6
Implementação de camadas perfeitamente casadas

Um dos maiores desafios dos métodos numéricos discretos, tal como o método dos volumes finitos (FVM), tem sido a solução eficiente e precisa de campos eletromagnéticos em domínios onde a região de interesse é ilimitada em uma ou mais direções e apresenta perdas baixas. Em alguns casos, para tornar possível a simulação numérica de tais problemas, uma condição de contorno absorvente (ABC) deve ser introduzida nas fronteiras computacionais para simular a condição de radiação de Sommerfeld no infinito. Através da utilização de ABCs [46], reflexões espúrias oriundas das fronteiras do domínio são minimizadas, assegurando que a solução não seja contaminada dentro da região de interesse. Em regiões com perdas altas, o domínio computacional pode ser truncado por condutores perfeitos, tendo em vista que as reflexões nas paredes condutoras são pequenas e não contaminam a solução do problema.

A camada perfeitamente casada (*Perfectly Matched Layer* - PML) é um tipo de ABC muito eficiente que foi introduzida na literatura em 1994 por Berenger [56]. Em seu trabalho pioneiro, Berenger introduziu graus de liberdade às equações de Maxwell, originados de uma formulação de campos-decompostos (*split-field formulation*), onde cada componente de campo é dividida em duas parcelas. Desde então, a PML tem sido bastante estudada, mostrando desempenho superior ao de outras ABCs desenvolvidas anteriormente.

No mesmo ano, uma formulação alternativa para a teoria das PMLs foi apresentada por Chew e Weedon em [57], mostrando que a PML, no domínio da freqüência, poderia ser relacionada a uma expansão complexa das coordenadas espaciais. A principal vantagem da formulação da PML via espaço de coordenadas complexas é a facilidade na manipulação matemática das equações, simplificando o entendimento do comportamento da PML e propiciando o mapeamento da PML nos sistemas de coordenadas cilíndricas e esféricas.

Uma terceira formulação da PML, conhecida como PML anisotrópica, foi derivada por Sacks et al. em [58]. Essa formulação é conveniente, pois ao invés de modificar as equações de Maxwell, altera as relações constitutivas

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0321246/CA

dentro da região da PML. Através da utilização de tensores diagonais para descrever a permeabilidade e a permissividade da PML, assegura-se que ondas planas sejam absorvidas independente do ângulo de incidência, polarização ou freqüência.

Em [59], Teixeira e Chew, derivaram tensores constitutivos (em coordenadas cartesianas, cilíndricas e esféricas) para a PML anisotrópica a partir das equações de Maxwell no espaço complexo. A relação entre os campos da PML anisotrópica e da PML no espaço complexo é elucidada através da apresentação das equações de mapeamento pertinentes.

As camadas perfeitamente casadas (PMLs) têm se mostrado uma condição de contorno absorvente muito eficiente em simulações por diferenças finitas no domínio do tempo (FDTD) [46]. Entretanto, diferentes autores têm relatado na literatura que a implementação da PML em métodos no domínio da freqüência acarreta no aumento do número de condição da matriz do sistema [60]– [62].

Na análise de problemas de larga escala é essencial a utilização de métodos iterativos na solução do sistema de equações lineares para reduzir tempo de processamento e armazenamento em memória. Em geral, a convergência dos métodos iterativos torna-se mais pobre à medida que o número de condição da matriz do sistema aumenta. Em alguns casos, a convergência não é obtida.

Neste capítulo será feita uma breve investigação das limitações do uso de PMLs no FVM no domínio da freqüência. O objetivo deste capítulo é apenas incorporar a PML à grade cilíndrica do FVM e verificar a degradação da convergência dos métodos iterativos utilizados na solução dos lineares resultantes da discretização das Equações de Maxwell. Não é objetivo desta tese buscar soluções que viabilizem a utilização de PMLs em problemas de larga escala. Devido à faixa de freqüências de operação das ferramentas LWD e às condutividades do meio encontradas na prática, as reflexões nas fronteiras do domínio não contaminam a solução dentro da região de interesse. Desta forma, a análise numérica 3D apresentada nos capítulos anteriores não requer a utilização de PMLs nas fronteiras do domínio computacional.

6.1 Implementação de PML em grades cilíndricas do FVM

A PML cilíndrica incorporada à grade computacional do FVM segue a formulação derivada em [59]. Neste tipo de PML, os parâmetros constitutivos

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0321246/CA

da PML são caracterizados por tensores diagonais dados por:

$$\bar{\bar{\epsilon}} = \epsilon \bar{\Lambda}_{(\rho,\varphi,z)} \tag{6-1}$$

$$\bar{\bar{\mu}} = \mu \bar{\Lambda}_{(\rho,\varphi,z)} \tag{6-2}$$

com

$$\bar{\Lambda}_{(\rho,\varphi,z)} = \begin{bmatrix} \frac{\tilde{\rho} s_z}{\rho s_\rho} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\rho s_z s_\rho}{\tilde{\rho}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\tilde{\rho} s_\rho}{\rho s_z} \end{bmatrix} \tag{6-3}$$

onde s_ρ e s_z são as variáveis complexas de expansão definidas por [63]:

$$s_\rho(\rho) = k_\rho(\rho) + i\frac{\sigma_\rho(\rho)}{\omega\epsilon} \tag{6-4}$$

$$s_z(z) = k_z(z) + i\frac{\sigma_z(z)}{\omega\epsilon} \tag{6-5}$$

e $\tilde{\rho}$ é uma continuação analítica da variável espacial ρ para o domínio complexo, dada por:

$$\tilde{\rho} = \int_0^\rho s_\rho(\rho')d\rho' = \int_0^\rho k_\rho(\rho') + i\frac{\sigma_\rho(\rho')}{\omega\epsilon} \tag{6-6}$$

Nas equações acima, k_ρ, k_z (parte real da variável de expansão), σ_ρ e σ_z (condutividade da PML) são funções apenas da posição. Os valores ótimos para k_ρ, k_z, σ_ρ e σ_z são dependentes do problema. Em geral, a melhor escolha destes parâmetros depende da discretização espacial do domínio, da permissividade e condutividade do meio e do número de células utilizadas na PML. A formulação detalhada da teoria das PMLs via espaço de coordenadas complexas pode ser encontrada em [57].

Nas seções seguintes, investiga-se a implementação da PML na grade cilíndrica do FVM. Na subseção 6.1.1, considera-se um problema cilíndrico bidimensional (2D). Na subseção 6.1.2, considera-se um problema tridimensional (3D).

6.1.1 Problemas bidimensionais

Como primeiro exemplo, considerou-se uma região (sem perdas) interior a duas superfícies cilíndricas metálicas, com o eixo coincidente com o eixo dos z, $\rho = \rho_1$ e $\rho = \rho_2$, respectivamente. Como a região é ilimitada em z, para desenvolvimento do modelo numérico, a região será terminada em $z = z_1$ e

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0321246/CA

$z = z_2$ por camadas de PML. A figura 6.1 ilustra a geometria do problema.

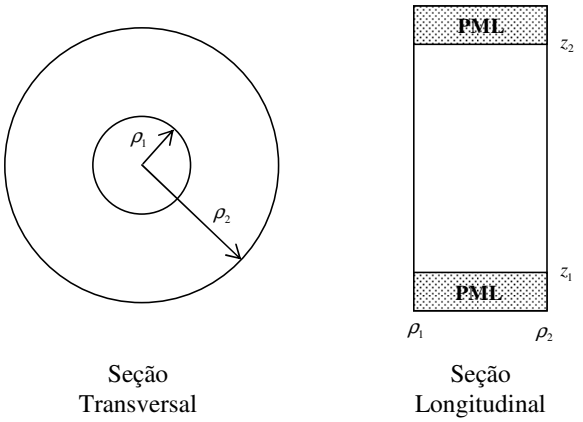

Figura 6.1: Geometria do problema bidimensional para aplicação de PML.

O domínio computacional é discretizado utilizando uma grade $(N_\rho, N_z) = (50, 300)$. O cilíndro interno tem raio igual a 0,1016 m. O tamanho das células é uniforme com $\Delta\rho = 2,2$ m e $\Delta z = 5,0$ m. A freqüência de operação é 2 MHz. A fonte está localizada na célula $(N_\rho, N_z) = (10, 150)$. O campo é amostrado em ρ=85,1 m. Em todos os exemplos considerados neste capítulo, o sistema linear resultante da discretização das equações de Maxwell é o método dos gradientes biconjugados estabalilizados (Bi-CGStab). Quatro camadas de PML são incorporadas ao domínio, com a parte real da variável de expansão ($k_\rho e k_z$) igual a 1. O perfil polinomial de escalonamento adotado para a condutividade da PML é dado por:

$$\sigma_z(z) = (z/d)^m \sigma_z^{max} \tag{6-7}$$

onde d é a espessura da PML. O valor de σ_z^{max} é calculado com base em um coeficiente de reflexão teórico Γ igual a 10^{-6} através da seguinte expressão:

$$\sigma_z^{max} = \frac{(m+1)\ln\Gamma}{2\eta\pi\epsilon_r d} \tag{6-8}$$

onde η e ϵ_r são a impedância característica e a permissividade relativa do meio, respectivamente e m é o grau do polinômio. A figura 6.2 mostra a distribuição do campo elétrico ao longo da direção longitudinal. Observa-se que a escolha de m=2 conduz a uma solução bem próxima da solução analítica.

A figura 6.3 ilustra o coeficiente de reflexão numérico em função do coeficiente de reflexão teórico da PML para quatro valores de grau do polinômio de escalonamento. Novamente, o domínio em z é terminado por quatro camadas de PML. O coeficiente de reflexão numérico é calculado a partir da taxa de onda estacionária e o coeficiente de reflexão teórico é definido por:

$$\Gamma(\theta) = e^{-2\eta d\cos\theta \int_0^d \sigma_z(z)dz} \tag{6-9}$$

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0321246/CA

onde θ é o ângulo de incidência da onda. Neste exemplo, considera-se incidência normal.

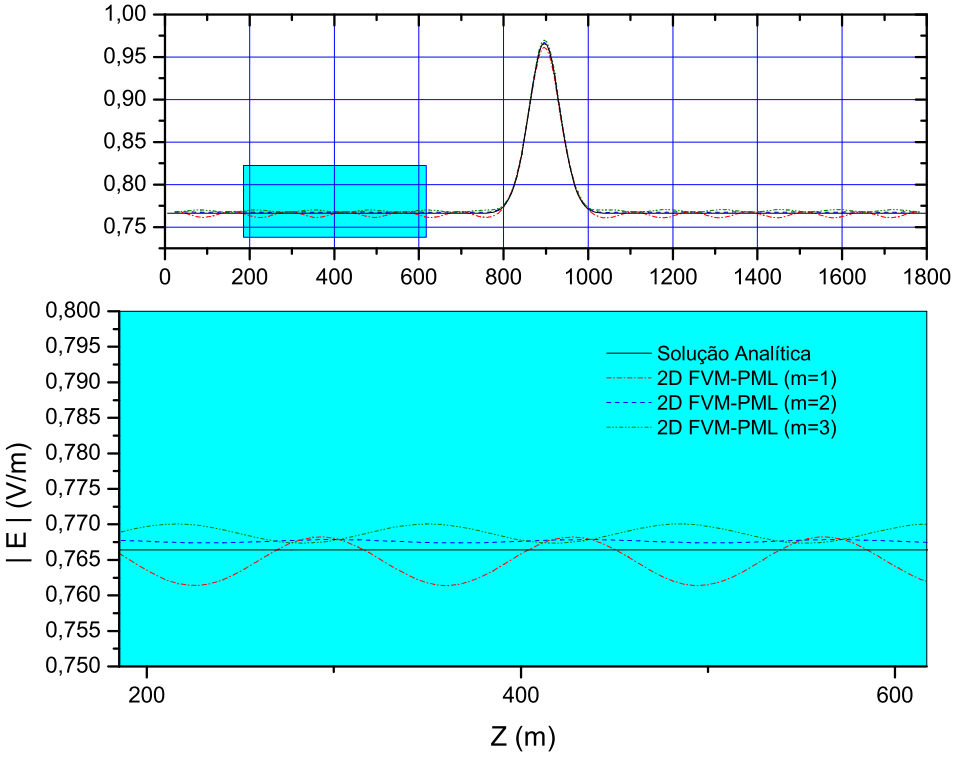

Figura 6.2: Distribuição do campo elétrico ao longo da direção logitudinal. Região cilíndrica sem perdas. O domínio em z é terminado por 4 camadas de PML.

A partir dos resultados da figura 6.3 observa-se que a redução do coeficiente de reflexão teórico não implica em redução de mesma ordem de grandeza do coeficiente de reflexão numérico. Se o coeficiente de reflexão teórico é grande, a reflexão predominante é devida à reflexão na superfície condutora que termina a PML. Entretanto, se o coeficiente de reflexão teórico é pequeno, o erro devido a aproximação numérica predomina. Nota-se também que, neste exemplo, valores de m=2 e m=3 correspondem aos coeficientes de reflexão numéricos menores.

A figura 6.4 mostra o coeficiente de reflexão numérico em função do coeficiente de reflexão teórico da PML para quatro espessuras de PML diferentes. Neste exemplo, o grau do polinômio adotado é 2. Como esperado, à medida que o número de camadas da PML aumenta, o coeficiente de reflexão numérico diminui.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0321246/CA

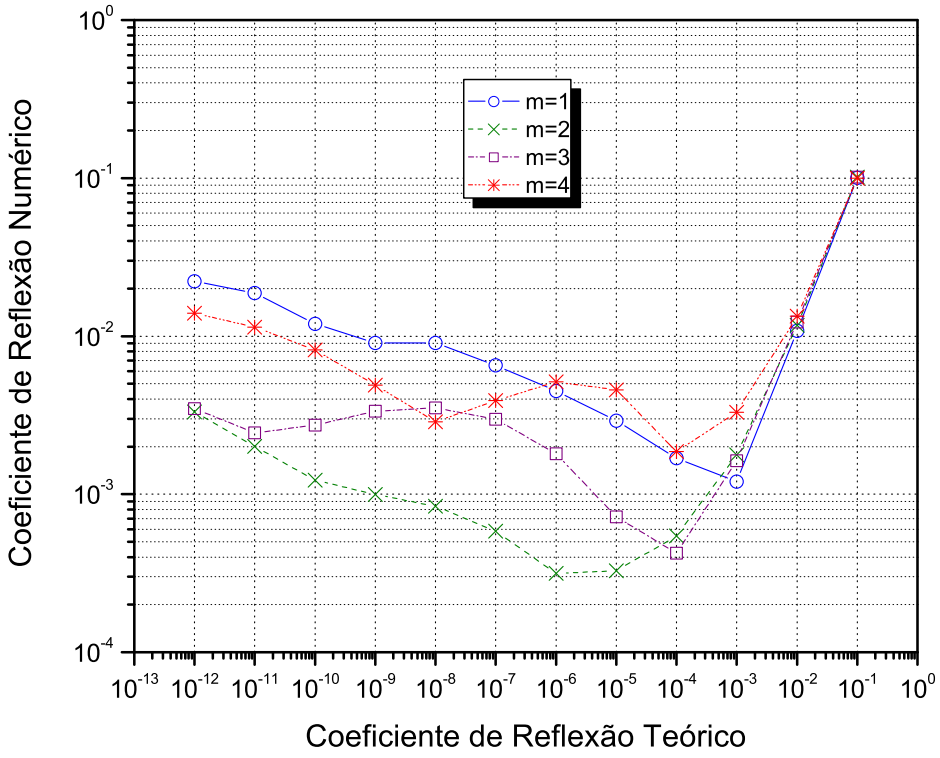

Figura 6.3: Coeficiente de reflexão numérico versus coeficiente de reflexão teórico, para m=1, 2, 3 e 4.

No segundo exemplo analisado, mantém-se a geometria do exemplo anterior, mas considera-se uma região cilíndrica com perdas. A discretização utiliza uma grade computacional com $(N_\rho, N_z) = (50, 20)$ células. O tamanho do domínio na direção longitudinal representa uma constante de penetração, δ, a partir da posição da fonte. O tamanho das células é uniforme com $\Delta\rho = 2,2$ m e $\Delta z = \delta/10$ m. A freqüência de operação é 2 MHz. A fonte está localizada na célula $(N_\rho, N_z) = (3, 60)$. O campo é amostrado em ρ=57,3 m. A condutividade do meio é igual a 10^{-4} S/m. O domínio computacional incorpora quatro camadas de PML com a parte real da variável de expansão ($k_\rho e k_z$) igual a 1. O grau do polinômio adotado é 2. O coeficiente de reflexão teórico é igual a 10^{-6}. A figura 6.5 mostra a distribuição do campo elétrico ao longo da direção longitudinal. As discrepâncias entre a solução analítica e a soluções FVM com PML e FVM sem PML estão listadas nas tabelas 6.1 e 6.2, respectivamente. Para que as discrepâncias entre a solução analítica e a solução FVM sem PML seja semelhante as discrepâncias entre a solução analítica e a solução FVM com PML é necessário uma grade com $(N_\rho, N_z) = (50, 120)$, o que representa um aumento de 83% no número de células na direção z. Observa-se que na

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0321246/CA

região de campo máximo, as discrepâncias entre solução analítica e a solução FVM sem PML atingem 20%, enquanto que as discrepâncias entre a solução analítica e a solução FVM com PML são menores que 0,4%.

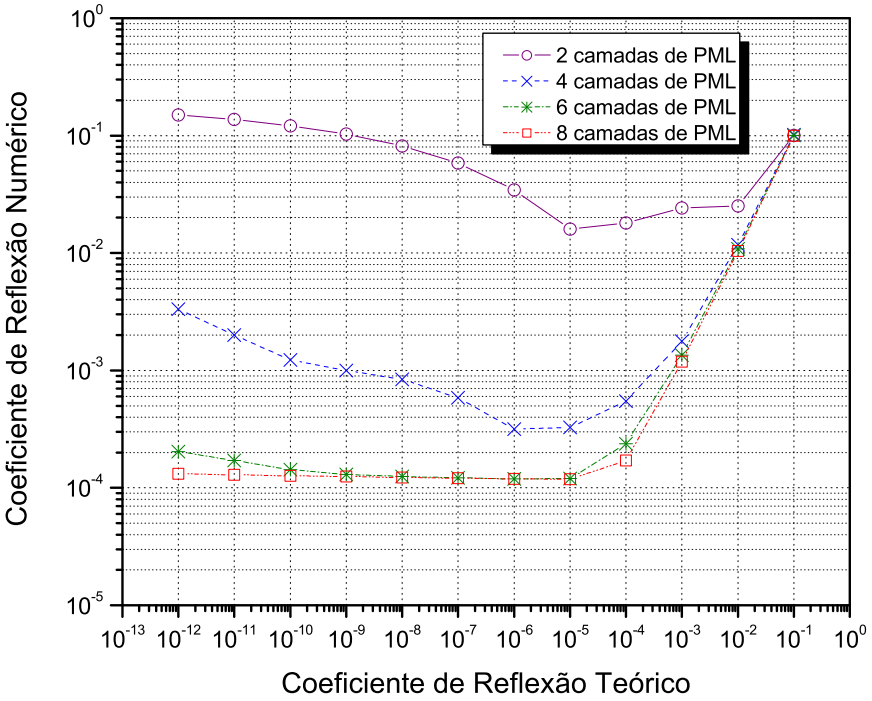

Figura 6.4: Coeficiente de refexão numérico versus coeficiente de refexão teórico, para 2, 4, 6 e 8 camadas de PML.

Tabela 6.1: Valores de $|E|$ em cinco pontos de observação. O domínio em z é terminado por PML.

Ponto de Observação	Sol. Analítica $\|E\|$ (V/m)	2D FVM-PML $\|E\|$ (V/m)	Discrepância (%)
z=304 m	0,02611	0,02603	0,306
z=309 m	0,02714	0,02715	0,037
z=320 m	0,02714	0,02722	0,295
z=325 m	0,02611	0,02617	0,230
z=330 m	0,02451	0,02455	0,163

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0321246/CA

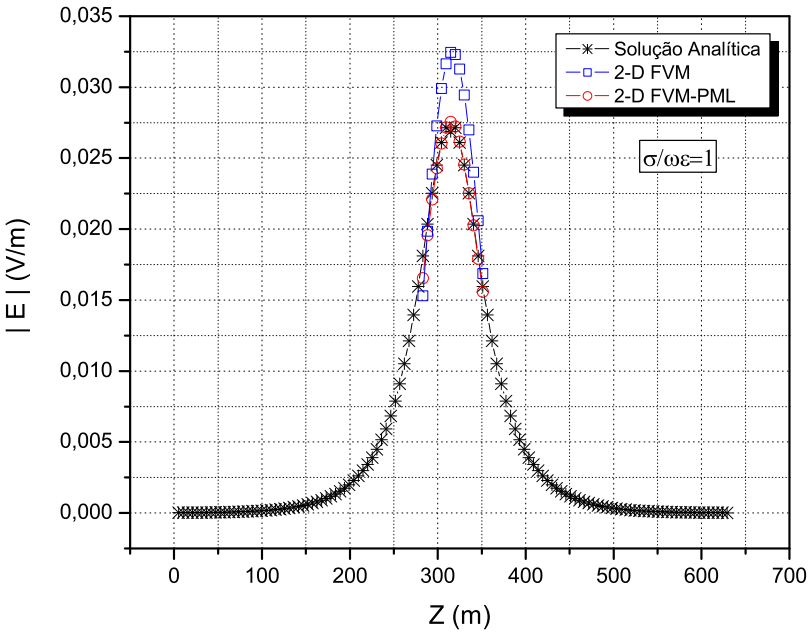

Figura 6.5: Distribuição do campo elétrico ao longo da direção logitudinal. Região cilíndrica com perdas.

Tabela 6.2: Valores de $|E|$ em cinco pontos de observação. O domínio em z é terminado por condutor elétrico perfeito.

Ponto de Observação	Sol. Analítica $\|E\|$ (V/m)	2D FVM $\|E\|$ (V/m)	Discrepância (%)
z=304 m	0,02611	0,02990	14,515
z=309 m	0,02714	0,03165	16,617
z=320 m	0,02714	0,03231	19,049
z=325 m	0,02611	0,03127	19,762
z=330 m	0,02451	0,02946	20,196

6.1.2 Problemas tridimensionais

Para investigar a implementação de PMLs em problemas 3D utilizou-se a mesma geometria do problema bidimensional (figura 6.1), mas a formulação por campos utilizada na a solução do problema é tridimensional. Inicialmente, discretiza-se o domínio computacional utilizando uma grade $(N_\rho, N_\varphi, N_z) = (50, 4, 200)$, totalizando 40.000 células. O tamanho das células é uniforme com $\Delta\rho = 5$ cm e $\Delta z = 7,5$ cm. A condutividade do meio é igual a 10^{-4} S/m. O campo é amostrado em ρ=1,4 m. A freqüência de operação é 200 MHz. Quatro

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0321246/CA

camadas de PML são incorporadas ao domínio, com a parte real da variável de expansão ($k_\rho e k_z$) igual a 1. O grau do polinômio é igual a 2. O coeficiente de reflexão teórico é igual a 10^{-5}. Esta discretização resulta em um sistema matricial esparso não-Hermitiano com 118.004 incógnitas (1.522.132 elementos não nulos na matriz). A figura 6.6 mostra a distribuição do campo elétrico ao longo da direção longitudinal. O método iterativo Bi-CGStab convergiu após 4771 iterações, com tempo de processamento de 52 minutos, para a solução sem PML. Para a solução com PML, entretanto, o número de iterações necessário para convergência aumentou para 22.428, com tempo de processamento de 4 horas e 13 minutos. Em seguida, com a finalidade de observar a convergência do método, aumentou-se o domínio para $(N_\rho, N_\varphi, N_z) = (50, 10, 200)$, totalizando 100.000 células. Verifica-se que, quando a solução por FVM com PML foi utilizada, o método iterativo não convergiu após 70.000 iterações. Tal limitação restringe a utilização de PML à problemas bidimensionais no domínio da freqüência.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0321246/CA

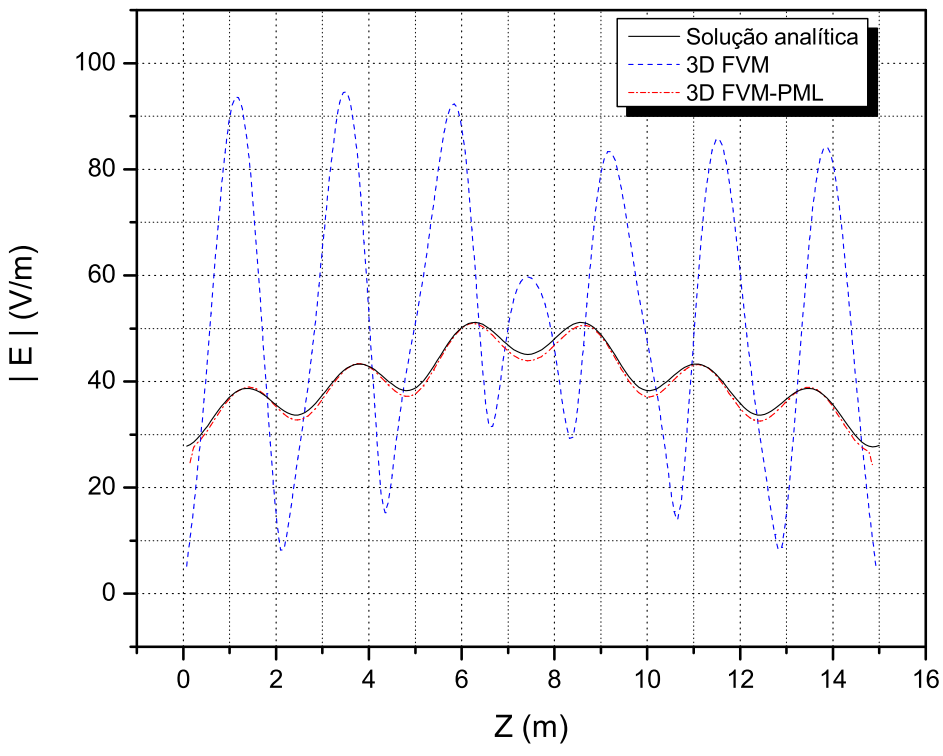

Figura 6.6: Distribuição do campo elétrico ao longo da direção longitudinal. Região cilíndrica com perdas.