. A Figura 16 mostra um atuador com forma de diamante que contrai na direção X e estende na Y. Esse tipo de atuador pode atingir deformações de 36% em Y e 4% em X, e seu modo de operação se assemelha muito ao músculo humano [Wingert, 2000].

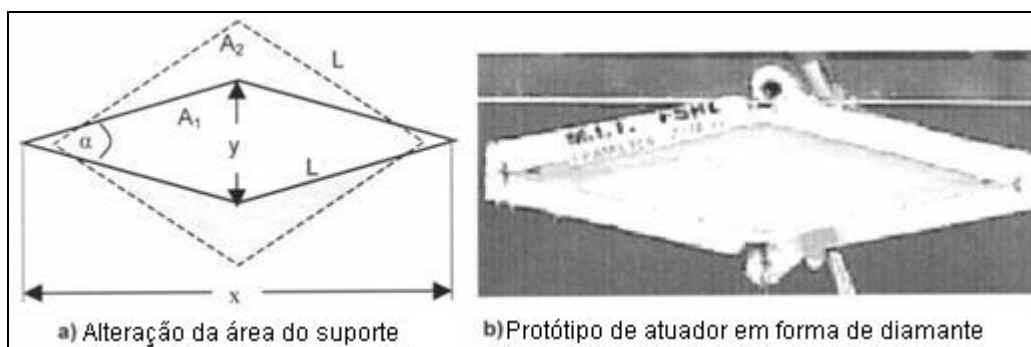


Figura 16: Atuador em forma de diamante [Wingert, 2000].

A figura 17 mostra um atuador que possui como estrutura principal de sustentação uma mola. Em torno dela foi enrolado o polímero com várias regiões pintadas com a graxa condutora de maneira que a ativação dessas áreas pudesse ser feita de forma independente entre elas. Assim partes específicas do polímero estariam deformadas, sendo possível portanto controlar a direção em que o atuador se curvará [Bar-Cohen, 2004].

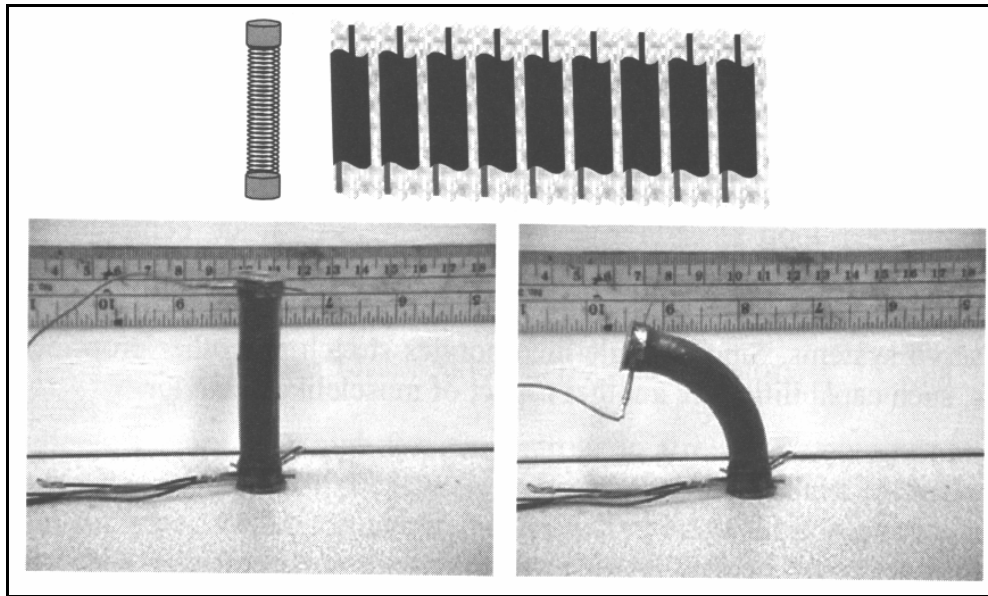


Figura 17: Atuador de dois graus de liberdade feito do polímero, com 9 regiões ativadas, enrolado numa mola, dobrando para a esquerda em resposta à ativação de algumas das regiões do polímero [Bar-Cohen, 2004].

O desenvolvimento de músculos artificiais a partir de polímeros dielétricos é uma área bastante incipiente no mundo e principalmente no Brasil. Grandes descobertas já foram feitas nessa área no que diz respeito à caracterização física e dinâmica do material. Já existem diversas aplicações para essa tecnologia, incluindo atuadores lineares, sensores, micro-posicionadores etc., mas o desafio continua sendo encontrar uma forma de utilizar esses atuadores de uma maneira mais prática para que um dia esta possa ser usada nos principais atuadores de uma prótese para deficientes e de manipuladores igualmente fortes aos atuais, com a vantagem de serem mais leves e de consumirem menor energia.

Novas áreas da engenharia podem contar com essa tecnologia, como a aeronáutica, onde as asas podem ser feitas de materiais maleáveis revestidos por polímeros dielétricos, que ao serem atuados mudariam a forma da asa dispensando a utilização de *flaps*. Conhecendo as equações matemáticas da força gerada pelo polímero em função da tensão aplicada, é possível desenvolver um sensor de baixo custo para altas tensões. Fibras musculares artificiais utilizando mini atuadores, do tipo diamante, em série, poderiam ser uma nova alternativa para as próteses humanas. Sensores de tato poderiam ser feitos através da detecção da variação da capacitância de uma matriz de micro-atuadores espalhados pela pele artificial implantada em pacientes com queimaduras graves cuja capacidade de regeneração da pele foi cessada devido a extensão da ferida, ou mesmo nas

próteses humanas de forma a se aproximar ainda mais das funcionalidades originais do membro perdido. Com o avanço dessa tecnologia, deve-se criar uma interface elétrica compatibilizando a potência dos sinais produzidos pelo corpo humano e a potência dos atuadores utilizados nas próteses, de forma a acabar com a necessidade dos deficientes de ter que carregar baterias junto com as próteses. Empresas estrangeiras já possuem dispositivos que bombeiam líquidos utilizando polímeros dielétricos e, pelo mesmo princípio, corações artificiais podem ser desenvolvidos bem como esôfagos ou quaisquer outras partes do corpo humano que se utilizam de movimentos peristálticos para transporte.

3.2 Modelagem de atuadores baseados em polímeros dielétricos

Foram estudadas analiticamente algumas configurações de atuadores. Dessas configurações, uma modelagem foi implementada via software e comparada com os resultados experimentais.

3.2.1 Capacitor Livre

Nesta hipótese, o polímero é revestido em ambos os lados com uma graxa condutora e suas extremidades encontram-se livres para expandir. Neste caso apenas a pressão, causada pela força eletrostática entre os condutores, é responsável pela deformação do polímero. Com isso tem-se:

$$\sigma_z = -P/2; \sigma_x = \sigma_y = P/2; \quad (3.2)$$

onde P é a pressão resultante da tensão elétrica aplicada entre os condutores e σ_x , σ_y e σ_z são as tensões atuantes no polímero nas direções x, y e z respectivamente, vide Figura 18. A tensão na direção z por sua vez, corresponde à componente da pressão responsável pela atração entre os condutores, e nas outras direções a força eletrostática atua com uma repulsão entre as cargas em cada condutor.

A pressão efetiva que está agindo sobre o polímero pode ser expressa da seguinte maneira:

$$P = e_r e_0 \left(\frac{V}{z} \right)^2 \quad (3.3)$$

onde e_r é a constante dielétrica relativa, e_0 é a permissividade no vácuo, V é a tensão aplicada e z é a espessura do polímero. Pela lei de Hooke, pode-se dizer que as deformações nas três direções serão:

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_x &= \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)] \\
 \varepsilon_y &= \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)] \\
 \varepsilon_z &= \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)]
 \end{aligned}
 \tag{3.4}$$

onde ε_x , ε_y e ε_z são as deformações do atuador e E e ν são o Módulo de Young e o coeficiente de Poisson do polímero, respectivamente. Substituindo os valores da equação (3.2), tem-se:

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_x = \varepsilon_y &= \frac{1}{E} \left[\frac{P}{2} - \nu \left(\frac{P}{2} - \frac{P}{2} \right) \right] = \frac{P}{2E} \\
 \varepsilon_z &= \frac{1}{E} \left[-\frac{P}{2} - \nu \left(\frac{P}{2} + \frac{P}{2} \right) \right] = -\frac{P}{2E} (1 + 2\nu)
 \end{aligned}
 \tag{3.5}$$

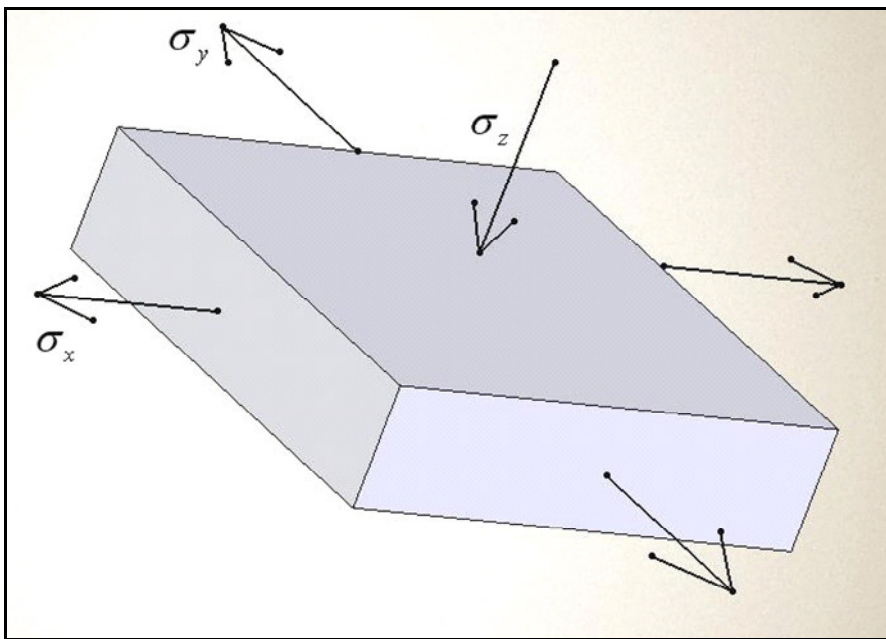


Figura 18: Esboço do polímero na configuração de capacitor livre.

Se considerarmos que a deformação é dada pela expressão $\varepsilon = \frac{l-l_0}{l_0}$, comumente usada na engenharia, erros de mais de 30% estariam sendo cometidos para $\varepsilon = 1$, que é a ordem de grandeza das deformações envolvidas nessas tecnologias. Logo a equação para deformação real foi utilizada e com isso tem-se:

$$\begin{aligned}
 x &= x_0 e^{P/2E} \\
 y &= y_0 e^{P/2E} \\
 z &= z_0 e^{\left(-P(1+2\nu)/2E\right)}
 \end{aligned}
 \tag{3.6}$$

onde x_0 , y_0 e z_0 são os comprimentos iniciais da área ativa do atuador.

3.2.2 Eletrodos Rígidos

A diferença entre esse caso e o anterior consiste no eletrodo utilizado. Enquanto que no exemplo anterior os eletrodos acompanhavam a deformação do polímero, neste caso os cálculos foram feitos para eletrodos rígidos. Como os eletrodos são colados no polímero, as deformações nas direções de x e y , são nulas, só havendo, portanto, deformações na espessura do elastômero, vide Figura 19.

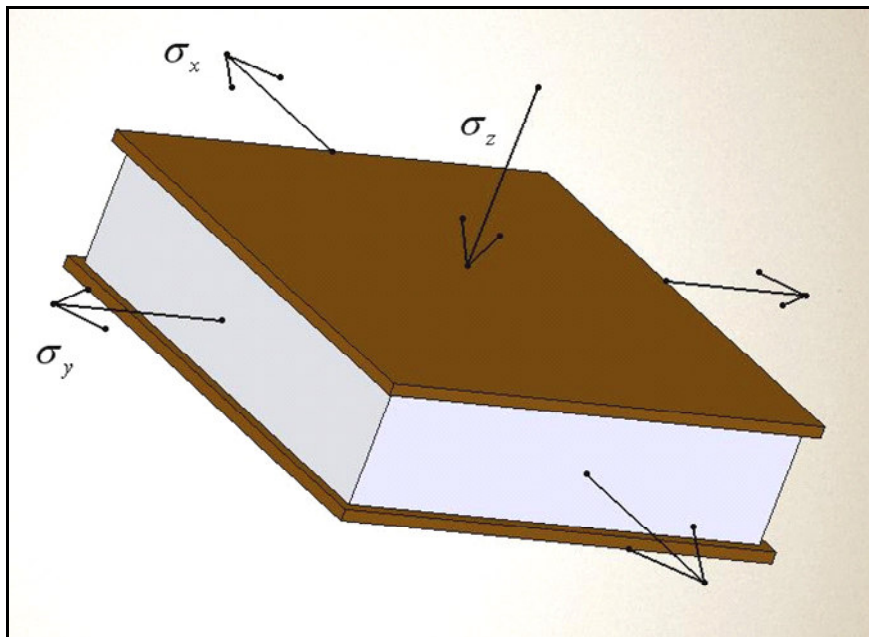


Figura 19: Esboço do polímero na configuração de capacitor com eletrodos rígidos.

Como as deformações ϵ_x e ϵ_y são nulas, tem-se:

$$\begin{aligned}\varepsilon_x = 0 & \therefore \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)] = 0 \therefore \sigma_x = \nu(\sigma_y + \sigma_z) \\ \varepsilon_y = 0 & \therefore \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)] = 0 \therefore \sigma_y = \nu(\sigma_x + \sigma_z)\end{aligned}\quad (3.7)$$

Resolvendo o sistema acima tem-se:

$$\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z \frac{\nu}{1-\nu} \quad (3.8)$$

Os eletrodos estão livres na direção de z (espessura) logo, se for desprezado o peso, tem-se:

$$\sigma_z = -P/2 \Rightarrow \sigma_x = \sigma_y = -\frac{P}{2} \frac{\nu}{1-\nu} \quad (3.9)$$

Podemos perceber que as tensões em x e y são compressivas (devido ao sinal negativo). Isso significa que os eletrodos precisam exercer forças nessas direções para mudar o sinal de σ_x e σ_y , que normalmente seriam iguais a $P/2$ mas neste caso devem ser $-\frac{P}{2} \frac{\nu}{1-\nu}$ para que $\varepsilon_x = \varepsilon_y = 0$.

A deformação em z é dada por:

$$\begin{aligned}\varepsilon_z &= \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)] = -\frac{P}{2E} \left(1 - \frac{2\nu^2}{1-\nu} \right) \\ \varepsilon_z &= -\frac{P}{2E} \frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{1-\nu}\end{aligned}\quad (3.10)$$

E assim tem-se:

$$z = z_0 e^{\varepsilon_z}, \quad x = x_0 \quad \text{e} \quad y = y_0 \quad (3.11)$$

Note que quando $\nu = 0,5$, tem-se $\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z$ e $\varepsilon_z = 0$, o que significa que o polímero se comporta como um fluido pressurizado uniformemente com pressão $P/2$, e o filme não muda de espessura, senão não conservaria o volume.

3.2.3 Atuador Retangular

Neste exemplo, ilustrado na Figura 20, o atuador é revestido com graxa condutora e preso a duas barras rígidas, e está livre para deformar tanto em y quanto em z , logo:

$$\sigma_z = -P/2, \quad \sigma_y = \frac{P}{2} + \frac{F_y}{xz} \quad (3.12)$$

A tensão em y possui duas componentes, uma respectiva à repulsão das cargas em cada eletrodo e outra causada por um peso F_y de uma massa pendurada na barra inferior da Figura 20.

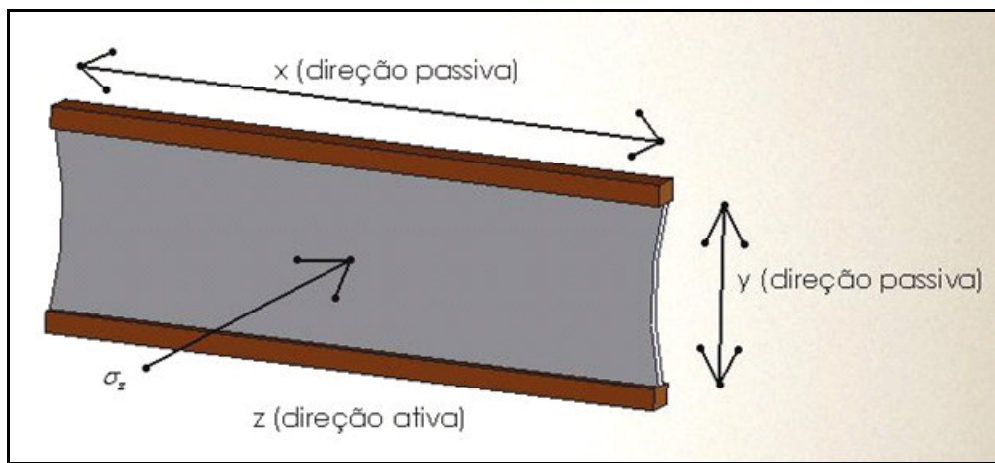


Figura 20: Esboço do polímero na configuração de atuador retangular.

Como a dimensão x é muito maior que em y , e sabendo que as extremidades ao longo da direção x estão engastadas nas barras, temos que $\varepsilon_x = 0$, logo:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)] = 0 \Rightarrow \sigma_x = \nu(\sigma_y + \sigma_z) = \nu \frac{F_y}{xz} \quad (3.13)$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)] = \frac{1}{E} \left[\frac{F_y}{xz} (1 - \nu^2) + \frac{P}{2} (1 + \nu) \right] \quad (3.14)$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)] = \frac{1}{E} \left\{ -\frac{P}{2} - \nu \left[\frac{P}{2} + \frac{F_y}{xz} (1 + \nu) \right] \right\} = -\frac{(1 + \nu)}{E} \left[\frac{P}{2} + \frac{F_y}{xz} \nu \right] \quad (3.15)$$

A partir da equação acima podemos isolar a força exercida pela massa, obtendo:

$$F_y = \frac{Exz}{1 - \nu^2} \varepsilon_y - \frac{P}{2} \frac{xz}{1 - \nu} \quad (3.16)$$

Sabendo-se que $z = z_0 e^{\varepsilon_z}$ e utilizando a Equação 3.15, pode-se implementar uma solução numérica para achar z . Em seguida, a deformação em y é obtida com a equação (3.14) e o comprimento final y pela equação $y = y_0 e^{\varepsilon_y}$.

3.2.4 Atuador Retangular Duplamente Engastado

Este exemplo será reproduzido em um dos experimentos da pesquisa. Ele é uma adaptação do caso anterior onde as duas extremidades ao longo da dimensão x estão engastadas como mostra a Figura 21. Para resolver o sistema de uma forma mais simples, sem precisar recorrer às técnicas de elementos finitos, assume-se que o polímero possui comprimento infinito na direção x . Assim, a deformação dessa direção, no ponto central, será nula. Como o polímero está engastado na direção y e foi pré-tensionado mecanicamente, a deformação $\varepsilon_y = 0$. Desta forma, pode-se assumir que o atuador está livre apenas para deformar na direção z , logo $\varepsilon_x = \varepsilon_y = 0$.

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)] = 0 \Rightarrow \sigma_x = \nu(\sigma_y + \sigma_z) \quad (3.17)$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)] = 0 \Rightarrow \sigma_y = \nu(\sigma_x + \sigma_z) \quad (3.18)$$

Substituindo a Equação (3.18) na Equação (3.17), e assumindo que $\sigma_z = -P/2$, tem-se que:

$$\sigma_x = -\frac{\nu P (1 + \nu)}{2 (1 - \nu^2)} \quad (3.19)$$

$$\sigma_y = -\frac{\nu P (1 + \nu)}{2 (1 - \nu^2)} \quad (3.20)$$

Assim como no exemplo da seção 3.2.2, pode-se ver que as tensões nas direções x e y são compressivas, como deveriam ser, pois foi assumido que nessas direções não haveriam deformações.

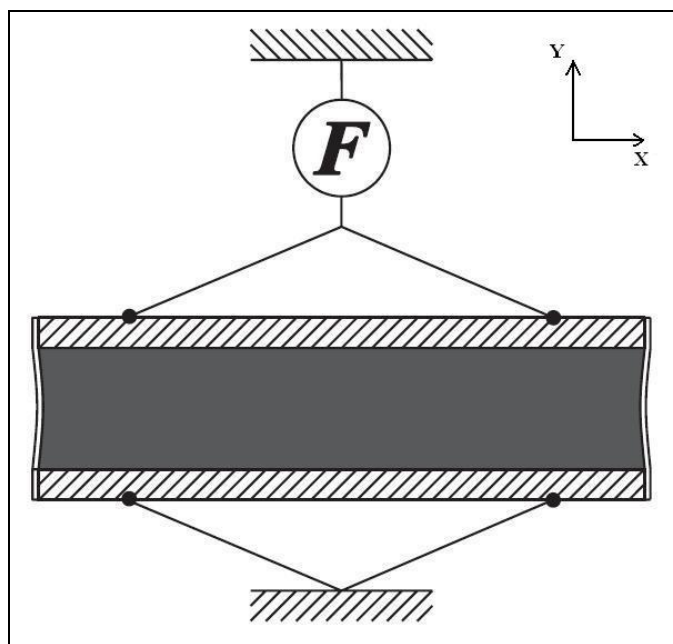


Figura 21: Esboço da montagem do experimento de teste da força de bloqueio do atuador [Kofod, 2001].

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_y + \sigma_x)] = \frac{P}{E} \left[\frac{\nu^2 (1 + \nu)}{1 - \nu^2} - \frac{1}{2} \right] \quad (3.21)$$

Se for considerado o coeficiente de *Poisson* como 0,5, de acordo com a equação 3.21, tem-se $\varepsilon_z = 0$, como deveria ser, pois foi assumido que as deformações nas outras direções eram nulas e com isso se o material é incompressível a deformação em z também deve ser nula. Para que haja deformações durante as simulações, admitiu-se que o coeficiente de *Poisson* um pouco menor que 0,5 de forma a considerar que o material é compressível e, mesmo não variando as dimensões 'x' e 'y', poderá haver uma deformação em 'z'. Comparando os resultados experimentais com as simulações encontrou-se um valor de 0,495 para o coeficiente de *Poisson*. Esse valor muito próximo de 0,5 mostra que as suposições feitas são aceitáveis e que em um futuro próximo estudos poderão aferir um valor mais acurado deste parâmetro.

Outra possibilidade de modelo para curva de tensão mecânica e deformação do polímero pode ser obtida através da formulação de Ogden [Goulbourne, 2005]. Esta se adapta melhor as altas deformações dos materiais hiper-elásticos. Sua forma (para um modelo de segunda ordem) é mostrada na Equação 3.22:

$$\sigma = \mu_1 \left(\lambda^{\alpha_1} - \frac{1}{\lambda^{\alpha_1/2}} \right) + \mu_2 \left(\lambda^{\alpha_2} - \frac{1}{\lambda^{\alpha_2/2}} \right) \quad (3.22)$$

Os parâmetros μ_1 , μ_2 , α_1 e α_2 podem ser ajustados, por exemplo, pelo método dos mínimos quadrados.

3.3 Aplicação dos modelos desenvolvidos no controle do sistema

Para controlar a força exercida pelo atuador da seção 3.2.4, foi implementado via *software* um controlador padrão PID e ajustou-se os ganhos de forma a obter-se a “melhor” resposta possível (resposta estável, convergência o mais rápido possível e com *overshoot* máximo de 1%). A Figura 22 mostra a malha de controle representativa do sistema.

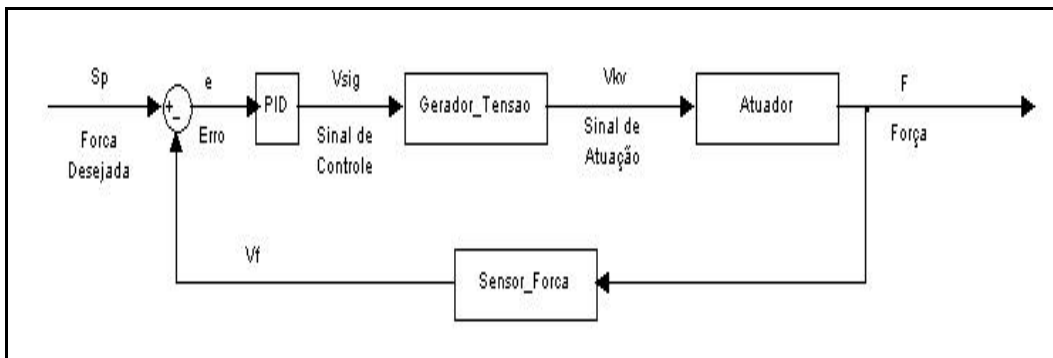


Figura 22: Diagrama de blocos do sistema de controle de força do atuador polimérico.

Desse diagrama podemos estabelecer uma relação entre o valor desejado (Sp) e a saída do sistema (F).

$$e = Sp - Vf \quad (3.23)$$

$$V_{sig} = K_p \left(e + K_d \dot{e} + \int \frac{e}{K_i} \right) \quad (3.24)$$

$$V_{kv} = V_{sig} C_{10} + C_{11} \quad (3.25)$$

$$F = AP = \frac{x_0 z e_r e_0 V_{kv}^2}{z^2} = \frac{x_0 e_r e_0 V_{kv}^2}{z} \quad (3.26)$$

$$V_f = C_2 F \quad (3.27)$$

Com essas equações chega-se ao seguinte resultado:

$$F = \frac{Cte}{z} \left(K_p \left((Sp - C_2 F) + K_d \frac{d}{dt} (Sp - C_2 F) + \frac{1}{K_i} \int (Sp - C_2 F) dt \right) C_{10} + C_{11} \right)^2 \quad (3.28)$$

onde $Cte = x_0 e_r e_0$, $C_{10} \approx 1071$, $C_{11} \approx 210$, $C_2 = \frac{3 \times 10^{-3}}{22,24} V/N \pm 0,03\% FS$, x_0 é a largura da região ativa do atuador, e_r é a constante dielétrica relativa do polímero e e_0 é a constante de permissividade no vácuo. As constantes C_{10} e C_{11} são valores estimados a partir dos componentes descritos no próximo capítulo, e dependem não só da incerteza do amplificador de tensão usado no atuador, mas também das incertezas dos resistores, amplificadores operacionais e outros componentes utilizados na implementação do circuito de alta tensão. Esses valores foram encontrados através de um ajuste de parâmetros de um polinômio de primeiro grau com pontos aquisitados experimentalmente.

As Equações 3.26 e 3.28 mostram as não-linearidades do sistema, que podem prejudicar o desempenho do controlador. Analisando a Equação 3.26, nota-se que a força exercida pelo atuador é proporcional não só ao quadrado da tensão aplicada, mas também ao inverso da espessura do polímero. Isso torna o sistema mais sensível nas tensões próximas à tensão limite do atuador (tensão de quebra do dielétrico), em comparação ao comportamento do mesmo quando submetido a baixas tensões. Ao ajustar o controlador para uma resposta rápida e estável do sistema para altos valores desejados de força, provavelmente para baixos valores, o sistema será instável ou oscilará com maiores amplitudes. Deve-se levar em consideração que devido à forma em que o sistema é apresentado na seção 3.2.4, o atuador exercerá maior força sobre o sensor para baixas tensões elétricas aplicadas, pois o polímero se encontra tracionado na bancada de teste e quanto maior a tensão aplicada no polímero maior é a sua tendência de expandir e consequentemente menor será a força medida pelo sensor.

Para compensar as não-linearidades descritas, é proposto ajustar os ganhos do controlador de acordo com o estado (F,z) do sistema. A malha de controle resultante é mostrada na Figura 23.

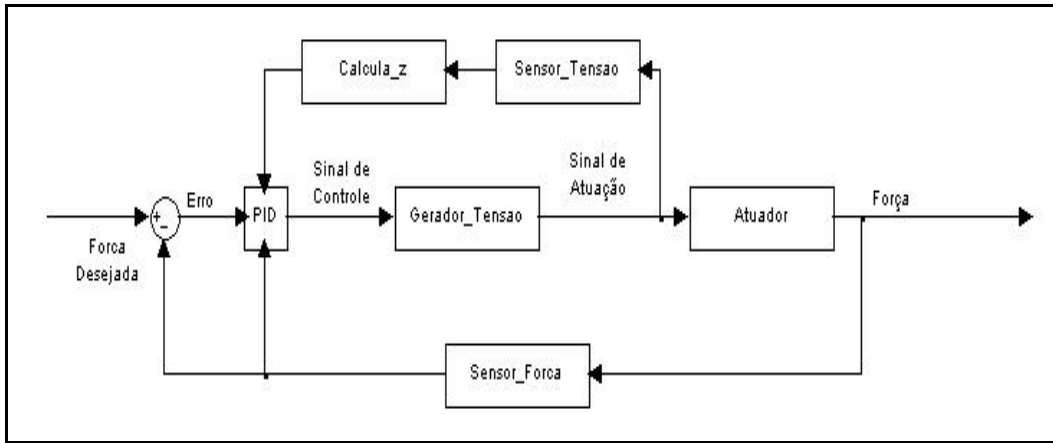


Figura 23: Malha de controle do sistema com a utilização de um controlador PID com ganhos variáveis.

O ajuste proposto consiste em multiplicar o ganho proporcional do controlador (e conseqüentemente a tensão de atuação do polímero) por um fator de ajuste de $\sqrt{\frac{z}{F}}$, onde a força F é a medida pela célula de carga e a espessura z é encontrada através do modelo matemático desenvolvido. Desta forma, obteríamos uma relação linear entre a força exercida pelo polímero e a sua tensão de atuação, como mostra a Equação 3.29.

$$F = \frac{x_0 e_r e_0 (V_{kv} \sqrt{\frac{z}{F}})^2}{z} = \frac{x_0 e_r e_0 V_{kv}^2 z}{z F} \Rightarrow F^2 = x_0 e_r e_0 V_{kv}^2 \therefore F = V_{kv} \sqrt{x_0 e_r e_0} \quad (3.29)$$

No entanto, o sistema (amplificador) geradora de alta tensão fornece uma saída do tipo $V_{kv} = C_{10} V_{sig} + C_{11}$, onde V_{sig} é a saída do controlador. Multiplicando-se o ganho proporcional do controlador pelo fator de ajuste mencionado acima, multiplica-se apenas a primeira parcela desta equação. Elevando-se essa tensão à segunda potência, tem-se não só a soma de três termos, mas também um termo com dependência da raiz quadrada da razão da espessura pela força, como mostra a Equação 3.30:

$$V_{kv} = C_{10} K_p eq \sqrt{\frac{z}{F}} + C_{11} \Rightarrow V_{kv}^2 = (C_{10} K_p eq)^2 \frac{z}{F} + C_{11}^2 + 2C_{11} C_{10} K_p eq \sqrt{\frac{z}{F}} \quad (3.30)$$

onde $e_q = \left(e + K_d \dot{e} + \int \frac{e}{K_i} \right)$. Desta forma, a linearização do sistema proposta acima não ocorrerá. A solução encontrada para isso, é substituir a saída do controlador de uma forma que a alta tensão sobre o músculo artificial seja o produto do sinal de entrada da caixa geradora de alta tensão por uma constante, sem a soma de nenhuma outra parcela, conforme a seqüência de equações abaixo.

$$\begin{aligned}
 V_{Nsig} &= \frac{\left(V_{sig} - \frac{C_{11}}{1000} \right)}{\frac{C_{10}}{1000}} \Rightarrow V_{kv} = C_{10} V_{Nsig} + C_{11} \Rightarrow \\
 & \Rightarrow V_{kv} = \frac{\left(V_{sig} - \frac{C_{11}}{1000} \right)}{\frac{C_{10}}{1000}} C_{10} + C_{11} = 1000 V_{sig}
 \end{aligned} \tag{3.31}$$

Substituindo a Equação 3.31 em 3.29 obtém-se a equação do sistema linearizado, dada por

$$F = 1000 \left[K_p \left((Sp - C_2 F) + K_d \frac{d}{dt} (Sp - C_2 F) + \int \left[\frac{(Sp - C_2 F)}{K_i} \right] \right) \right] \sqrt{x_0 e_r e_0} \tag{3.32}$$