

4

Método dos volumes finitos em meios anisotrópicos

4.1

Introdução

A detecção de anisotropia elétrica nas formações geológicas é um problema que tem recebido considerável atenção dos geofísicos nas últimas décadas. A motivação do estudo vai desde a investigação de reservatórios de água até a exploração de hidrocarbonetos [17, 19]. Geologicamente, a anisotropia elétrica no solo pode ser causada por diferentes mecanismos. Como exemplo de um destes mecanismos, podem-se citar as infiltrações de água salgada sofridas por formações fraturadas durante uma perfuração marítima. Neste caso particular, a formação apresentará condutividades mais altas na direção paralela ao plano da fratura do que na direção perpendicular [20].

Alguns modelos computacionais existentes na literatura, por simplicidade, desconsideram a presença de anisotropia no meio, tendo em vista a dificuldade de determinar numericamente o comportamento dos campos eletromagnéticos em meios anisotrópicos e o aumento do custo computacional em comparação ao caso isotrópico. Entretanto, a presença de anisotropia elétrica nas formações geológicas tem sido considerada uma fonte significativa de erros na análise numérica da resposta dos sensores eletromagnéticos de prospecção petrolífera [22, 26, 27, 31, 32].

Este capítulo apresenta um modelo computacional por volumes finitos para estudar a resposta elétrica de sensores LWD em ambientes tridimensionais (3D) anisotrópicos. O modelo anisotrópico é uma extensão direta do modelo isotrópico desenvolvido no Capítulo 3. De forma semelhante, um esquema de grades entrelaçadas em coordenadas cilíndricas é utilizado para discretizar o domínio contínuo do problema. O domínio de discretização é o mesmo usado no modelo isotrópico, com células uniformes nas direções azimutal e longitudinal e não uniformes na direção radial. A anisotropia na condutividade é o fator que mais altera a resposta elétrica de sensores LWD. O tensor condutividade é derivado através de rotação dos eixos coordenados. Para modelar as interfaces de materiais anisotrópicos na grade entrelaçada, implementa-se um esquema

baseado na média sobre a área da face da célula. Ao contrário do esquema apresentado em [29], que utiliza as componentes de campo elétrico normais à interface dos materiais, o esquema proposto utiliza as componentes de campo elétrico (ou componentes do potencial vetor magnético na formulação por potenciais) que são tangenciais à interface dos materiais e, portanto, são contínuas e bem definidas.

4.2

Tensor condutividade

Devido à fatores geológicos, geralmente, a condutividade do meio em formações estratificadas é anisotrópica. Em tais casos, a condutividade anisotrópica do meio pode ser expressa em um sistema de coordenadas cujo o eixo dos z é coincidente com o eixo da anisotropia do meio [31, 53]. Assim, têm-se:

$$\bar{\sigma}' = \begin{bmatrix} \sigma_{\perp} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{\perp} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{\parallel} \end{bmatrix} \quad (4-1)$$

onde σ_{\perp} e σ_{\parallel} são as condutividades perpendicular e paralela ao eixo de anisotropia, respectivamente. A taxa de anisotropia do meio é definida por:

$$k_a = \sqrt{\frac{\sigma_{\perp}}{\sigma_{\parallel}}}. \quad (4-2)$$

Durante a perfuração de um poço, normalmente, o eixo da ferramenta de perfilagem não coincide com o eixo da anisotropia. Em outras palavras, as camadas da formação tornam-se inclinadas em relação ao eixo da ferramenta. Neste caso, um ângulo oblíquo θ_0 , denominado por ângulo de inclinação (*dipping angle*), é estabelecido entre o eixo da ferramenta z e o eixo de anisotropia z' (eixo que define a direção de σ_{\parallel}).

Considere-se um sistema de coordenadas (x, y, z) , sendo o eixo z conforme definido anteriormente e $y = y'$. A figura 4.1 ilustra as relações geométricas entre os eixos de anisotropia (x', y', z') e os eixos da ferramenta (x, y, z) , que estão relacionados da seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = R(\theta_0) \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad (4-3)$$

onde a matriz de rotação $R(\theta_0)$ é definida por:

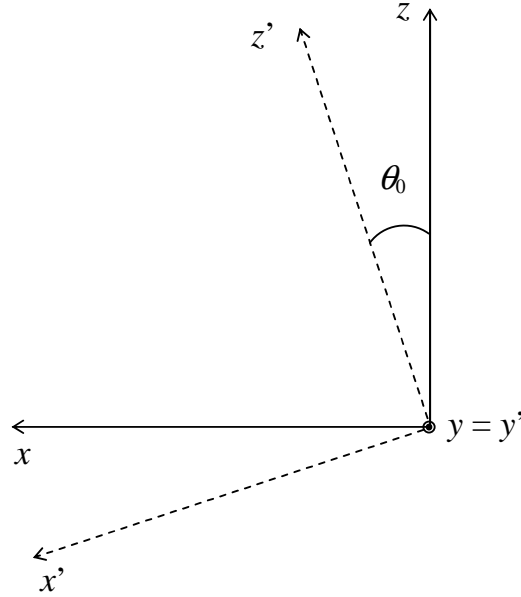


Figura 4.1: Relações geométricas entre os sistemas de coordenadas da anisotropia (x', y', z') e o sistemas de coordenadas da ferramenta (x, y, z) .

$$R(\theta) = \begin{bmatrix} \cos \theta_0 & 0 & -\sin \theta_0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \theta_0 & 0 & \cos \theta_0 \end{bmatrix}. \quad (4-4)$$

Assume-se que as relações constitutivas aplicam-se igualmente nos sistemas de coordenadas (x, y, z) e (x', y', z') . Desta forma, têm-se:

$$\vec{J} = \bar{\bar{\sigma}} \vec{E} \quad (4-5a)$$

$$\vec{J}' = \bar{\bar{\sigma}}' \vec{E}' \quad (4-5b)$$

onde \vec{J} e \vec{E} representam o vetor densidade de corrente elétrica e o vetor intensidade de campo elétrico, respectivamente.

Para determinar a expressão do tensor $\bar{\bar{\sigma}}$ no sistema de coordenadas (x, y, z) , observa-se que os campos vetoriais obedecem a mesma lei de transformação das coordenadas vetoriais em (4-3). Assim,

$$\vec{J}' = R(\theta_0) \vec{J} \quad (4-6a)$$

$$\vec{E}' = R(\theta_0) \vec{E}. \quad (4-6b)$$

Substituindo-se (4-6a) e (4-6b) em (4-5b), obtém-se:

$$\vec{J} = R(\theta_0)^{-1} \bar{\bar{\sigma}}' R(\theta_0) \vec{E} . \quad (4-7)$$

Assim, o tensor condutividade $\bar{\bar{\sigma}}$, em sua representação cartesiana, é dado por:

$$\bar{\bar{\sigma}} = R(\theta_0)^{-1} \bar{\bar{\sigma}}' R(\theta_0) . \quad (4-8)$$

Neste trabalho, o sistema de coordenadas cilíndricas (ρ, φ, z) , alinhado ao eixo da ferramenta LWD, é escolhido para representar um ponto no espaço. Neste caso, faz-se necessário uma transformação de coordenadas cartesianas para coordenadas cilíndricas. O tensor condutividade, em sua representação cilíndrica, pode ser expresso como

$$\bar{\bar{\sigma}} = T(\varphi)^{-1} [R(\theta_0)^{-1} \bar{\bar{\sigma}}' R(\theta_0)] T(\varphi) = \begin{bmatrix} \sigma_{\rho\rho} & \sigma_{\rho\varphi} & \sigma_{\rho z} \\ \sigma_{\varphi\rho} & \sigma_{\varphi\varphi} & \sigma_{\varphi z} \\ \sigma_{z\rho} & \sigma_{z\varphi} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \quad (4-9)$$

onde a matriz de transformação $T(\varphi)$ é dada por

$$T(\varphi) = \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4-10)$$

e os elementos do tensor $\bar{\bar{\sigma}}$ têm as seguintes expressões:

$$\sigma_{\rho\rho} = (\sigma_{\perp} \cos^2 \theta_0 + \sigma_{\parallel} \sin^2 \theta_0) \cos^2 \varphi + \sigma_{\perp} \sin^2 \varphi \quad (4-11a)$$

$$\sigma_{\rho\varphi} = -(\sigma_{\perp} \cos^2 \theta_0 + \sigma_{\parallel} \sin^2 \theta_0) \cos \varphi \sin \varphi + \sigma_{\perp} \cos \varphi \sin \varphi \quad (4-11b)$$

$$\sigma_{\rho z} = (-\sigma_{\perp} \cos \theta_0 \sin \theta_0 + \sigma_{\parallel} \sin \theta_0 \cos \theta_0) \cos \varphi \quad (4-11c)$$

$$\sigma_{\varphi\rho} = -(\sigma_{\perp} \cos^2 \theta_0 + \sigma_{\parallel} \sin^2 \theta_0) \cos \varphi \sin \varphi + \sigma_{\perp} \cos \varphi \sin \varphi \quad (4-11d)$$

$$\sigma_{\varphi\varphi} = (\sigma_{\perp} \cos^2 \theta_0 + \sigma_{\parallel} \sin^2 \theta_0) \sin^2 \varphi + \sigma_{\perp} \cos^2 \varphi \quad (4-11e)$$

$$\sigma_{\varphi z} = (\sigma_{\perp} \cos \theta_0 \sin \theta_0 - \sigma_{\parallel} \sin \theta_0 \cos \theta_0) \sin \varphi \quad (4-11f)$$

$$\sigma_{z\rho} = (-\sigma_{\perp} \cos \theta_0 \sin \theta_0 + \sigma_{\parallel} \sin \theta_0 \cos \theta_0) \cos \varphi \quad (4-11g)$$

$$\sigma_{z\varphi} = (\sigma_{\perp} \cos \theta_0 \sin \theta_0 - \sigma_{\parallel} \sin \theta_0 \cos \theta_0) \sin \varphi \quad (4-11h)$$

$$\sigma_{zz} = \sigma_{\perp} \sin^2 \theta_0 + \sigma_{\parallel} \cos^2 \theta_0 \quad (4-11i)$$

4.3

Formulação por campos

Considere-se a forma integral das leis de Ampère e Faraday dada por:

$$\oint_{\partial\tilde{S}} \vec{H} \cdot d\vec{l} - \iint_{\tilde{S}} (\bar{\sigma} - i\omega\bar{\epsilon}) \vec{E} \cdot d\vec{s} = \iint_{\tilde{S}} \vec{J}_s \cdot d\vec{s} \quad (4-12a)$$

$$\oint_{\partial S} \vec{E} \cdot d\vec{l} = i\omega \iint_S \bar{\mu} \vec{H} \cdot d\vec{s} \quad (4-12b)$$

satisfazendo a condição de contorno de Dirichlet. $\bar{\sigma}$, $\bar{\epsilon}$ e $\bar{\mu}$, são os tensores condutividade elétrica, permissividade elétrica e permeabilidade magnética do meio, respectivamente. \vec{J}_s é o vetor densidade de corrente elétrica e ρ é a densidade de carga elétrica. \vec{E} e \vec{H} são os vetores intensidades de campo elétrico e magnético, respectivamente. As superfícies de integração S de contorno ∂S , e as superfícies \tilde{S} de contorno $\partial\tilde{S}$ são as faces das células primárias e duais, respectivamente.

Dentre os parâmetros constitutivos do meio, a anisotropia na condutividade é o fator que mais altera a resposta elétrica de sensores LWD. Para a grande maioria das ferramentas de perfilagem eletromagnética, a frequência de operação é abaixo de 2 MHz, e a atenuação devido à condutividade domina o sinal. A permissividade elétrica e a permeabilidade magnética, na maioria dos casos práticos, são isotrópicas. Entretanto, considera-se anisotropia diagonal na permissividade elétrica e na permeabilidade magnética para modelar problemas em que camadas perfeitamente casadas (PMLs) são incorporadas ao domínio computacional. Sendo assim, assume-se que os parâmetros constitutivos do meio são definidos da seguinte forma:

$$\bar{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{\rho\rho} & \sigma_{\rho\varphi} & \sigma_{\rho z} \\ \sigma_{\varphi\rho} & \sigma_{\varphi\varphi} & \sigma_{\varphi z} \\ \sigma_{z\rho} & \sigma_{z\varphi} & \sigma_{zz} \end{bmatrix}; \quad \bar{\epsilon} = \begin{bmatrix} \epsilon_{\rho\rho} & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_{\varphi\varphi} & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_{zz} \end{bmatrix}; \quad \bar{\mu} = \begin{bmatrix} \mu_{\rho\rho} & 0 & 0 \\ 0 & \mu_{\varphi\varphi} & 0 \\ 0 & 0 & \mu_{zz} \end{bmatrix} \quad (4-13)$$

Cabe ressaltar que em problemas onde a permissividade e a permeabilidade do meio sejam definidos por tensores completos, o presente modelo poderá ser aplicado após pequenas alterações. Os procedimentos adotados ao tratamento de $\bar{\sigma}$ são válidos para $\bar{\epsilon}$. O tratamento de $\bar{\mu}$ segue por analogia.

Analogamente ao Capítulo 3, $\bar{\epsilon}$ e $\bar{\sigma}$ são constantes sobre cada volume primário V (3-3) e $\bar{\mu}$ é constante sobre cada volume dual \tilde{V} (3-5).

4.3.1

Discretização das equações de Maxwell

Para discretizar as equações de Maxwell e derivar o sistema linear associado, aplica-se a lei de Ampère (4-12a) sobre as superfícies \tilde{S}_ρ , \tilde{S}_φ e \tilde{S}_z , com contornos $\partial\tilde{S}_\rho$, $\partial\tilde{S}_\varphi$ e $\partial\tilde{S}_z$. As superfícies \tilde{S}_ρ , \tilde{S}_φ e \tilde{S}_z são as faces das células duais cujas áreas estão definidas em (3-6a), (3-6b) e (3-6c). Assim, têm-se:

- Para a superfície \tilde{S}_ρ :

$$\oint_{\partial\tilde{S}_\rho} \vec{H} \cdot d\vec{l} - \iint_{\tilde{S}_\rho} (\sigma_{\rho\rho}E_\rho + \sigma_{\rho\varphi}E_\varphi + \sigma_{\rho z}E_z)\rho d\varphi dz + i\omega \iint_{\tilde{S}_\rho} \epsilon_{\rho\rho}E_\rho \rho d\varphi dz = I_\rho \quad (4-14)$$

Efetuando-se as integrações em (4-14), obtém-se a seguinte equação:

$$\begin{aligned} & \Delta z [H_{z(i+1/2,j+1/2,k)} - H_{z(i+1/2,j-1/2,k)}] + \rho_{i+1/2} \Delta\varphi [H_{\varphi(i+1/2,j,k-1/2)} - H_{\varphi(i+1/2,j,k+1/2)}] \\ & - \rho_{i+1/2} \Delta\varphi \Delta z [\langle \sigma_{\rho\rho(i+1/2,j,k)} \rangle E_{\rho(i+1/2,j,k)} + \langle \sigma_{\rho\varphi(i+1/2,j,k)} \rangle \langle E_{\varphi(i+1/2,j,k)} \rangle \\ & + \langle \sigma_{\rho z(i+1/2,j,k)} \rangle \langle E_{z(i+1/2,j,k)} \rangle] + i\omega \rho_{i+1/2} \Delta\varphi \Delta z \langle \epsilon_{\rho\rho(i+1/2,j,k)} \rangle E_{\rho(i+1/2,j,k)} = I_{\rho(i,j,k)} \end{aligned} \quad (4-15)$$

Tendo em vista que a lei de Ampère é aplicada sobre as células da grade dual, e que as condutividades $\sigma_{\rho w(i+1/2,j,k)}$ ($w \in \{\rho, \varphi, z\}$) e permissividades elétricas $\epsilon_{\rho\rho(i+1/2,j,k)}$ são uniformes sobre cada volume primário, para efetuar a integral de superfície em (4-14) é necessário calcular os valores médios das condutividades e permissividades elétricas. Sendo assim, $\sigma_{vw(i+1/2,j,k)}$ e $\epsilon_{\rho\rho(i+1/2,j,k)}$ são aproximados por valores médios definidos por uma média sobre a área. Este procedimento é semelhante ao adotado na modelagem de interfaces isotrópicas (seção 3.3.2). Desta forma, $\langle \sigma_{\rho w(i+1/2,j,k)} \rangle$ é dado por:

$$\langle \sigma_{\rho w(i+1/2,j,k)} \rangle = \frac{\iint_{\tilde{S}_\rho} \sigma_{\rho w}(\rho_{i+1/2}, \varphi, z) \rho d\varphi dz}{\iint_{\tilde{S}_\rho} \rho d\varphi dz}$$

$$\langle \sigma_{\rho w(i+1/2,j,k)} \rangle = \frac{\sigma_{\rho w(i,j,k)} + \sigma_{\rho w(i,j,k-1)} + \sigma_{\rho w(i,j-1,k)} + \sigma_{\rho w(i,j-1,k-1)}}{4} \quad (4-16)$$

onde $w \in \{\rho, \varphi, z\}$. Analogamente, $\epsilon_{\rho\rho(i+1/2,j,k)}$ é definido da seguinte forma:

$$\langle \epsilon_{\rho\rho(i+1/2,j,k)} \rangle = \frac{\iint_{\tilde{S}_\rho} \epsilon_{\rho\rho}(\rho_{i+1/2}, \varphi, z) \rho d\varphi dz}{\iint_{\tilde{S}_\rho} \rho d\varphi dz}$$

$$\langle \epsilon_{\rho\rho(i+1/2,j,k)} \rangle = \frac{\epsilon_{\rho\rho(i,j,k)} + \epsilon_{\rho\rho(i,j,k-1)} + \epsilon_{\rho\rho(i,j-1,k)} + \epsilon_{\rho\rho(i,j-1,k-1)}}{4} \quad (4-17)$$

Observa-se que para completar a discretização da integral de superfície em (4-14) é necessário calcular as três componentes de campo elétrico (E_ρ , E_φ , E_z) no ponto $(i+1/2, j, k)$. Entretanto, apenas a componente $E_{\rho(i+1/2,j,k)}$ está definida em $(i+1/2, j, k)$. $E_{\varphi(i+1/2,j,k)}$ e $E_{z(i+1/2,j,k)}$ são interpoladas de componentes vizinhas. A figura 4.2 ilustra a geometria da grade entrelaçada utilizado para aproximar $E_{\rho(i+1/2,j,k)}$, $E_{\varphi(i+1/2,j,k)}$ e $E_{z(i+1/2,j,k)}$ no ponto $(i+1/2, j, k)$. Assim, $E_{\varphi(i+1/2,j,k)}$ e $E_{z(i+1/2,j,k)}$ são interpoladas utilizando a seguinte aproximação:

$$\langle E_{\varphi(i+1/2,j,k)} \rangle = \frac{1}{4} [E_{\varphi(i,j-1/2,k)} + E_{\varphi(i,j+1/2,k)} + E_{\varphi(i+1,j-1/2,k)} + E_{\varphi(i+1,j+1/2,k)}] \quad (4-18a)$$

$$\langle E_{z(i+1/2,j,k)} \rangle = \frac{1}{4} [E_{z(i,j,k-1/2)} + E_{z(i,j,k+1/2)} + E_{z(i+1,j,k-1/2)} + E_{z(i+1,j,k+1/2)}] \quad (4-18b)$$

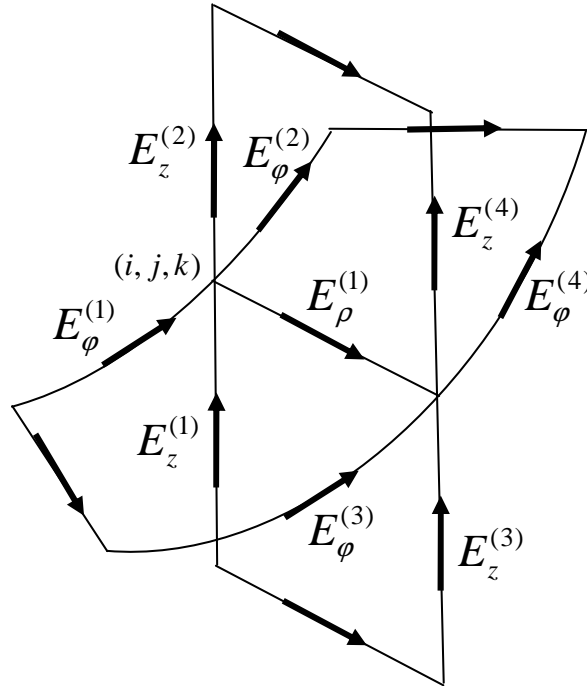


Figura 4.2: Geometria da grade entrelaçada utilizada para aproximar $E_{\rho(i+1/2,j,k)}$, $E_{\varphi(i+1/2,j,k)}$ e $E_{z(i+1/2,j,k)}$ no ponto $(i+1/2, j, k)$. $E_\rho^{(1)} = E_{\rho(i+1/2,j,k)}$; $E_\varphi^{(1)} = E_{\varphi(i,j-1/2,k)}$; $E_\varphi^{(2)} = E_{\varphi(i,j+1/2,k)}$; $E_\varphi^{(3)} = E_{\varphi(i+1,j-1/2,k)}$; $E_\varphi^{(4)} = E_{\varphi(i+1,j+1/2,k)}$; $E_z^{(1)} = E_{z(i,j,k-1/2)}$; $E_z^{(2)} = E_{z(i,j,k+1/2)}$; $E_z^{(3)} = E_{z(i+1,j,k-1/2)}$; $E_z^{(4)} = E_{z(i+1,j,k+1/2)}$.

- Para a superfície \tilde{S}_φ :

$$\oint_{\partial\tilde{S}_\varphi} \vec{H} \cdot d\vec{l} - \iint_{\tilde{S}_\varphi} (\sigma_{\varphi\rho} E_\rho + \sigma_{\varphi\varphi} E_\varphi + \sigma_{\varphi z} E_z) d\rho dz + i\omega \iint_{\tilde{S}_\varphi} \epsilon_{\varphi\varphi} E_\varphi d\rho dz = I_\varphi \quad (4-19)$$

A equação discretizada é então dada por:

$$\begin{aligned} & \Delta z [H_{z(i-1/2, j+1/2, k)} - H_{z(i+1/2, j+1/2, k)}] \\ & + (\rho_{i+1/2} - \rho_{i-1/2}) [H_{\rho(i, j+1/2, k+1/2)} - H_{\rho(i, j+1/2, k-1/2)}] \\ & - (\rho_{i+1/2} - \rho_{i-1/2}) \Delta z [\langle \sigma_{\varphi\rho(i, j+1/2, k)} \rangle \langle E_{\rho(i, j+1/2, k)} \rangle + \langle \sigma_{\varphi\varphi(i, j+1/2, k)} \rangle E_{\varphi(i, j+1/2, k)} \\ & + \langle \sigma_{\varphi z(i, j+1/2, k)} \rangle \langle E_{z(i, j+1/2, k)} \rangle] + i\omega (\rho_{i+1/2} - \rho_{i-1/2}) \Delta z \langle \epsilon_{\rho\rho(i+1/2, j, k)} \rangle E_{\rho(i+1/2, j, k)} \\ & = I_{\varphi(i, j, k)} \quad (4-20) \end{aligned}$$

$\langle \sigma_{\varphi w(i, j+1/2, k)} \rangle$ ($w \in \{\rho, \varphi, z\}$) e $\langle \epsilon_{\varphi\varphi(i, j+1/2, k)} \rangle$ são definidos por:

$$\langle \sigma_{\varphi w(i, j+1/2, k)} \rangle = \frac{\iint_{\tilde{S}_\varphi} \sigma_{\varphi w}(\rho, \varphi_{j+1/2}, z) d\rho dz}{\iint_{\tilde{S}_\varphi} d\rho dz}$$

$$\begin{aligned} & \langle \sigma_{\varphi w(i, j+1/2, k)} \rangle = \\ & \left[\frac{(\rho_{i+1/2} - \rho_i)(\sigma_{\varphi w(i, j, k)} + \sigma_{\varphi w(i, j, k-1)}) + (\rho_i - \rho_{i-1/2})(\sigma_{\varphi w(i-1, j, k)} + \sigma_{\varphi w(i-1, j, k-1)})}{2(\rho_{i+1/2} - \rho_i) + 2(\rho_i - \rho_{i-1/2})} \right] \quad (4-21) \end{aligned}$$

e

$$\langle \epsilon_{\varphi\varphi(i, j+1/2, k)} \rangle = \frac{\iint_{\tilde{S}_\varphi} \epsilon_{\varphi\varphi}(\rho, \varphi_{j+1/2}, z) d\rho dz}{\iint_{\tilde{S}_\varphi} d\rho dz}$$

$$\begin{aligned} & \langle \epsilon_{\varphi\varphi(i, j+1/2, k)} \rangle = \\ & \left[\frac{(\rho_{i+1/2} - \rho_i)(\epsilon_{\varphi w(i, j, k)} + \epsilon_{\varphi w(i, j, k-1)}) + (\rho_i - \rho_{i-1/2})(\epsilon_{\varphi w(i-1, j, k)} + \epsilon_{\varphi w(i-1, j, k-1)})}{2(\rho_{i+1/2} - \rho_i) + 2(\rho_i - \rho_{i-1/2})} \right] \quad (4-22) \end{aligned}$$

De forma semelhante ao procedimento anterior, as componentes de campo que não estão definidas em $(i, j + 1/2, k)$ são interpoladas de com-

ponentes vizinhas. Assim, têm-se:

$$\langle E_{\rho(i,j+1/2,k)} \rangle = \frac{1}{4} [E_{\rho(i-1/2,j,k)} + E_{\rho(i+1/2,j,k)} + E_{\rho(i-1/2,j+1,k)} + E_{\rho(i+1/2,j+1,k)}] \quad (4-23a)$$

$$\langle E_{z(i,j+1/2,k)} \rangle = \frac{1}{4} [E_{z(i,j,k-1/2)} + E_{z(i,j,k+1/2)} + E_{z(i,j+1,k-1/2)} + E_{z(i,j+1,k+1/2)}] \quad (4-23b)$$

- Para a superfície \tilde{S}_z :

$$\oint_{\partial \tilde{S}_z} \vec{H} \cdot d\vec{l} - \iint_{\tilde{S}_z} (\sigma_{z\rho} E_\rho + \sigma_{z\varphi} E_\varphi + \sigma_{zz} E_z) \rho d\rho d\varphi + i\omega \iint_{\tilde{S}_z} \epsilon_{zz} E_z \rho d\rho d\varphi = I_z \quad (4-24)$$

Efetuando-se as integrações em (4-24), resulta:

$$\begin{aligned} & (\rho_{i+1/2} - \rho_{i-1/2}) [H_{\rho(i,j-1/2,k+1/2)} - H_{\rho(i,j+1/2,k+1/2)}] \\ & + \Delta\varphi [\rho_{i+1/2} H_{\varphi(i+1/2,j,k+1/2)} - \rho_{i-1/2} H_{\varphi(i-1/2,j,k+1/2)}] \\ & - \left(\frac{(\rho_{i+1/2})^2 - (\rho_{i-1/2})^2}{2} \right) \Delta\varphi [\langle \sigma_{z\rho}(i,j,k+1/2) \rangle \langle E_{\rho(i,j,k+1/2)} \rangle \\ & + \langle \sigma_{z\varphi}(i,j,k+1/2) \rangle \langle E_{\varphi(i,j,k+1/2)} \rangle + \langle \sigma_{zz}(i,j,k+1/2) \rangle E_{z(i,j,k+1/2)}] \\ & + i\omega \left(\frac{(\rho_{i+1/2})^2 - (\rho_{i-1/2})^2}{2} \right) \Delta\varphi \langle \epsilon_{zz}(i,j,k+1/2) \rangle E_{z(i,j,k+1/2)} = I_{z(i,j,k)} \end{aligned} \quad (4-25)$$

$\langle \sigma_{zw}(i,j,k+1/2) \rangle$ ($w \in \{\rho, \varphi, z\}$) e $\langle \epsilon_{zz}(i,j,k+1/2) \rangle$ são definidos pelas seguintes expressões:

$$\langle \sigma_{zw}(i,j,k+1/2) \rangle = \frac{\iint_{\tilde{S}_z} \sigma_{zw}(\rho, \varphi, z_{k+1/2}) \rho d\rho d\varphi}{\iint_{\tilde{S}_z} \rho d\rho d\varphi} \quad (4-26)$$

$$\begin{aligned} \langle \sigma_{zw}(i,j,k+1/2) \rangle &= \left[2 \left(\frac{(\rho_i)^2 - (\rho_{i-1/2})^2}{2} \right) + 2 \left(\frac{(\rho_{i+1/2})^2 - (\rho_i)^2}{2} \right) \right]^{-1} \cdot \\ & \left\{ \left(\frac{(\rho_i)^2 - (\rho_{i-1/2})^2}{2} \right) (\sigma_{zw(i-1,j,k)} + \sigma_{zw(i-1,j-1,k)}) \right. \\ & \left. + \left(\frac{(\rho_{i+1/2})^2 - (\rho_i)^2}{2} \right) (\sigma_{zw(i,j,k)} + \sigma_{zw(i,j-1,k)}) \right\} \end{aligned} \quad (4-27)$$

e

$$\langle \epsilon_{zz(i,j,k+1/2)} \rangle = \frac{\iint_{\tilde{S}_z} \epsilon_{zz}(\rho, \varphi, z_{k+1/2}) \rho d\rho d\varphi}{\iint_{\tilde{S}_z} \rho d\rho d\varphi} \quad (4-28)$$

$$\begin{aligned} \langle \epsilon_{zz(i,j,k+1/2)} \rangle = & \left[2 \left(\frac{(\rho_i)^2 - (\rho_{i-1/2})^2}{2} \right) + 2 \left(\frac{(\rho_{i+1/2})^2 - (\rho_i)^2}{2} \right) \right]^{-1} \cdot \\ & \left\{ \left(\frac{(\rho_i)^2 - (\rho_{i-1/2})^2}{2} \right) (\epsilon_{zz(i-1,j,k)} + \epsilon_{zz(i-1,j-1,k)}) \right. \\ & \left. + \left(\frac{(\rho_{i+1/2})^2 - (\rho_i)^2}{2} \right) (\epsilon_{zz(i,j,k)} + \epsilon_{zz(i,j-1,k)}) \right\} \quad (4-29) \end{aligned}$$

As componentes $E_{\rho(i,j,k+1/2)}$ e $E_{\varphi(i,j,k+1/2)}$ não estão definidas em $(i, j, k + 1/2)$ e, portanto, são interpoladas de componentes vizinhas. Desta forma, têm-se:

$$\langle E_{\rho(i,j,k+1/2)} \rangle = \frac{1}{4} [E_{\rho(i,j-1/2,k)} + E_{\rho(i,j+1/2,k)} + E_{\rho(i,j-1/2,k+1)} + E_{\rho(i,j+1/2,k+1)}] \quad (4-30a)$$

$$\langle E_{\varphi(i,j,k+1/2)} \rangle = \frac{1}{4} [E_{\varphi(i,j-1/2,k)} + E_{\varphi(i,j+1/2,k)} + E_{\varphi(i,j-1/2,k+1)} + E_{\varphi(i,j+1/2,k+1)}] \quad (4-30b)$$

As componentes do campo magnético nas direções ρ , φ e z , são determinadas através da integração de (4-12b). Neste caso, as integrações são realizadas sobre as faces das células primárias. Utilizando superfícies de integração S_ρ (3-4a), S_φ (3-4b) e S_z (3-4c), obtém-se, respectivamente, as seguintes expressões:

$$\begin{aligned} H_{\rho(i,j+1/2,k+1/2)} = & \frac{1}{i\omega \langle \mu_{\rho\rho(i,j+1/2,k+1/2)} \rangle} \cdot \\ & \left(\frac{E_{z(i,j+1,k+1/2)} - E_{z(i,j,k+1/2)}}{\rho_i \Delta\varphi} + \frac{E_{\varphi(i,j+1/2,k)} - E_{\varphi(i,j+1/2,k+1)}}{\Delta z} \right) \quad (4-31a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H_{\varphi(i+1/2,j,k+1/2)} = & \frac{1}{i\omega \langle \mu_{\varphi\varphi(i+1/2,j,k+1/2)} \rangle} \cdot \\ & \left(\frac{E_{\rho(i+1/2,j,k+1)} - E_{\rho(i+1/2,j,k)}}{\Delta z} + \frac{E_{z(i,j,k+1/2)} - E_{z(i+1,j,k+1/2)}}{\rho_{i+1} - \rho_i} \right) \quad (4-31b) \end{aligned}$$

$$H_{z(i+1/2,j+1/2,k)} = \frac{1}{i\omega \langle \mu_{zz(i+1/2,j+1/2,k)} \rangle} \left(\frac{2}{(\rho_{i+1})^2 - (\rho_i)^2} \right) \frac{1}{\Delta\varphi} \cdot \\ [(\rho_{i+1} - \rho_i)[E_{\rho(i+1/2,j,k)} - E_{\rho(i+1/2,j+1,k)}] \\ + \Delta\varphi[\rho_{i+1}E_{\varphi(i+1,j+1/2,k)} - \rho_iE_{\varphi(i,j+1/2,k)}]] \quad (4-31c)$$

onde $\langle \mu_{\rho\rho(i,j+1/2,k+1/2)} \rangle$, $\langle \mu_{\varphi\varphi(i+1/2,j,k+1/2)} \rangle$ e $\langle \mu_{zz(i+1/2,j+1/2,k)} \rangle$ são os valores médios dados por:

$$\langle \mu_{\rho\rho(i,j+1/2,k+1/2)} \rangle = \frac{\mu_{\rho\rho(i,j,k)} + \mu_{\rho\rho(i,j,k-1)} + \mu_{\rho\rho(i,j-1,k)} + \mu_{\rho\rho(i,j-1,k-1)}}{4} \quad (4-32)$$

$$\langle \mu_{\varphi\varphi(i+1/2,j,k+1/2)} \rangle = \left[\frac{(\rho_{i+1} - \rho_{i+1/2})(\mu_{\varphi\varphi(i,j,k)} + \mu_{\varphi\varphi(i,j,k-1)})}{2(\rho_{i+1} - \rho_{i+1/2}) + 2(\rho_{i+1/2} - \rho_i)} \right] + \\ \left[\frac{(\rho_{i+1/2} - \rho_i)(\mu_{\varphi\varphi(i-1,j,k)} + \mu_{\varphi\varphi(i-1,j,k-1)})}{2(\rho_{i+1} - \rho_{i+1/2}) + 2(\rho_{i+1/2} - \rho_i)} \right] \quad (4-33)$$

$$\langle \mu_{zz(i+1/2,j+1/2,k)} \rangle = \left[2 \left(\frac{(\rho_{i+1/2})^2 - (\rho_i)^2}{2} \right) + 2 \left(\frac{(\rho_{i+1})^2 - (\rho_{i+1/2})^2}{2} \right) \right]^{-1} \cdot \\ \left\{ \left(\frac{(\rho_{i+1/2})^2 - (\rho_i)^2}{2} \right) (\mu_{zz(i-1,j,k)} + \mu_{zz(i-1,j-1,k)}) \right. \\ \left. + \left(\frac{(\rho_{i+1})^2 - (\rho_{i+1/2})^2}{2} \right) (\mu_{zz(i,j,k)} + \mu_{zz(i,j-1,k)}) \right\} \quad (4-34)$$

Substituindo (4-31b) e (4-31c) em (4-15); (4-31a) e (4-31c) em (4-20) e (4-31a) e (4-31b) em (4-25), elimina-se \vec{H} do sistema de equações lineares. O sistema linear resultante pode ser expresso pela forma matricial $[C][X] = [B]$, onde $[C]$ é uma matriz complexa não-hermitiana, $[X]$ é vetor incógnita e $[B]$ é o termo independente da incógnita.

As expressões dos elementos da matriz $[C]$ e do vetor $[B]$ encontram-se no Apêndice D.

4.4

Formulação por potenciais

Nesta seção, estende-se a formulação por potenciais desenvolvida no Capítulo 3 para meios anisotrópicos. Como dito anteriormente, a extensão da formulação por potenciais para meios anisotrópicos é direta, ou seja, em comparação à formulação isotrópica, apenas os parâmetros constitutivos do meio são alterados. Sendo assim, o sistema de equações a ser discretizado por

volumes finitos é dado por:

$$\oint_{\partial\tilde{S}} \vec{H} \cdot d\vec{l} - (i\omega)^{-1} \iint_{\tilde{S}} \bar{\mu}^{-1} \nabla\psi \cdot d\vec{s} - \iint_{\tilde{S}} (\bar{\sigma} - i\omega\bar{\epsilon})(\vec{A} + \nabla\phi) \cdot d\vec{s} = \iint_{\tilde{S}} \vec{J}_s \cdot d\vec{s} \quad (4-35a)$$

$$\oint_{\partial S} \vec{A} \cdot d\vec{l} - (i\omega) \iint_S \bar{\mu} \vec{H} \cdot d\vec{s} = 0 \quad (4-35b)$$

$$\iiint_{\tilde{V}} \psi \, dv = \iiint_{\tilde{V}} \nabla \cdot \vec{A} \, dv \quad (4-35c)$$

$$- \iiint_{\tilde{V}} \nabla \cdot [(\bar{\sigma} - i\omega\bar{\epsilon})(\vec{A} + \nabla\phi)] \, dv = \iiint_{\tilde{V}} \nabla \cdot \vec{J}_s \, dv \quad (4-35d)$$

onde \vec{H} é o vetor intensidade de campo magnético, \vec{A} é o potencial vetor magnético, ϕ é o potencial escalar, ψ é uma variável auxiliar e \vec{J}_s é o vetor densidade de corrente elétrica. $\bar{\sigma}$, $\bar{\epsilon}$ e $\bar{\mu}$, são os tensores condutividade elétrica, permissividade elétrica e permeabilidade magnética do meio, respectivamente. V e \tilde{V} são os volumes das células primárias e duais, respectivamente. As superfícies de integração S de contorno ∂S , e as superfícies \tilde{S} de contorno $\partial\tilde{S}$ são as faces das células primárias e duais, respectivamente. $\nabla\psi$ e $\nabla\phi$ são aproximados por diferenças finitas centrais.

O posicionamento na grade cilíndrica das componentes do campo magnético \vec{H} e do potencial vetor magnético \vec{A} , assim como do potencial escalar ϕ e da variável escalar auxiliar ψ é a mesmo apresentado na seção 3.4.2, assegurando as condições de continuidade dos campos na interface anisotrópica.

Novamente, assume-se que $\bar{\epsilon}$ e $\bar{\sigma}$ são constantes sobre cada volume primário V (3-3) e $\bar{\mu}$ é constante sobre cada volume dual \tilde{V} (3-5).

As equações (4-35) são resolvidas satisfazendo as seguintes condições de contorno:

$$\hat{n} \times \vec{A}|_{\partial\Omega} = 0 \quad (4-36a)$$

$$\phi|_{\partial\Omega} = 0 \quad (4-36b)$$

onde $\partial\Omega$ é o contorno da região de interesse, que corresponde a um condutor elétrico perfeito.

4.4.1

Discretização das equações

1. Discretização de (4-35a):

Para discretizar a equação (4-35a), efetua-se as integrações sobre as

superfícies \tilde{S}_ρ , \tilde{S}_φ e \tilde{S}_z , com contornos $\partial\tilde{S}_\rho$, $\partial\tilde{S}_\varphi$ e $\partial\tilde{S}_z$. As superfícies \tilde{S}_ρ , \tilde{S}_φ e \tilde{S}_z são as faces das células duais cujas áreas estão definidas em (3-6a), (3-6b) e (3-6c). Desta forma, obtém-se:

- Para a superfície \tilde{S}_ρ :

$$\begin{aligned} & \oint_{\partial\tilde{S}_\rho} \vec{H} \cdot d\vec{l} - (i\omega)^{-1} \iint_{\tilde{S}_\rho} \mu_{\rho\rho}^{-1} \frac{\partial\psi}{\partial\rho} \rho d\varphi dz \\ & - \iint_{\tilde{S}_\rho} (\sigma_{\rho\rho} A_\rho + \sigma_{\rho\varphi} A_\varphi + \sigma_{\rho z} A_z) \rho d\varphi dz + (i\omega) \iint_{\tilde{S}_\rho} \epsilon_{\rho\rho} A_\rho \rho d\varphi dz \\ & - \iint_{\tilde{S}_\rho} \left(\sigma_{\rho\rho} \frac{\partial\phi}{\partial\rho} + \sigma_{\rho\varphi} \frac{1}{\rho} \frac{\partial\phi}{\partial\varphi} + \sigma_{\rho z} \frac{\partial\phi}{\partial z} \right) \rho d\varphi dz + (i\omega) \iint_{\tilde{S}_\rho} \epsilon_{\rho\rho} \frac{\partial\phi}{\partial\rho} \rho d\varphi dz = I_\rho \end{aligned} \quad (4-37)$$

Ao efetuar as integrações em (4-37), resulta:

$$\begin{aligned} & \Delta z [H_{z(i+1/2, j+1/2, k)} - H_{z(i+1/2, j-1/2, k)}] \\ & + \rho_{i+1/2} \Delta\varphi [H_{\varphi(i+1/2, j, k-1/2)} - H_{\varphi(i+1/2, j, k+1/2)}] \\ & - \frac{\rho_{i+1/2} \Delta\varphi \Delta z}{i\omega \mu_{\rho\rho(i, j, k)}} \left(\frac{\psi_{(i+1, j, k)} - \psi_{(i, j, k)}}{\rho_{i+1} - \rho_i} \right) - \rho_{i+1/2} \Delta\varphi \Delta z (\langle \sigma_{\rho\rho(i+1/2, j, k)} \rangle A_{\rho(i+1/2, j, k)} \\ & + \langle \sigma_{\rho\varphi(i+1/2, j, k)} \rangle \langle A_{\varphi(i+1/2, j, k)} \rangle + \langle \sigma_{\rho z(i+1/2, j, k)} \rangle \langle A_{z(i+1/2, j, k)} \rangle) \\ & + (i\omega) \rho_{i+1/2} \Delta\varphi \Delta z \langle \epsilon_{\rho\rho(i+1/2, j, k)} \rangle A_{\rho(i+1/2, j, k)} \\ & - \rho_{i+1/2} \Delta\varphi \Delta z \left\{ \langle \sigma_{\rho\rho(i+1/2, j, k)} \rangle \left(\frac{\phi_{(i+1, j, k)} - \phi_{(i, j, k)}}{\rho_{i+1} - \rho_i} \right) \right. \\ & + \langle \sigma_{\rho\varphi(i+1/2, j, k)} \rangle \left\langle \frac{1}{\rho} \frac{\partial\phi}{\partial\varphi} \right\rangle \Big|_{(i+1/2, j, k)} + \langle \sigma_{\rho z(i+1/2, j, k)} \rangle \left\langle \frac{\partial\phi}{\partial z} \right\rangle \Big|_{(i+1/2, j, k)} \left. \right\} \\ & + (i\omega) \rho_{i+1/2} \Delta\varphi \Delta z \langle \epsilon_{\rho\rho(i+1/2, j, k)} \rangle \left(\frac{\phi_{(i+1, j, k)} - \phi_{(i, j, k)}}{\rho_{i+1} - \rho_i} \right) = I_{\rho(i, j, k)} \end{aligned} \quad (4-38)$$

Os valores de $\langle \sigma_{\rho w(i+1/2, j, k)} \rangle$ ($w \in \{\rho, \varphi, z\}$) e $\langle \epsilon_{\rho\rho(i+1/2, j, k)} \rangle$ são dados em (4-16) e (4-17), respectivamente.

De forma semelhante à formulação por campos, as componentes $A_{\varphi(i+1/2, j, k)}$ e $A_{z(i+1/2, j, k)}$ não estão definidas em $(i+1/2, j, k)$. Assim, $A_{\varphi(i+1/2, j, k)}$ e $A_{z(i+1/2, j, k)}$ são interpoladas de componentes vizinhas através da seguinte aproximação:

$$\langle A_{\varphi(i+1/2,j,k)} \rangle = \frac{1}{4} [A_{\varphi(i,j-1/2,k)} + A_{\varphi(i,j+1/2,k)} + A_{\varphi(i+1,j-1/2,k)} + A_{\varphi(i+1,j+1/2,k)}] \quad (4-39a)$$

$$\langle A_{z(i+1/2,j,k)} \rangle = \frac{1}{4} [A_{z(i,j,k-1/2)} + A_{z(i,j,k+1/2)} + A_{z(i+1,j,k-1/2)} + A_{z(i+1,j,k+1/2)}] \quad (4-39b)$$

A geometria da grade entrelaçada utilizado para aproximar $A_{\rho(i+1/2,j,k)}$, $A_{\varphi(i+1/2,j,k)}$ e $A_{z(i+1/2,j,k)}$ no ponto $(i+1/2,j,k)$ está mostrado na figura 4.4.

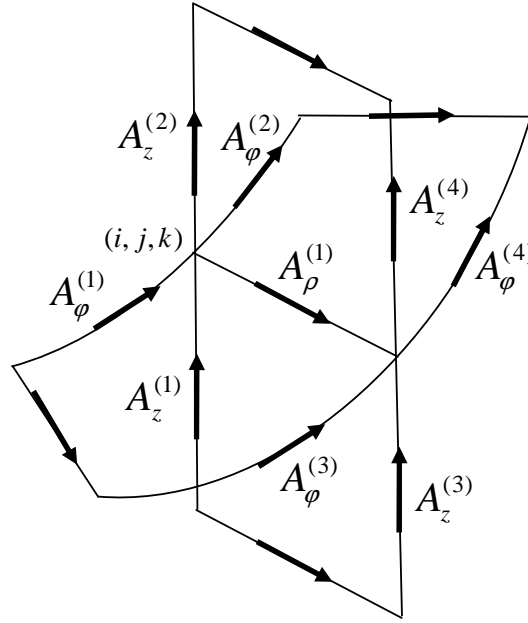


Figura 4.3: Geometria da grade entrelaçada utilizada para aproximar $A_{\rho(i+1/2,j,k)}$, $A_{\varphi(i+1/2,j,k)}$ e $A_{z(i+1/2,j,k)}$ no ponto $(i+1/2,j,k)$. $A_{\rho}^{(1)} = A_{\rho(i+1/2,j,k)}$; $A_{\varphi}^{(1)} = A_{\varphi(i,j-1/2,k)}$; $A_{\varphi}^{(2)} = A_{\varphi(i,j+1/2,k)}$; $A_{\varphi}^{(3)} = A_{\varphi(i+1,j-1/2,k)}$; $A_{\varphi}^{(4)} = A_{\varphi(i+1,j+1/2,k)}$; $A_z^{(1)} = A_{z(i,j,k-1/2)}$; $A_z^{(2)} = A_{z(i,j,k+1/2)}$; $A_z^{(3)} = A_{z(i+1,j,k-1/2)}$; $A_z^{(4)} = A_{z(i+1,j,k+1/2)}$.

O procedimento adotado para calcular $\left\langle \frac{1}{\rho} \frac{\partial \phi}{\partial \varphi} \right\rangle$ e $\left\langle \frac{\partial \phi}{\partial z} \right\rangle$ no ponto $(i+1/2,j,k)$ é semelhante ao realizado na aproximação do potencial vetor, tendo em vista que a aproximação discreta do gradiente do potencial escalar está associada aos mesmos pontos do potencial vetor. Sendo assim, tem-se:

$$\left\langle \frac{1}{\rho} \frac{\partial \phi}{\partial \varphi} \right\rangle \Big|_{(i+1/2,j,k)} = \frac{1}{4} \left[\left(\frac{\phi(i,j+1,k) - \phi(i,j-1,k)}{\rho_i \Delta \varphi} \right) + \left(\frac{\phi(i+1,j+1,k) - \phi(i+1,j-1,k)}{\rho_{i+1} \Delta \varphi} \right) \right] \quad (4-40)$$

$$\left\langle \frac{\partial \phi}{\partial z} \right\rangle \bigg|_{(i+1/2,j,k)} = \frac{1}{4} \left[\left(\frac{\phi_{(i,j,k+1)} - \phi_{(i,j,k-1)}}{\Delta z} \right) + \left(\frac{\phi_{(i+1,j,k+1)} - \phi_{(i+1,j,k-1)}}{\Delta z} \right) \right] \quad (4-41)$$

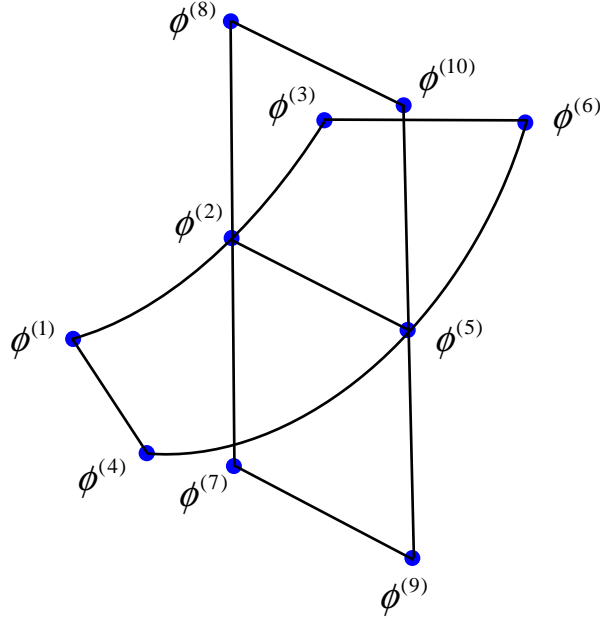


Figura 4.4: Geometria da grade entrelaçada utilizada para aproximar $\left\langle \frac{1}{\rho} \frac{\partial \phi}{\partial \varphi} \right\rangle$ e $\left\langle \frac{\partial \phi}{\partial z} \right\rangle$ no ponto $(i+1/2,j,k)$. $\phi^{(1)} = \phi_{(i,j-1,k)}$; $\phi^{(2)} = \phi_{(i,j,k)}$; $\phi^{(3)} = \phi_{(i,j+1,k)}$; $\phi^{(4)} = \phi_{(i+1,j-1,k)}$; $\phi^{(5)} = \phi_{(i+1,j,k)}$; $\phi^{(6)} = \phi_{(i+1,j+1,k)}$; $\phi^{(7)} = \phi_{(i,j,k-1)}$; $\phi^{(8)} = \phi_{(i,j,k+1)}$; $\phi^{(9)} = \phi_{(i+1,j,k-1)}$; $\phi^{(10)} = \phi_{(i+1,j,k+1)}$.

- Para a superfície \tilde{S}_φ :

$$\begin{aligned} & \oint_{\partial \tilde{S}_\varphi} \vec{H} \cdot d\vec{l} - (i\omega)^{-1} \iint_{\tilde{S}_\varphi} \mu_{\varphi\varphi}^{-1} \frac{1}{\rho} \frac{\partial \psi}{\partial \varphi} d\rho dz \\ & - \iint_{\tilde{S}_\varphi} (\sigma_{\varphi\rho} A_\rho + \sigma_{\varphi\varphi} A_\varphi + \sigma_{\varphi z} A_z) d\rho dz + (i\omega) \iint_{\tilde{S}_\varphi} \epsilon_{\varphi\varphi} A_\varphi d\rho dz \\ & - \iint_{\tilde{S}_\varphi} \left(\sigma_{\varphi\rho} \frac{\partial \phi}{\partial \rho} + \sigma_{\varphi\varphi} \frac{1}{\rho} \frac{\partial \phi}{\partial \varphi} + \sigma_{\varphi z} \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) d\rho dz + (i\omega) \iint_{\tilde{S}_\varphi} \epsilon_{\varphi\varphi} \frac{1}{\rho} \frac{\partial \phi}{\partial \varphi} d\rho dz = I_\varphi \end{aligned} \quad (4-42)$$

A discretização de (4-42) resulta na seguinte equação:

$$\begin{aligned}
& \Delta z [H_{z(i-1/2, j+1/2, k)} - H_{z(i+1/2, j+1/2, k)}] \\
& + (\rho_{i+1/2} - \rho_{i-1/2}) [H_{\rho(i, j+1/2, k+1/2)} - H_{\rho(i, j+1/2, k-1/2)}] \\
& - \frac{(\rho_{i+1/2} - \rho_{i-1/2}) \Delta z}{i\omega \mu_{\varphi\varphi(i, j, k)}} \left(\frac{\psi_{(i, j+1, k)} - \psi_{(i, j, k)}}{\rho_i \Delta \varphi} \right) \\
& - (\rho_{i+1/2} - \rho_{i-1/2}) \Delta z \langle \sigma_{\rho\varphi(i, j+1/2, k)} \rangle \langle A_{\rho(i, j+1/2, k)} \rangle \\
& + \langle \sigma_{\varphi\varphi(i, j+1/2, k)} \rangle A_{\varphi(i, j+1/2, k)} + \langle \sigma_{\varphi z(i, j+1/2, k)} \rangle \langle A_{z(i, j+1/2, k)} \rangle \\
& + (i\omega)(\rho_{i+1/2} - \rho_{i-1/2}) \Delta z \langle \epsilon_{\varphi\varphi(i, j+1/2, k)} \rangle A_{\varphi(i, j+1/2, k)} \\
& - (\rho_{i+1/2} - \rho_{i-1/2}) \Delta z \left\{ \langle \sigma_{\varphi\rho(i, j+1/2, k)} \rangle \left\langle \frac{\partial \phi}{\partial \rho} \right\rangle \right|_{(i, j+1/2, k)} \\
& + \langle \sigma_{\varphi\varphi(i, j+1/2, k)} \rangle \frac{1}{\rho_i} \left(\frac{\phi_{(i, j+1, k)} - \phi_{(i, j, k)}}{\Delta \varphi} \right) + \langle \sigma_{\varphi z(i, j+1/2, k)} \rangle \left\langle \frac{\partial \phi}{\partial z} \right\rangle \right|_{(i, j+1/2, k)} \left. \vphantom{\frac{1}{\rho_i}} \right\} \\
& + (i\omega)(\rho_{i+1/2} - \rho_{i-1/2}) \Delta z \langle \epsilon_{\varphi\varphi(i, j+1/2, k)} \rangle \frac{1}{\rho_i} \left(\frac{\phi_{(i, j+1, k)} - \phi_{(i, j, k)}}{\rho_i \Delta \varphi} \right) = I_{\varphi(i, j, k)}
\end{aligned} \tag{4-43}$$

$\langle \sigma_{\varphi w(i, j+1/2, k)} \rangle$ ($w \in \{\rho, \varphi, z\}$) e $\langle \epsilon_{\varphi\varphi(i, j+1/2, k)} \rangle$ estão definidos em (4-21) e (4-22), respectivamente.

As componentes $A_{\rho(i, j+1/2, k)}$ e $A_{z(i, j+1/2, k)}$ não estão definidas no ponto $(i, j+1/2, k)$ e, portanto, são interpoladas de componentes vizinhas através da seguinte aproximação:

$$\langle A_{\rho(i, j+1/2, k)} \rangle = \frac{1}{4} [A_{\rho(i-1/2, j, k)} + A_{\rho(i+1/2, j, k)} + A_{\rho(i-1/2, j+1, k)} + A_{\rho(i+1/2, j+1, k)}] \tag{4-44a}$$

$$\langle A_{z(i, j+1/2, k)} \rangle = \frac{1}{4} [A_{z(i, j, k-1/2)} + A_{z(i, j, k+1/2)} + A_{z(i, j+1, k-1/2)} + A_{z(i, j+1, k+1/2)}] \tag{4-44b}$$

De forma análoga, a aproximação de $\left\langle \frac{\partial \phi}{\partial \rho} \right\rangle$ e $\left\langle \frac{\partial \phi}{\partial z} \right\rangle$ é dada por:

$$\begin{aligned}
\left\langle \frac{\partial \phi}{\partial \rho} \right\rangle \bigg|_{(i, j+1/2, k)} = & \frac{1}{4} \left\{ \left(\frac{\phi_{(i+1, j, k)} - \phi_{(i, j, k)}}{\rho_{i+1} - \rho_i} \right) + \left(\frac{\phi_{(i, j, k)} - \phi_{(i-1, j, k)}}{\rho_i - \rho_{i-1}} \right) \right. \\
& \left. + \left(\frac{\phi_{(i+1, j+1, k)} - \phi_{(i, j+1, k)}}{\rho_{i+1} - \rho_i} \right) + \left(\frac{\phi_{(i, j+1, k)} - \phi_{(i-1, j+1, k)}}{\rho_i - \rho_{i-1}} \right) \right\} \tag{4-45}
\end{aligned}$$

$$\left\langle \frac{\partial \phi}{\partial z} \right\rangle \Big|_{(i,j+1/2,k)} = \frac{1}{4} \left[\left(\frac{\phi(i,j,k+1) - \phi(i,j,k-1)}{\Delta z} \right) + \left(\frac{\phi(i,j+1,k+1) - \phi(i,j+1,k-1)}{\Delta z} \right) \right] \quad (4-46)$$

- Para a superfície \tilde{S}_z :

$$\oint_{\partial \tilde{S}_z} \vec{H} \cdot d\vec{l} - (i\omega)^{-1} \iint_{\tilde{S}_z} \mu_{zz}^{-1} \frac{\partial \psi}{\partial z} \rho d\rho d\varphi - \iint_{\tilde{S}_z} (\sigma_{z\rho} A_\rho + \sigma_{z\varphi} A_\varphi + \sigma_{zz} A_z) \rho d\rho d\varphi + (i\omega) \iint_{\tilde{S}_z} \epsilon_{zz} A_z \rho d\rho d\varphi - \iint_{\tilde{S}_z} \left(\sigma_{z\rho} \frac{\partial \phi}{\partial \rho} + \sigma_{z\varphi} \frac{\partial \phi}{\partial \varphi} + \sigma_{zz} \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) \rho d\rho d\varphi + (i\omega) \iint_{\tilde{S}_z} \epsilon_{zz} \frac{\partial \phi}{\partial z} \rho d\rho d\varphi = I_z \quad (4-47)$$

Efetuada-se as integrações em (4-47), obtém-se:

$$\begin{aligned} & (\rho_{i+1/2} - \rho_{i-1/2}) [H_{\rho(i,j-1/2,k+1/2)} - H_{\rho(i,j+1/2,k+1/2)}] \\ & + \Delta\varphi [\rho_{i+1/2} H_{\varphi(i+1/2,j,k+1/2)} - \rho_{i-1/2} H_{\varphi(i-1/2,j,k+1/2)}] \\ & - \frac{\Delta\varphi}{(i\omega)\mu_{zz(i,j,k)}} \left(\frac{(\rho_{i+1/2})^2 - (\rho_{i-1/2})^2}{2} \right) \left(\frac{\psi(i,j,k+1) - \psi(i,j,k)}{\Delta z} \right) \\ & - \left(\frac{(\rho_{i+1/2})^2 - (\rho_{i-1/2})^2}{2} \right) \Delta\varphi \left\{ \langle \sigma_{z\rho(i,j,k+1/2)} \rangle \langle A_{\rho(i,j,k+1/2)} \rangle \right. \\ & \left. + \langle \sigma_{z\varphi(i,j,k+1/2)} \rangle \langle A_{\varphi(i,j,k+1/2)} \rangle + \langle \sigma_{zz(i,j,k+1/2)} \rangle A_{z(i,j,k+1/2)} \right\} \\ & - \left(\frac{(\rho_{i+1/2})^2 - (\rho_{i-1/2})^2}{2} \right) \Delta\varphi \left\{ \langle \sigma_{z\rho(i,j,k+1/2)} \rangle \left\langle \frac{\partial \phi}{\partial \rho} \right\rangle \Big|_{(i,j+1/2,k)} \right. \\ & \left. + \langle \sigma_{z\varphi(i,j,k+1/2)} \rangle \left\langle \frac{1}{\rho} \frac{\partial \phi}{\partial \varphi} \right\rangle \Big|_{(i,j,k+1/2)} + \langle \sigma_{zz(i,j,k+1/2)} \rangle \left(\frac{\phi(i,j,k+1) - \phi(i,j,k)}{\Delta z} \right) \right\} \\ & + (i\omega) \left(\frac{(\rho_{i+1/2})^2 - (\rho_{i-1/2})^2}{2} \right) \Delta\varphi \langle \epsilon_{zz(i,j,k+1/2)} \rangle A_{z(i,j,k+1/2)} = I_{z(i,j,k)} \end{aligned} \quad (4-48)$$

$\langle \sigma_{\varphi w(i,j+1/2,k)} \rangle$ ($w \in \{\rho, \varphi, z\}$) e $\langle \epsilon_{\varphi\varphi(i,j+1/2,k)} \rangle$ estão definidos em (4-27) e (4-29), respectivamente.

Os valores de $\langle A_{\rho(i,j,k+1/2)} \rangle$, $\langle A_{\varphi(i,j,k+1/2)} \rangle$, $\left\langle \frac{1}{\rho} \frac{\partial \phi}{\partial \varphi} \right\rangle$ e $\left\langle \frac{1}{\rho} \frac{\partial \phi}{\partial \varphi} \right\rangle$ no ponto $(i, j, k + 1/2)$, são dados pelas seguintes expressões:

$$\langle A_{\rho(i,j,k+1/2)} \rangle = \frac{1}{4} [A_{\rho(i,j-1/2,k)} + A_{\rho(i,j+1/2,k)} + A_{\rho(i,j-1/2,k+1)} + A_{\rho(i,j+1/2,k+1)}] \quad (4-49a)$$

$$\langle A_{\varphi(i,j,k+1/2)} \rangle = \frac{1}{4} [A_{\varphi(i,j-1/2,k)} + A_{\varphi(i,j+1/2,k)} + A_{\varphi(i,j-1/2,k+1)} + A_{\varphi(i,j+1/2,k+1)}] \quad (4-49b)$$

e

$$\left\langle \frac{\partial \phi}{\partial \rho} \right\rangle \Big|_{(i,j,k+1/2)} = \frac{1}{4} \left\{ \left(\frac{\phi_{(i+1,j,k)} - \phi_{(i,j,k)}}{\rho_{i+1} - \rho_i} \right) + \left(\frac{\phi_{(i,j,k)} - \phi_{(i-1,j,k)}}{\rho_i - \rho_{i-1}} \right) + \left(\frac{\phi_{(i+1,j,k+1)} - \phi_{(i,j,k+1)}}{\rho_{i+1} - \rho_i} \right) + \left(\frac{\phi_{(i,j,k+1)} - \phi_{(i-1,j,k+1)}}{\rho_i - \rho_{i-1}} \right) \right\} \quad (4-50)$$

$$\left\langle \frac{1}{\rho} \frac{\partial \phi}{\partial \varphi} \right\rangle \Big|_{(i,j,k+1/2)} = \frac{1}{4} \left[\left(\frac{\phi_{(i,j+1,k)} - \phi_{(i,j-1,k)}}{\rho_i \Delta \varphi} \right) + \left(\frac{\phi_{(i+1,j+1,k)} - \phi_{(i+1,j-1,k)}}{\rho_{i+1} \Delta \varphi} \right) \right] \quad (4-51)$$

2. Discretização de (4-35b):

Integrando-se a lei de Faraday (4-35b) sobre as faces primárias S_ρ , S_φ e S_z , determina-se as componentes do campo magnético nas direções ρ , φ e z , respectivamente. As áreas das superfícies de integração S_ρ , S_φ e S_z são dadas respectivamente em (3-4a), (3-4b) e (3-4c). As componentes de \vec{H} são definidas pelas seguintes expressões:

$$H_{\rho(i,j+1/2,k+1/2)} = \frac{1}{i\omega \langle \mu_{\rho\rho(i,j+1/2,k+1/2)} \rangle} \left(\frac{A_{z(i,j+1,k+1/2)} - A_{z(i,j,k+1/2)}}{\rho_i \Delta \varphi} + \frac{A_{\varphi(i,j+1/2,k)} - A_{\varphi(i,j+1/2,k+1)}}{\Delta z} \right) \quad (4-52a)$$

$$H_{\varphi(i+1/2,j,k+1/2)} = \frac{1}{i\omega \langle \mu_{\varphi\varphi(i+1/2,j,k+1/2)} \rangle} \frac{1}{(\rho_{i+1} - \rho_i) \Delta z} \left(\frac{A_{\rho(i+1/2,j,k+1)} - A_{\rho(i+1/2,j,k)}}{\Delta z} + \frac{A_{z(i,j,k+1/2)} - A_{z(i+1,j,k+1/2)}}{\rho_{i+1} - \rho_i} \right) \quad (4-52b)$$

$$H_{z(i+1/2,j+1/2,k)} = \frac{1}{i\omega \langle \mu_{zz(i+1/2,j+1/2,k)} \rangle} \left(\frac{2}{(\rho_{i+1})^2 - (\rho_i)^2} \right) \frac{1}{\Delta\varphi} \cdot \\ (\rho_{i+1} - \rho_i)(A_{\rho(i+1/2,j,k)} - A_{\rho(i+1/2,j+1,k)}) \\ + \Delta\varphi(\rho_{i+1}A_{\varphi(i+1,j+1/2,k)} - \rho_iA_{\varphi(i,j+1/2,k)}) \quad (4-52c)$$

onde $\langle \mu_{\rho\rho(i,j+1/2,k+1/2)} \rangle$, $\langle \mu_{\varphi\varphi(i+1/2,j,k+1/2)} \rangle$ e $\langle \mu_{zz(i+1/2,j+1/2,k)} \rangle$ são os valores médios definidos em (4-32), (4-33) e (4-34), respectivamente.

3. Discretização de (4-35c):

A variável auxiliar ψ é determinada através da discretização de (4-35c). Aplicando-se o teorema da divergência de Gauss em (4-35c), a integração volumétrica do lado direito de (4-35c) é reduzida a uma integral de superfície. A equação discretizada é então dada por:

$$\psi_{(i+1,j+1,k+1)} = \frac{1}{\Delta\varphi\Delta z} \left(\frac{2}{(\rho_{i+3/2})^2 - (\rho_{i+1/2})^2} \right) \cdot \\ \left\{ \Delta\varphi\Delta z (\rho_{i+3/2}A_{\rho(i+3/2,j+1,k+1)} - \rho_{i+1/2}A_{\rho(i+1/2,j+1,k+1)}) \right. \\ \left. + (\rho_{i+3/2} - \rho_{i+1/2}) \Delta z (A_{\varphi(i+1,j+3/2,k+1)} - A_{\varphi(i+1,j+1/2,k+1)}) \right. \\ \left. + \left(\frac{(\rho_{i+3/2})^2 - (\rho_{i+1/2})^2}{2} \right) \Delta\varphi (A_{z(i+1,j+1,k+3/2)} - A_{z(i+1,j+1,k+1/2)}) \right\}. \quad (4-53)$$

3. Discretização de (4-35d):

Para discretizar a equação (4-35d), aplica-se o teorema de Gauss em (4-35d), aproximando a divergência de \vec{A} e $\nabla\phi$ sobre o volume da célula dual \tilde{V} (definido em (3-5)). Sendo assim, (4-35d) pode ser expressa por:

$$-\oint_{\tilde{S}} \bar{\sigma} \vec{A} \cdot d\vec{s} + \oint_{\tilde{S}} (i\omega) \bar{\epsilon} \vec{A} \cdot d\vec{s} - \oint_{\tilde{S}} \bar{\sigma} \nabla\phi \cdot d\vec{s} + \oint_{\tilde{S}} (i\omega) \bar{\epsilon} \nabla\phi \cdot d\vec{s} = 0 \quad (4-54)$$

onde

$$-\oint_{\tilde{S}} \bar{\sigma} \vec{A} \cdot d\vec{s} = \\ -\Delta\varphi\Delta z \left\{ \rho_{i+1/2} \langle \sigma_{\rho\rho(i+1/2,j,k)} \rangle A_{\rho(i+1/2,j,k)} - \rho_{i-1/2} \langle \sigma_{\rho\rho(i-1/2,j,k)} \rangle A_{\rho(i-1/2,j,k)} \right. \\ \left. + \rho_{i+1/2} \langle \sigma_{\rho\varphi(i+1/2,j,k)} \rangle \langle A_{\varphi(i+1/2,j,k)} \rangle - \rho_{i-1/2} \langle \sigma_{\rho\varphi(i-1/2,j,k)} \rangle \langle A_{\varphi(i-1/2,j,k)} \rangle \right.$$

$$\begin{aligned}
& + \rho_{i+1/2} \langle \sigma_{\rho z(i+1/2,j,k)} \rangle \langle A_{z(i+1/2,j,k)} \rangle - \rho_{i-1/2} \langle \sigma_{\rho z(i-1/2,j,k)} \rangle \langle A_{z(i-1/2,j,k)} \rangle \Big\} \\
& - (\rho_{i+1/2} + \rho_{i-1/2}) \Delta z \Big\{ \langle \sigma_{\varphi \rho(i,j+1/2,k)} \rangle \langle A_{\rho(i,j+1/2,k)} \rangle - \langle \sigma_{\varphi \rho(i,j-1/2,k)} \rangle \langle A_{\rho(i,j-1/2,k)} \rangle \\
& + \langle \sigma_{\varphi \varphi(i,j+1/2,k)} \rangle A_{\varphi(i,j+1/2,k)} - \langle \sigma_{\varphi \varphi(i,j-1/2,k)} \rangle A_{\varphi(i,j-1/2,k)} \\
& + \langle \sigma_{\varphi z(i,j+1/2,k)} \rangle \langle A_{z(i,j+1/2,k)} \rangle - \langle \sigma_{\varphi z(i,j-1/2,k)} \rangle \langle A_{z(i,j-1/2,k)} \rangle \Big\} \\
& - \left(\frac{(\rho_{i+1/2})^2 - (\rho_{i-1/2})^2}{2} \right) \Delta \varphi \Big\{ \langle \sigma_{z \rho(i,j,k+1/2)} \rangle \langle A_{\rho(i,j,k+1/2)} \rangle \\
& - \langle \sigma_{z \rho(i,j,k-1/2)} \rangle \langle A_{\rho(i,j,k-1/2)} \rangle + \langle \sigma_{z \varphi(i,j,k+1/2)} \rangle \langle A_{\varphi(i,j,k+1/2)} \rangle \\
& - \langle \sigma_{z \varphi(i,j,k-1/2)} \rangle \langle A_{\varphi(i,j,k-1/2)} \rangle + \langle \sigma_{zz(i,j,k+1/2)} \rangle A_{z(i,j,k+1/2)} \\
& - \langle \sigma_{zz(i,j,k-1/2)} \rangle A_{z(i,j,k-1/2)} \Big\} \quad (4-55)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \oint_{\vec{S}} (i\omega) \vec{\bar{E}} \cdot d\vec{S} = \\
& (i\omega) \Delta \varphi \Delta z \Big\{ \rho_{i+1/2} \langle \epsilon_{\rho \rho(i+1/2,j,k)} \rangle A_{\rho(i+1/2,j,k)} - \rho_{i-1/2} \langle \epsilon_{\rho \rho(i-1/2,j,k)} \rangle A_{\rho(i-1/2,j,k)} \Big\} \\
& + (i\omega) (\rho_{i+1/2} + \rho_{i-1/2}) \Delta z \Big\{ \langle \epsilon_{\varphi \varphi(i,j+1/2,k)} \rangle A_{\varphi(i,j+1/2,k)} - \langle \epsilon_{\varphi \varphi(i,j-1/2,k)} \rangle A_{\varphi(i,j-1/2,k)} \Big\} \\
& + (i\omega) \left(\frac{(\rho_{i+1/2})^2 - (\rho_{i-1/2})^2}{2} \right) \Delta \varphi \Big\{ \langle \epsilon_{zz(i,j,k+1/2)} \rangle A_{z(i,j,k+1/2)} \\
& - \langle \epsilon_{zz(i,j,k-1/2)} \rangle A_{z(i,j,k-1/2)} \Big\} \quad (4-56)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \oint_{\vec{S}} \vec{\bar{\sigma}} \cdot d\vec{S} = \\
& - \Delta \varphi \Delta z \Big\{ \rho_{i+1/2} \langle \sigma_{\rho \rho(i+1/2,j,k)} \rangle \left(\frac{\phi_{(i+1,j,k)} - \phi_{(i,j,k)}}{\rho_{i+1} - \rho_i} \right) \\
& - \rho_{i-1/2} \langle \sigma_{\rho \rho(i-1/2,j,k)} \rangle \left(\frac{\phi_{(i,j,k)} - \phi_{(i-1,j,k)}}{\rho_i - \rho_{i-1}} \right) \\
& + \rho_{i+1/2} \langle \sigma_{\rho \varphi(i+1/2,j,k)} \rangle \left\langle \frac{1}{\rho} \frac{\partial \phi}{\partial \varphi} \right\rangle \Big|_{(i+1/2,j,k)} - \rho_{i-1/2} \langle \sigma_{\rho \varphi(i-1/2,j,k)} \rangle \left\langle \frac{1}{\rho} \frac{\partial \phi}{\partial \varphi} \right\rangle \Big|_{(i-1/2,j,k)} \Big\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \rho_{i+1/2} \langle \sigma_{\rho z(i+1/2,j,k)} \rangle \left\langle \frac{\partial \phi}{\partial z} \right\rangle \Big|_{(i+1/2,j,k)} - \rho_{i-1/2} \langle \sigma_{\rho z(i-1/2,j,k)} \rangle \left\langle \frac{\partial \phi}{\partial z} \right\rangle \Big|_{(i-1/2,j,k)} \Big\} \\
& - (\rho_{i+1/2} + \rho_{i-1/2}) \Delta z \left\{ \langle \sigma_{\varphi \rho(i,j+1/2,k)} \rangle \left\langle \frac{\partial \phi}{\partial \rho} \right\rangle \Big|_{(i,j+1/2,k)} \right. \\
& - \langle \sigma_{\varphi \rho(i,j-1/2,k)} \rangle \left\langle \frac{\partial \phi}{\partial \rho} \right\rangle \Big|_{(i,j-1/2,k)} + \langle \sigma_{\varphi \varphi(i,j+1/2,k)} \rangle A_{\varphi(i,j+1/2,k)} \\
& - \langle \sigma_{\varphi \varphi(i,j-1/2,k)} \rangle A_{\varphi(i,j-1/2,k)} + \langle \sigma_{\varphi z(i,j+1/2,k)} \rangle \left\langle \frac{\partial \phi}{\partial z} \right\rangle \Big|_{(i,j+1/2,k)} \\
& - \left. \langle \sigma_{\varphi z(i,j-1/2,k)} \rangle \left\langle \frac{\partial \phi}{\partial z} \right\rangle \Big|_{(i,j-1/2,k)} \right\} \\
& - \left(\frac{(\rho_{i+1/2})^2 - (\rho_{i-1/2})^2}{2} \right) \Delta \varphi \left\{ \langle \sigma_{z \rho(i,j,k+1/2)} \rangle \left\langle \frac{\partial \phi}{\partial \rho} \right\rangle \Big|_{(i,j,k+1/2)} \right. \\
& - \langle \sigma_{z \rho(i,j,k-1/2)} \rangle \left\langle \frac{\partial \phi}{\partial \rho} \right\rangle \Big|_{(i,j,k-1/2)} + \langle \sigma_{z \varphi(i,j,k+1/2)} \rangle \left\langle \frac{1}{\rho} \frac{\partial \phi}{\partial \varphi} \right\rangle \Big|_{(i,j,k+1/2)} \\
& - \langle \sigma_{z \varphi(i,j,k-1/2)} \rangle \left\langle \frac{1}{\rho} \frac{\partial \phi}{\partial \varphi} \right\rangle \Big|_{(i,j,k-1/2)} + \langle \sigma_{zz(i,j,k+1/2)} \rangle A_{z(i,j,k+1/2)} \\
& - \left. \langle \sigma_{zz(i,j,k-1/2)} \rangle A_{z(i,j,k-1/2)} \right\} \quad (4-57)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \oint_{\vec{S}} (i\omega) \bar{\epsilon} \nabla \phi \cdot d\vec{s} = \\
& (i\omega) \Delta \varphi \Delta z \left\{ \rho_{i+1/2} \langle \epsilon_{\rho \rho(i+1/2,j,k)} \rangle \left(\frac{\phi_{(i+1,j,k)} - \phi_{(i,j,k)}}{\rho_{i+1} - \rho_i} \right) \right. \\
& \quad \left. - \rho_{i-1/2} \langle \epsilon_{\rho \rho(i-1/2,j,k)} \rangle \left(\frac{\phi_{(i,j,k)} - \phi_{(i-1,j,k)}}{\rho_i - \rho_{i-1}} \right) \right\} \\
& + (i\omega) (\rho_{i+1/2} + \rho_{i-1/2}) \Delta z \left\{ \langle \epsilon_{\varphi \varphi(i,j+1/2,k)} \rangle \frac{1}{\rho_i} \left(\frac{\phi_{(i,j+1,k)} - \phi_{(i,j,k)}}{\Delta \varphi} \right) \right. \\
& \quad \left. - \langle \epsilon_{\varphi \varphi(i,j-1/2,k)} \rangle \frac{1}{\rho_i} \left(\frac{\phi_{(i,j,k)} - \phi_{(i,j-1,k)}}{\Delta \varphi} \right) \right\} \\
& + (i\omega) \left(\frac{(\rho_{i+1/2})^2 - (\rho_{i-1/2})^2}{2} \right) \Delta \varphi \left\{ \langle \epsilon_{zz(i,j,k+1/2)} \rangle \left(\frac{\phi_{(i,j,k+1)} - \phi_{(i,j,k)}}{\Delta z} \right) \right. \\
& \quad \left. - \langle \epsilon_{zz(i,j,k-1/2)} \rangle \left(\frac{\phi_{(i,j,k)} - \phi_{(i,j,k-1)}}{\Delta z} \right) \right\} \quad (4-58)
\end{aligned}$$

Todas as quantidades médias presentes nas equações (4-55)-(4-58) foram definidas nos itens anteriores.

Substituindo-se (4-52) (componentes de \vec{H}) e (4-53) (variável auxiliar ψ) em (4-38), (4-43) e (4-48), obtém-se um sistema linear complexo não-Hermitiano, cujas incógnitas são as componentes do potencial vetor \vec{A} e o potencial escalar ϕ . As expressões dos elementos da matriz do sistema encontram-se no Apêndice E.

4.5

Simulações numéricas

Os modelos anisotrópicos desenvolvidos nas seções anteriores são validados através de comparações com o método das diferenças finitas no domínio do tempo (FDTD) e com o método do casamento dos modos (NMM) em dois tipos de cenários: (i) formações homogêneas anisotrópicas e (ii) formações não homogêneas com leitos inclinados anisotrópicos. Os resultados obtidos por FDTD e NMM foram extraídos das referências [54] e [55], respectivamente. Além dos exemplos utilizados para validação dos modelos, investiga-se a influência do fluido de perfuração na resposta do sensor em formações anisotrópicas.

A configuração da ferramenta LWD utilizada nas simulações é a mesma ilustrada na figura 3.8. Assim como no modelo isotrópico, a grade computacional é uniforme nas regiões azimutal e longitudinal e não uniforme na direção radial. Novamente, dois métodos iterativos são implementados e comparados: método dos gradientes biconjugados estabilizados (Bi-CGStab) e método generalizado dos mínimos resíduos reinicializado (RGMRES).

4.5.1

Formações anisotrópicas homogêneas

Os resultados de uma simulação por FVM da resposta elétrica do sensor LWD operando em uma formação anisotrópica homogênea. As tabelas 4.1 e 4.2 mostram a taxa de amplitude e a diferença de fase (formulação por campos) em função da taxa de anisotropia e do ângulo de inclinação, respectivamente. Os resultados obtidos através da formulação por potenciais estão mostrados nas tabelas 4.3 e 4.4. O domínio é discretizado utilizando uma grade $(N_\rho, N_\varphi, N_z) = (50, 10, 230)$. O tamanho das células é uniforme na direção z , com $\Delta z = 2,54$ cm e na direção radial varia de 0,635 a 5,03 cm. O poço é preenchido por um fluido a base de óleo, cuja condutividade é igual a $\sigma = 5 \times 10^{-4}$ S/m. Os resultados mostram uma concordância muito boa entre os resultados obtidos pelo FVM e FDTD [54] para as taxas de anisotropia e os ângulos de inclinação considerados. As discrepâncias entre os resultados são satisfatórias, não excedendo a 1,2% na taxa de amplitude e 0,6 graus na

diferença de fase. Observa-se que a resposta do sensor LWD é sensível à taxa de anisotropia e ao ângulo de inclinação.

Tabela 4.1: Taxa de Amplitude em função da taxa de anisotropia e do ângulo de inclinação - Formulação por campos

	$k_a = 0.5$		$k_a = 0.8$		$k_a = 1.1$	
θ_0	FVM	FDTD	FVM	FDTD	FVM	FDTD
0°	2,104	2,088	2,104	2,088	2,104	2,088
15°	2,118	2,102	2,109	2,092	2,103	2,087
30°	2,160	2,146	2,122	2,104	2,099	2,083
45°	2,227	2,208	2,141	2,123	2,094	2,078
60°	2,279	2,254	2,159	2,142	2,088	2,073

Tabela 4.2: Diferença de fase em função da taxa de anisotropia e ângulo de inclinação - Formulação por campos

	$k_a = 0.5$		$k_a = 0.8$		$k_a = 1.1$	
θ_0	FVM	FDTD	FVM	FDTD	FVM	FDTD
0°	14,524	14,911	14,590	14,911	14,590	14,911
15°	15,613	15,941	14,813	15,105	14,542	14,895
30°	16,917	16,853	15,251	15,548	14,348	14,703
45°	16,707	17,176	15,740	15,865	14,090	14,558
60°	15,391	15,323	16,115	16,038	13,797	14,205

Tabela 4.3: Taxa de Amplitude em função da taxa de anisotropia e do ângulo de inclinação - Formulação por potenciais

	$k_a = 0.5$		$k_a = 0.8$		$k_a = 1.1$	
θ_0	FVM	FDTD	FVM	FDTD	FVM	FDTD
0°	2,106	2,088	2,106	2,088	2,106	2,088
15°	2,118	2,102	2,110	2,092	2,104	2,087
30°	2,160	2,146	2,122	2,104	2,098	2,083
45°	2,212	2,208	2,141	2,123	2,094	2,078
60°	2,279	2,254	2,159	2,142	2,088	2,073

4.5.2

Leitos inclinados anisotrópicos

Neste exemplo investiga-se a influência da presença de leitos inclinados anisotrópicos na formação. O cenário é semelhante ao apresentado na figura 3.9. As simulações por FVM utilizam uma grade cilíndrica $(N_\rho, N_\varphi, N_z) = (50, 10, 350)$. A camada superior e inferior são isotrópicas com $\sigma = 1$ S/m. A

Tabela 4.4: Diferença de fase em função da taxa de anisotropia e ângulo de inclinação - Formulação por potenciais

	$k_a = 0.5$		$k_a = 0.8$		$k_a = 1.1$	
θ_0	FVM	FDTD	FVM	FDTD	FVM	FDTD
0°	14,646	14,911	14,680	14,911	14,679	14,911
15°	15,616	15,941	14,809	15,105	14,573	14,895
30°	16,921	16,853	15,252	15,548	14,381	14,703
45°	16,644	17,176	15,744	15,865	14,078	14,558
60°	15,067	15,323	16,115	16,038	13,810	14,205

camada intermediária é um leito anisotrópico inclinado com espessura de 60 polegadas e condutividades perpendicular e paralela iguais a $\sigma_\perp = 0,01$ S/m e $\sigma_\parallel = 0,1$ S/m, respectivamente. A condutividade do fluido de perfuração é igual a 5×10^{-4} S/m. Na direção radial o tamanho das células varia de 0,635 até 7,12 cm, e na direção longitudinal $\Delta z = 2,54$ cm. A resposta do sensor LWD perfurando um leito inclinado anisotrópico está mostrada na figura 4.5. Os resultados mostram uma concordância excelente entre os métodos FVM e NMM [55] para os ângulos de inclinação considerados. A tabela 4.5 lista o número de iterações e o tempo de processamento em função da profundidade de investigação. Nesta simulação foi utilizada a formulação de campos. Assim como no modelo isotrópico o método iterativo Bi-CGStab converge mais rápido que o método RGMRES.

4.5.3

Efeitos do fluido de perfuração

Para ilustrar o efeito do fluido de perfuração na resposta do sensor LWD em formações anisotrópicas, considera-se uma formação anisotrópica homogênea. Dois valores para a condutividade perpendicular são considerados, mantendo-se a taxa de anisotropia: $\sigma_\perp = 0,5$ S/m e $\sigma_\perp = 10$ S/m. A grade computacional tem $(N_\rho, N_\varphi, N_z) = (50, 10, 230)$ células. O tamanho das células é uniforme na direção z , com $\Delta z = 2,54$ cm e na direção radial varia de 0,635 a 5,03 cm. As figuras 4.6 e 4.7 ilustram a resposta do sensor em função da condutividade do fluido para $\sigma_\perp = 0,5$ S/m e $\sigma_\perp = 10$ S/m, respectivamente. Observa-se que, para o caso $\sigma_\perp = 10$ S/m, a resposta do sensor apresenta uma variação significativa quando fluidos de perfuração com condutividade acima de 0,1 S/m são utilizados. Para $\sigma_\perp = 0,5$ S/m, entretanto, este efeito é bem menos pronunciado. Em formações isotrópicas ($k_a = 1$), a resposta do sensor não sofre alteração.

Tabela 4.5: Número de iterações e tempo de processamento dos métodos Bi-CGStab e RGMRES em função da profundidade. ($\theta_0 = 30^\circ$)

Profundidade (pol.)	Bi-CGStab		RGMRES	
	Iterações	Tempo de CPU (s)	Iterações	Tempo de CPU (s)
-100	25	98	60	240
-90	25	98	60	241
-80	25	99	60	241
-70	30	118	80	323
-60	49	191	100	403
-50	78	303	170	683
-40	90	349	280	1124
-30	112	434	430	1726
-20	158	612	520	2087
-10	147	566	690	2768
0	210	807	950	3802
10	191	733	890	3555
20	193	742	820	3276
30	192	739	460	1838
40	142	548	460	1838
50	199	771	810	3236
60	169	650	900	3595
70	237	913	980	3915
80	157	605	690	2761
90	132	507	510	2047
100	106	411	430	1726

4.6

Comparação entre as formulações por campos e por potenciais

Nesta seção comparam-se as formulações de campos e de potenciais vetor e escalar em termos da taxa de convergência e do tempo de processamento em regiões anisotrópicas. Os sistemas de equações lineares esparsos para determinação dos campos ou dos potenciais são resolvidos pelo método dos gradientes biconjugados estabilizados (Bi-CGStab) com preconditionador SSOR (*Symmetric Successive Over-relaxation*).

O primeiro exemplo refere-se à simulação da resposta do sensor LWD em formações homogêneas anisotrópicas. A grade cilíndrica utilizada tem $(N_\rho, N_\varphi, N_z) = (50, 10, 230)$ células. O tamanho das células é uniforme na direção z , com $\Delta z = 2,54$ cm e na direção radial varia de 0,635 a 5,03 cm. A condutividade do fluido de perfuração é igual a $\sigma = 5 \times 10^{-4}$ S/m. Neste caso, observa-se que a formulação por campos é mais vantajosa em termos de tempo de processamento que a formulação por potenciais. Na formulação por

potenciais, o custo por iteração é mais elevado.

Tabela 4.6: Número de iterações e tempo de processamento em função da taxa de anisotropia - ($\theta_0 = 45^\circ$)

k_a	Formulação por Campos		Formulação por Potenciais	
	Iterações	Tempo de CPU (s)	Iterações	Tempo de CPU (s)
0,5	351	661	1961	9522
0,6	339	638	803	3888
0,7	369	695	450	2180
0,8	188	355	234	1136
0,9	163	308	150	728
1,0	35	67	31	153
1,1	175	330	110	535
1,2	193	363	129	628
1,3	388	726	189	917
1,4	345	648	239	1164
1,5	364	684	905	4380

Tabela 4.7: Número de iterações e tempo de processamento em função da profundidade ($\theta_0 = 30^\circ$)

Profundidade (in)	Formulação por Campos		Formulação por Potenciais	
	Iterações	Tempo de CPU (s)	Iterações	Tempo de CPU (s)
-100	30	48	25	98
-80	45	71	25	99
-60	95	150	49	191
-40	200	310	90	349
-20	474	741	158	612
0	2431	3773	210	807
20	3588	5571	193	742
40	2399	3727	142	548
60	2615	4070	169	650
80	712	1106	157	605
100	339	527	106	411

A segunda simulação é realizada em formações com leitos inclinados anisotrópicos. A discretização utiliza uma grade cilíndrica $(N_\rho, N_\varphi, N_z) = (50, 10, 350)$. A camada superior e inferior são isotrópicas com $\sigma = 1$ S/m. A camada intermediária é um leito inclinado anisotrópico com espessura de 60 polegadas e condutividades perpendicular e paralela iguais a $\sigma_\perp = 0,01$ S/m e $\sigma_\parallel = 0,1$ S/m, respectivamente. O poço é preenchido por um fluido com condutividade igual a 5×10^{-4} S/m. Na direção radial o tamanho das

Tabela 4.8: Número de iterações e tempo de processamento em função do ângulo de inclinação

θ_0 (Graus)	Formulação por Campos		Formulação por Potenciais	
	Iterações	Tempo de CPU (s)	Iterações	Tempo de CPU (s)
0	35	57	35	137
15	2733	4334	163	628
30	2431	3773	213	809
60	4904	7745	399	1517

células varia de 0,635 até 7,12 cm, e na direção longitudinal $\Delta z = 2,54$ cm. Assim como nos modelos isotrópicos, a convergência deteriora quando o transmissor está posicionado próximo da interface do leito. A convergência das formulações por campos e por potenciais está ilustrada na Tabela 4.7. Na tabela 4.8 estão listados o número de iterações e o tempo de processamento para quatro ângulos de inclinação: $\theta_0 = 0^\circ, 15^\circ, 30^\circ$ e 60° . Neste exemplo, o transmissor está posicionado na interface entre a camada inferior e o leito (ponto 1 da figura 3.9), que representa a interface entre o leito e a região homogênea. Nota-se que a formulação por potenciais é menos mal condicionada e mantém o número de iterações em níveis aceitáveis.

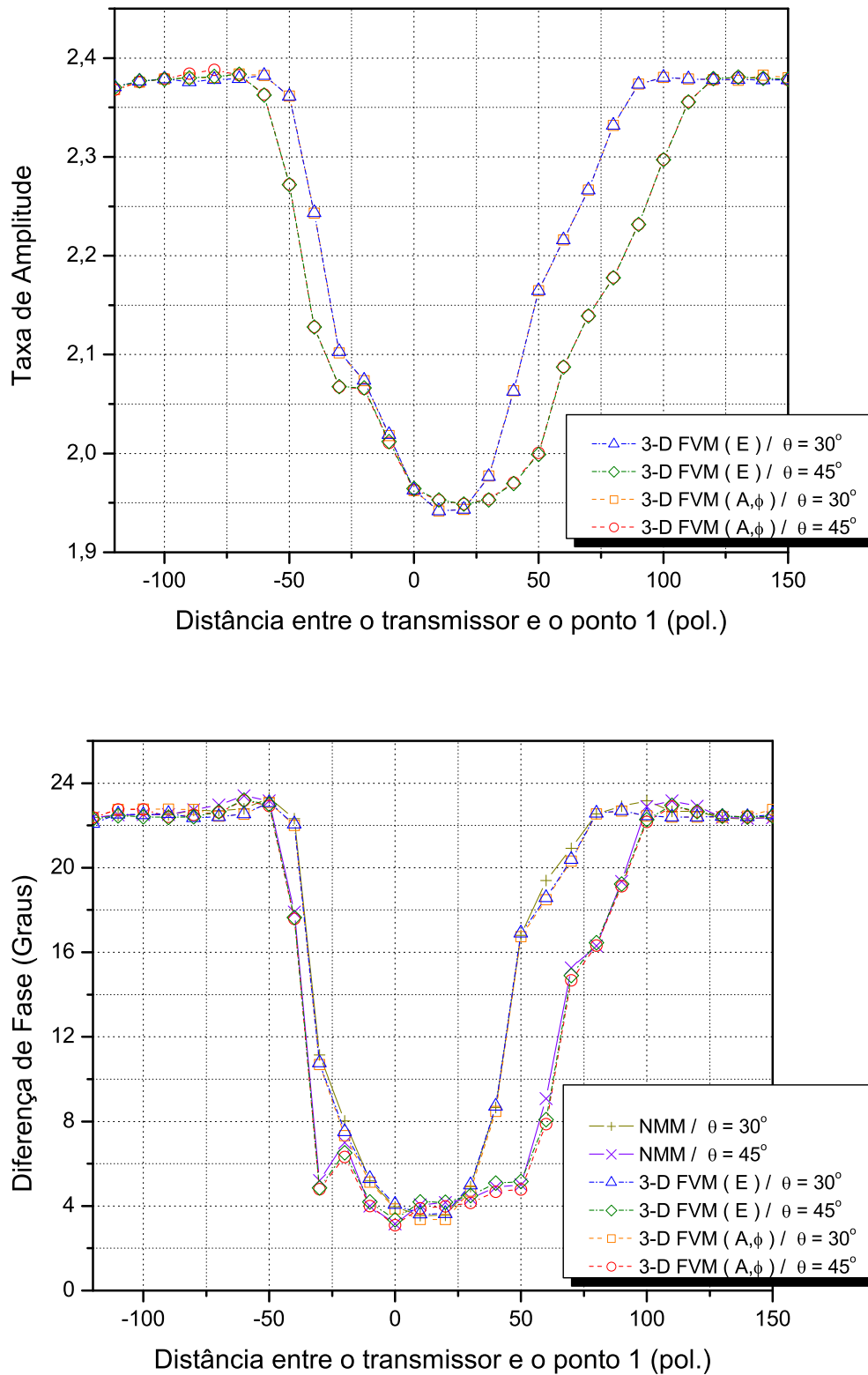


Figura 4.5: Simulação da resposta do sensor LWD atravessando um leito inclinado anisotrópico com espessura de 60 polegadas e condutividades perpendicular e paralela iguais a $\sigma_\perp = 0,01$ S/m e $\sigma_\parallel = 0,1$ S/m, respectivamente. O poço é preenchido por um fluido cuja condutividade é igual a 5×10^{-4} S/m.

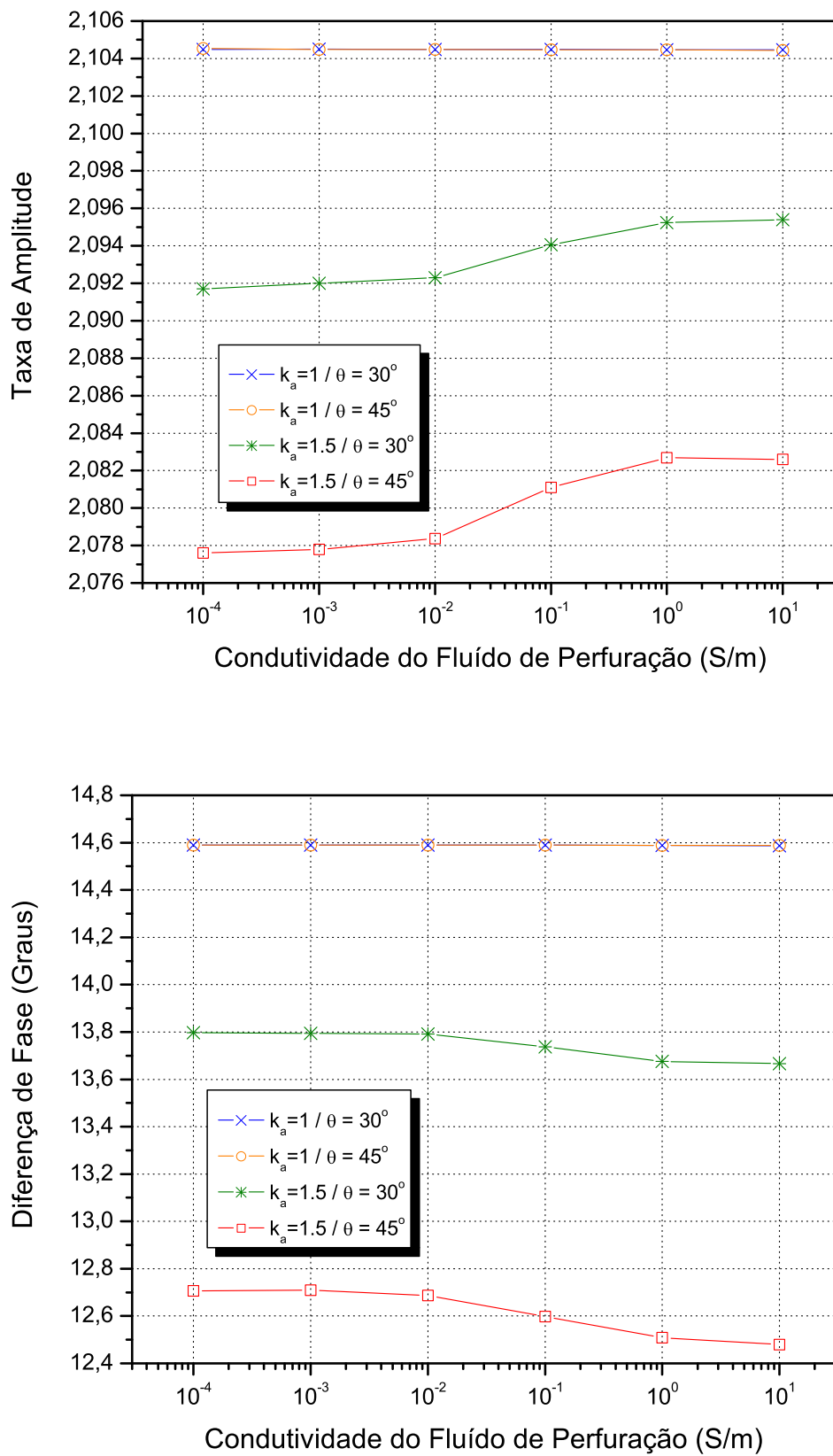


Figura 4.6: Efeito do fluido de perfuração em formações anisotrópicas homogêneas. A condutividade perpendicular da formação é igual a $\sigma_{\perp} = 0,5$ S/m.

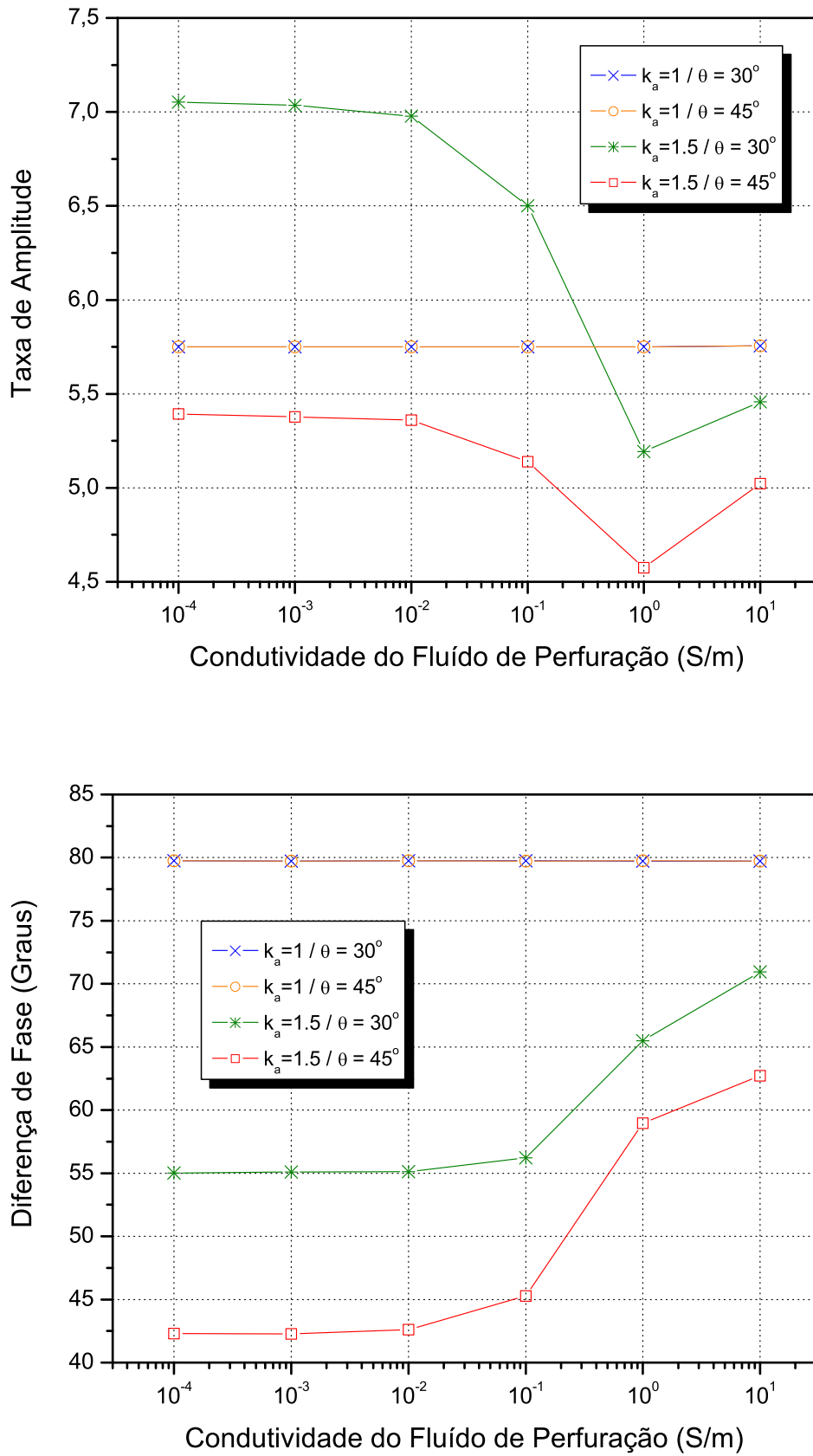


Figura 4.7: Efeito do fluido de perfuração em formações anisotrópicas homogêneas. A condutividade perpendicular da formação é igual a $\sigma_{\perp} = 10$ S/m.