

Referências bibliográficas

- [1] A.C.G. Melo, M.S. Reis, B.G. Gorenstin, A.M. Oliveira, M.E. Maceira, “Risk Analysis in the Electrical Sector Investment Projects”. SEPOPE, Salvador, 1998.
- [2] A. Street, L.A. Barroso, S.Granville, M. Pereira, “Estratégias de Atuação de Agentes Geradores sob Incerteza em Leilões de Contratos de Energia Elétrica”, SNPTEE 2005 - XVIII Seminário Nacional de Produção e Transmissão de Energia Elétrica, Curitiba, Brasil, 2005.
- [3] A. Street, “Estratégia de Oferta de Geradoras em Leilões de Contratação de Energia Elétrica”. Rio de Janeiro, 2004, 174p. Dissertação de Mestrado – Departamento de Engenharia Elétrica, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro (PUC-Rio).
- [4] A.K.Dixit and R.S.Pindyck, “Investment Under Uncertainty”, Princeton University Press, 1994.
- [5] Acerbi, C., “Coherent measures of risk in everyday market practice”, Quantitative Finance, Vol. 7, No. 4, 359–364, August 2007.
- [6] Acerbi, C. and Tasche, D., Expected shortfall: a natural coherent alternative to value at risk. Econ. Notes, 2002b, 31(2), 379–388.
- [7] A. Ben-Tal, M. Teboulle, “Expected Utility, Penalty Functions, and Duality in Stochastic Nonlinear Programming”, Management Science, Vol. 32, No. 11., pp.1445-1466, Nov., 1986.
- [8] Ben-Tal, A. and A. Ben-Israel, "A Recourse Certainty Equivalent for Decisions Under Uncertainty", Annals of Operation Research 31, 1991
- [9] Andrzej Ruszczyński & Alexander Shapiro, "Optimization of Measures," Risk and Insurance 0407002, EconWPA, 2004.
- [10] Artzner, Philippe, Freddy Delbaen, Jean-Marc Eber, David Heath, “Coherent Measures of Risk”, Mathematical Finance 9 no. 3, 203-228, 1999.

- [11] Eichhorn, A. and Römisch, W. 2005. "Polyhedral Risk Measures in Stochastic Programming". *SIAM J. on Optimization* 16, 1 (May. 2005), 69-95. DOI= <http://dx.doi.org/10.1137/040605217>.
- [12] B.G.Gorenstin, N.M.Campodónico, J.P.Costa, M.V.F.Pereira, "Power System Planning Under Uncertainty", *IEEE Transactions on Power Systems*, Vol. 8, No.1, Feb. 1993.
- [13] B.G.Gorenstin, N.M.Campodónico, J.P.Costa, M.V.F.Pereira, "Stochastic Optimization of a Hydro-thermal System Including Network Constraints", *IEEE Trans. on PAS*, Vol. 7, No. 2, May 1992.
- [14] B.Mo, A.Gjelsvik, A.Grundt, "Integrated Risk Management of Hydro Power Scheduling and Contract Management", presented at the 1999 IEEE Winter Power Meeting.
- [15] C.Alexander, *Risk Management and Analysis – Measuring and Modelling Financial Risk*, Wiley, 1998.
- [16] Castro, L. I., Faro, J. H., "Introdução à Teoria da Escolha", 25º Colóquio Brasileiro de Matemática, IMPA (www.impa.br) 2005.
- [17] D.Luemberger, *Investment Science*, Oxford, 1998.
- [18] Dekrajangpetch, S. e G. B. Sheble, "Structures and formulations for electric power auctions". *Electric Power Systems Research* 54, 159-167, 2000.
- [19] Domingues, E. G. et al. "Applying modern portfolio theory to investment projects in electric energy markets", *IEEE Porto Power Tech Conference*, 2001.
- [20] F.Porrúa, G.Schuch, L.A.Barroso, A.Street, M.Junqueira, "Assessment of Transmission Congestion Price Risk and Hedging In The Brazilian Electricity Market", *Cigré-IEEE International Symposium on congestion management*, San Antonio, USA, 2005.
- [21] G. Anders, R. Entriken, P. Nitu, "Risk Assessment and Financial Management", *IEEE Tutorial, Winter Meeting*, 1999.

- [22] G.J. Alexander and A.M. Baptista. “A comparison of VaR and CVaR constraints on portfolio selection with the mean-variance model”. *Management Science* (forthcoming), 2003.
- [23] H. Bessembinder, M.L. Lemmon, “Equilibrium Pricing and Optimal Hedging in Electricity Forward Markets”, Draft, Goizueta Business School, Emory University, 1999.
- [24] H.M. Markowitz, “Portfolio Selection”, *Journal of Finance*, 7, 1952.
- [25] H.M. Markowitz, *Portfolio Selection: Efficient Diversification of Investment*. New York: John Wiley & Sons, 1959.
- [26] Föllmer, A. Schied, “Stochastic finance: an introduction in discrete time. (De Gruyter Studies in Mathematics)” 27 Walter de Gruyter, Berlin, New York, 2002, IX+422 pages, Hardcover. ISBN 3-11-017119-8.
- [27] J. Birge, F. Louveaux, *Introduction to Stochastic Programming*, Springer, 1997.
- [28] J. Hagle, S. Wallace, “Managing Risk in the new power business: a sequel”, *IEEE Computer Applications in Power*, 2001.
- [29] Jorion, P. (1997) *Value at Risk: The New Benchmark for Controlling Market Risk*, McGraw-Hill.
- [30] L.A. Barroso, J. Trinkenreich, S. Granville, P. Lino, M.V. Pereira, “Avaliação de estratégias de redução de risco hidrológico para empresas com portfólios predominantemente hidroelétricos” – XVII Seminário Nacional de Produção e Transmissão de Energia Elétrica, Uberlândia, 2003.
- [31] L.A. Barroso, A. Street, S. Granville, M. Pereira, “Market models & monitoring: assessing new techniques for long-term PPA auctions to support long-run policy decisions in Brazil”, 2005 IEEE General Meeting, San Francisco, USA.
- [32] Mark. J. Machina, “Generalized Expected Utility Analysis and the Nature of Observed Violations of the Independence Axiom” in *Foundations of Utility and Risk Theory with Applications*, ed. by B. Stigum and F. Wenstøp, 1983 (<http://econ.ucsd.edu/~mmachina/>).

- [33] M.V.F. Pereira, et al., “Methods and Tools for Contracting in a Competitive Framework”, CIGRÉ Task Force 38-05-09, Dezembro 2000.
- [34] M.V.F. Pereira; M.F. McCoy; H.M. Meryll, Managing risk in the new power business, IEEE Computer Applications in Power, Volume: 13 , Issue: 2, April 2000, Pages:18-24.
- [35] M.V.Pereira, L.A.Barroso, J.Rosenblatt, “Supply Adequacy in the Brazilian Power Market”, Proceeding of the IEEE General Meeting 2004, Denver.
- [36] M.V.Pereira, N. Campodónico, R. Kelman, – Long term Hydro Scheduling based on Stochastic Models, EPSOM '98, Zurique, Setembro 1998.
- [37] M.V.Pereira, M.; L.M.Pinto – Multi-Stage Stochastic Optimization Applied to Energy Planning, Mathematical Programming, Vol 52, 359-375, 1991
- [38] Câmara de Comercialização de Energia Elétrica - CCEE (www.ccee.org.br).
- [39] P.Boyle, M.Broadie, P. Glasserman, “Monte Carlo Methods for Security Pricing”, Journal of Economic Dynamics and Control, 1977.
- [40] P. Jorion, Value at Risk – The New Benchmark for Controlling Market Risk. McGraw-Hill, 1997.
- [41] P. A. M-S. David, “Formação do Preço, Atração de Investimentos e Gerenciamento de Risco no Mercado Brasileiro de Energia Elétrica” Tese de Doutorado – Departamento de Engenharia Elétrica, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, 2004.
- [42] P. A. M-S. David, L.A.Barroso, S.Granville, A.V.Filho “Contratação e aversão a risco no despacho competitivo da geração” - XVII Seminário Nacional de Produção e Transmissão de Energia Elétrica, Uberlândia, 2003.
- [43] Lino, P. (2001). "Operação Descentralizada de Sistemas Hidrotérmicos em Ambiente de Mercado." MSc Thesis, IM/NCE-UFRJ.
- [44] R.Dembo, “Mark to Future: A consistent Firm-Wide Paradigm for Measuring Risk and Return”, in Risk Management and Analysis, Volume 1: Measuring and Modelling Financial Risk, John Wiley&Sons, 1998.

- [45] R.Kelman – Esquemas competitivos em sistemas hidrotérmicos: eficiência econômica e comportamento estratégico de geradores em ambiente de mercado – COPPE-UFRJ, Maio 1999.
- [46] Regras e Procedimentos de Mercado – disponível em <http://www.ccee.org.br>.
- [47] Regras Algébricas do Mercado Atacadista de Energia 3.5, capítulo 7: Mecanismo de Realocação de Energia – disponível em <http://www.ccee.org.br>.
- [48] R.T. Rockafellar and S.P. Uryasev, “Optimization of conditional value-at-risk”, *The Journal of Risk*, 2 (2000), 21-41.
- [49] S. Granville, G.C. Oliveira, L.M Thomé, N. Campodónico, M. Latorre, M.V.Pereira, e L.A. Barroso , “Stochastic optimization of transmission constrained and large scale Hydrothermal Systems in a Competitive Framework”, *Proceedings of the IEEE General Meeting*, Toronto, 2003.
- [50] S.Granville, R.Kelman,L.A.Barroso, R.Chabar, M.V. Pereira, P. Lino, P. Xavier, I. Capanema , “Um Sistema Integrado para Gerenciamento de Riscos em Mercados de Energia Elétrica”, XVII Seminário Nacional de Produção e Transmissão de Energia Elétrica, Uberlândia, 2003.
- [51] S.Fleten, S.Wallace, W.Ziemba, “Portfolio Management in a Deregulated Hydropower Based Electricity Market”, *Hydropower’97 Proceedings*, Trondheim, August 1997.
- [52] Silva, A.J. (2003). Leilões de certicado de energia elétrica: Maximo excedente versus maxima quantidade negociada. Dissertação de mestrado, Unicamp, Campinas - Brasil.
- [53] Stokey, N. and R. Lucas, with E. C. Prescott, “Recursive Methods in Economics Dynamics”. Cambridge, Mass.: Harvard University Press, 1989.
- [54] T. Saaty, “Fundamentals of Decision Making”, RWS Publications, Pittsburg, 1994.
- [55] Vickrey, W. (1961). Counterspeculation, auctions, and competitive sealed-tenders. *Journal of Finance* 16, 8-37.

- [56] von Neumann, J.; Morgenstern, O. “Theory of Games and Economic Behaviour” Princeton Press, 1947; ISBN 0-691-00362-9.
- [57] W.V. Harlow, “Asset Allocation in a Downside-Risk Framework”, Financial Analysis Journal, 1991.
- [58] Web-site ANEEL: <http://www.aneel.gov.br>.
- [59] X.Vieira F., M.V.F. Pereira, B.G. Gorenstin, J.C.O. Mello, A.C.G. Melo, S. Granville, “Playing the Odds: Risk Management in Competitive Generation Contracts” Paper presented at the Paris CIGRÉ Conference, 199.

9

Anexo A: Formação de preços no mercado de curto prazo

Este capítulo discute o cálculo da produção de energia de cada gerador, hidrelétrico e térmico, ao longo do tempo, bem como do preço de curto prazo da energia em cada período. Estes valores são usados para calcular a renda líquida resultante da venda de energia no mercado de curto prazo. Inicialmente, será discutido o caso de sistemas compostos unicamente de usinas termelétricas. A seguir, a metodologia será estendida para o caso de sistemas hidrotérmicos.

9.1

Sistemas Puramente Térmicos

9.1.1

Despacho Econômico

Na maioria dos países, um Operador Independente do Sistema determina, a cada estágio, a produção de energia de cada usina geradora. O objetivo é atender a demanda de energia do estágio ao menor custo, o chamado despacho econômico. Em sistemas puramente térmicos, o despacho econômico, em sua versão mais simples, é formulado da seguinte maneira:

$$z = \text{Min} \sum_{j=1}^J c_j g_j \quad \text{Multiplicador} \quad (9-1)$$

Sujeito a:

$$\sum_{j=1}^J g_j = d \quad \pi_d \quad (a)$$

$$g \leq \bar{g} \quad (b)$$

onde z , c_j , d , g_j e \bar{g} representam respectivamente o custo total de operação (valor a minimizar, em R\$); o custo variável de operação de cada gerador j (em R\$/MWh); a demanda do sistema (em MWh), a produção de energia elétrica (variável de

As restrições (9-1) (a) e (9-1) (b) representam respectivamente o atendimento da carga e os limites da capacidade de geração.

9.1.2

Solução do despacho econômico

O modelo de despacho (9-1) é um problema de programação linear (PL), que neste caso simplificado pode ser resolvido por inspeção, acionando os geradores em ordem crescente de custo variável, até que a geração total iguale a demanda. No caso mais geral onde se representa, por exemplo, a rede de transmissão, o PL pode ser resolvido por pacotes computacionais disponíveis no mercado.

9.1.3

Preço spot

O preço spot é, por definição, o custo de se atender a um incremento da demanda, ou seja, é a variação do custo de operação do sistema quando há um incremento de 1 MWh na demanda, dado pela derivada $\partial z/\partial d$ do problema (9-1). Da teoria de programação linear, sabe-se que esta derivada é dada pelo variável dual, π_d , associada à restrição de atendimento à demanda (9-1) (a).

Neste caso simplificado, o valor de π_d também pode ser obtido por inspeção. Como um aumento da demanda seria atendido pelo aumento da geração do último gerador acionado na ordem econômica de despacho, conhecido como gerador marginal. Conclui-se, portanto, que $\pi_d = c_{j^*}$, onde “*” identifica este último gerador.

9.1.4

Venda no mercado de curto prazo e renda líquida

Cada gerador j recebe do mercado de curto prazo, que no Brasil é administrado pela Câmara de Comercialização de Energia Elétrica (CCEE), um montante (R\$) correspondente ao produto do preço spot π (em R\$/MWh) por sua

produção de energia no despacho econômico, g_j (em MWh). Por sua vez, a demanda d desembolsa na CCEE um montante (R\$) dado por π . Como a produção total de energia é igual à demanda e há um único preço de compra e venda de energia, conclui-se imediatamente que o balanço financeiro na CCEE sempre “fecha”, isto é, o montante pago pela demanda é igual ao recebido pelos geradores.

Finalmente, a receita líquida de cada gerador pela venda de energia na CCEE é dada por $R_j = (\pi - c_j)g_j$

9.1.5

Exemplo

Os conceitos acima serão ilustrados para um parque gerador composto de três termelétricas, cujas características – capacidade instalada e custo operacional variável – estão especificadas na Tabela 9-1.

Tabela 9-1 – Características das Termelétricas

Nome	Cap. (MWh)	Custo oper. (\$/MWh)
G_1	10	8
G_2	5	12
G_3	20	15

O despacho de mínimo custo para atender uma demanda de 20 MWh em uma etapa de uma hora é:

$$G_1 = 10$$

$$G_2 = 5$$

$$G_3 = 5$$

O preço spot do sistema é \$15/MWh, que corresponde ao custo operacional da termelétrica marginal, G_3 . A renda líquida de cada gerador é:

$$RL_1 = (\pi_d - c_1)g_1 = (15 - 8)10 = 70$$

$$RL_2 = (15 - 10)5 = 25$$

$$RL_3 = (15 - 15)5 = 0$$

9.2

Sistemas Hidrotérmicos

9.2.1

Custos de oportunidade

À primeira vista, as usinas hidrelétricas seriam sempre acionadas primeiro no despacho econômico, pois seu custo variável de operação é muito pequeno¹⁶. Entretanto, o operador do sistema pode optar entre utilizar a água armazenada nos reservatórios para gerar hoje, ou deixá-la armazenada para uso futuro. Esta decisão depende do *custo de oportunidade* da geração hidrelétrica. Suponha, por exemplo, que o preço spot de hoje é 15 R\$/MWh. Isto significa que 1 MWh de geração hidrelétrica hoje “deslocará” 1 MWh do gerador marginal, economizando portanto R\$ 15. Suponha, entretanto, que o preço spot previsto para a próxima semana é maior, por exemplo, 20 R\$/MWh. Neste caso, vale a pena usar a água no futuro, pois haverá uma economia maior. Isto significa que o custo de oportunidade da geração hidrelétrica é 25 R\$/MWh. Para o despacho econômico, este custo de oportunidade tem todas as características de um custo “real”: por exemplo, seria preferível atender um aumento de demanda hoje com o gerador marginal a 15 R\$/MWh, do que acionar a hidrelétrica.

9.2.2

Árvore de decisões

O cálculo do custo de oportunidade da geração hidrelétrica é bastante complexo devido à incerteza das afluições futuras. Por exemplo, se a energia hidrelétrica for utilizada hoje, e ocorrer uma seca amanhã, pode ser necessário usar geração térmica mais cara no futuro, ou até mesmo interromper o fornecimento de energia elétrica (custo de oportunidade elevado). Se, por outro lado, os níveis dos reservatórios se mantiverem altos pelo uso mais intenso de geração térmica, e a afluição aumentar no futuro, os reservatórios poderão verter,

¹⁶ O custo variável direto de usina hidrelétrica é, basicamente, a soma do custo variável de O&M da usina, mais as taxas ambientais.

desperdiçando energia (custo de oportunidade baixo). Como ilustra a Figura 2-1, é necessário resolver uma “árvore de decisão” e quantificar os efeitos de todas as possíveis decisões, escolhendo a que, em média, leva aos melhores resultados.

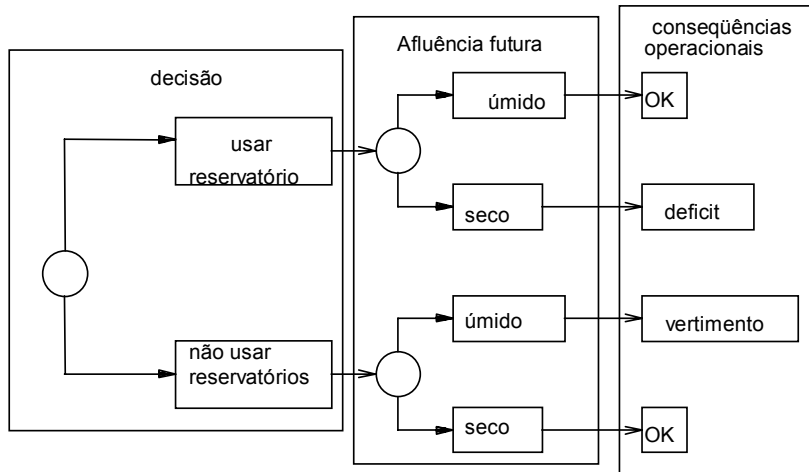


Figura 9-1 – Processo Decisório em Sistemas Hidrotérmicos

9.2.3

Custos Operacionais Imediatos e Futuros

Na prática, a busca pela melhor decisão operativa é baseada na composição dos custos operacionais *imediato* e *futuro*, como ilustrado na Figura 2-2.

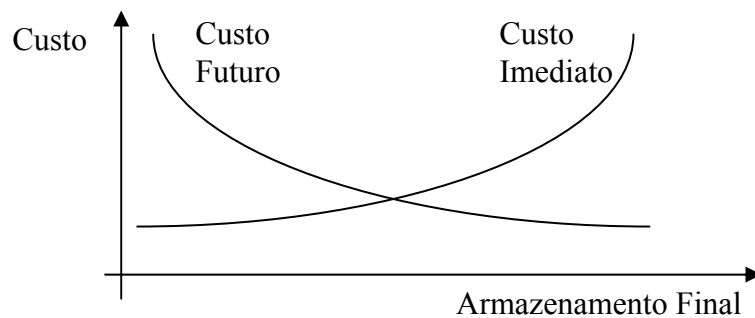


Figura 9-2 – Custos Imediatos e Futuros contra Armazenamento Final

A função de custo imediato – FCI – está relacionada aos custos de geração térmica no estágio t . À medida que o armazenamento final aumenta, um menor volume de água estará disponível para produção de energia nesta etapa. Como resultado, há necessidade de maior geração térmica para atender a demanda, e o custo imediato sobe. Por sua vez, a função de custo futuro – FCF – está associada

às despesas esperadas de geração térmica da etapa $t + 1$ até o final do período de planejamento. Podemos observar que a FCF diminui com o armazenamento final, à medida que um maior volume de água é disponibilizado para uso futuro.

A FCF é calculada simulando-se a operação do sistema no futuro para diferentes níveis de armazenamento inicial e calculando-se os custos operacionais. O horizonte de simulação depende da capacidade de armazenamento do sistema. Se a capacidade for relativamente pequena, como nos sistemas espanhol e norueguês, o impacto de uma decisão é diluído em vários meses. Se a capacidade for significativa, como no sistema brasileiro, o horizonte de simulação pode chegar a cinco anos.

Como visto, esta simulação torna-se mais complexa pela variabilidade da vazão afluente aos reservatórios, cujos níveis flutuam sazonalmente, regionalmente e de ano para ano. Como consequência, o cálculo da FCF deve ser feito de maneira *probabilística*, isto é, utilizando um grande número de cenários hidrológicos, como mostra a Figura 2-3.

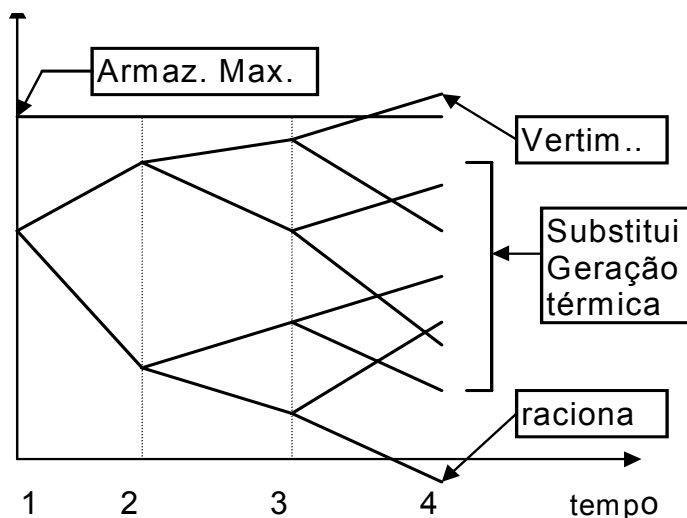


Figura 9-3 – Cálculo da FCF

9.2.4

Valor da água

O uso ótimo da água armazenada corresponde ao ponto que minimiza a soma dos custos imediato e futuro. Como mostra a Figura 2.4, este também é o ponto em que as derivadas de ICF e FCF se igualam em módulo. Estas derivadas são conhecidas como *valores da água*.

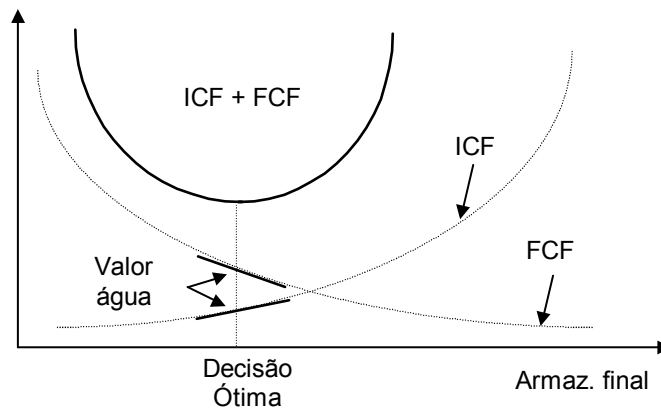


Figura 9-4 – Programação Hidrelétrica Ótima.

9.2.5

Formulação do Despacho Hidrotérmico para uma Etapa

Apresenta-se, a seguir, a formulação do despacho hidrotérmico para um determinado estágio t , supondo que foi calculada a função de custo futuro (o cálculo desta FCF será discutido mais adiante).

- a) Função Objetivo** – Como visto, o objetivo é minimizar a soma dos custos imediato e futuro:

$$z_t = \text{Min} \sum_{j=1}^J c_j g_{tj} + \alpha_{t+1}(v_{t+1}) \quad (9-2)$$

O custo imediato em (2.4) é dado pelos custos operacionais térmicos na etapa t , $\sum c_j g_{tj}$. Por sua vez, o custo futuro é representado pela função $\alpha_{t+1}(v_{t+1})$, onde v_{t+1} é o vetor dos níveis de armazenamento do reservatório ao final da etapa t

(início da etapa $t+1$). As restrições operacionais nesta etapa são discutidas a seguir.

b) Balanço Hídrico – Como ilustrado na Figura 9-5, a equação de balanço hídrico relaciona o armazenamento e os volumes de entrada e saída do reservatório: o volume final no estágio t (início do estágio $t+1$) é igual ao volume inicial menos os volumes de saída (turbinamento e vertimento) mais os volumes de entrada (afluência lateral mais os volumes de saída das usinas a montante).

$$v_{t+1}(i) = v_t(i) - u_t(i) - s_t(i) + a_t(i) + \sum_{m \in U(i)} [u_t(m) + s_t(m)] \quad (9-3)$$

para $i = 1, \dots, I$

onde:

- i índice das hidrelétricas (I número de hidrelétricas)
- $v_{t+1}(i)$ volume armazenado na usina i ao final do estágio t (variável de decisão)
- $v_t(i)$ volume armazenado na usina i no início do estágio t (valor conhecido)
- $a_t(i)$ afluência lateral que chega na usina i na etapa t (valor conhecido)
- $u_t(i)$ volume turbinado durante a etapa t (variável de decisão)
- $s_t(i)$ volume vertido na usina i durante a etapa t (variável de decisão)
- $m \in U(i)$ conjunto de usinas imediatamente a montante da usina i

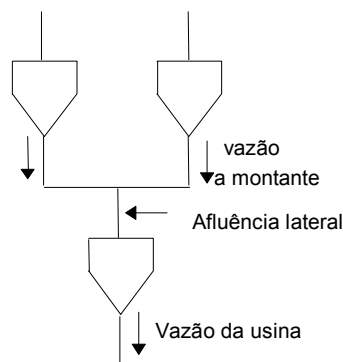


Figura 9-5 – Balanço hídrico do reservatório

c) Limites de Armazenamento e Turbinamento

$$v_t(i) \leq \bar{v}(i) \quad \text{para } i = 1, \dots, I \quad (9-4)$$

$$u_t(i) \leq \bar{u}(i) \quad \text{para } i = 1, \dots, I \quad (9-5)$$

onde $\bar{v}(i)$ e $\bar{u}(i)$ são respectivamente o armazenamento máximo e a capacidade das turbinas.

d) Limites de Geração Térmica

São os mesmos do despacho térmico, vistos no início deste capítulo.

$$g_{tj} \leq \bar{g}(j) \quad \text{para } j = 1, \dots, J \quad (9-6)$$

e) Atendimento à Demanda

$$\sum_{i=1}^I \rho(i) u_t(i) + \sum_{j=1}^J g_{tj} = d_t \quad (9-7)$$

onde $\rho(i)$ é o coeficiente de produção da usina i (MWh/hm³) (valor conhecido).

9.2.6**Solução do Problema e Custos Marginais**

O problema (9-2)-(9-7) é em geral resolvido por um algoritmo de programação linear (PL). Assim como no caso térmico, o preço spot é o multiplicador associado à equação de atendimento da demanda (2.9). Por sua vez, o valor da água de cada hidrelétrica é o multiplicador associado à equação de balanço hídrico (9-3).

9.2.7**Exemplo**

Suponha que ao sistema térmico do exemplo anterior (ver seção 9.1.5) foi adicionada uma hidrelétrica, cujas características são especificadas na Tabela 9.1.

Tabela 9-2 – Características da Hidrelétrica

Nome	cap. (MW)	Coef. Prod. (MWh/m ³)
H ₁	15	2

Suponha também que a FCF da hidrelétrica, $\alpha_{t+1}(v_{t+1})$, é dada pela expressão linear $-28v_{t+1} + 4000$, ilustrado na Figura 9-6.

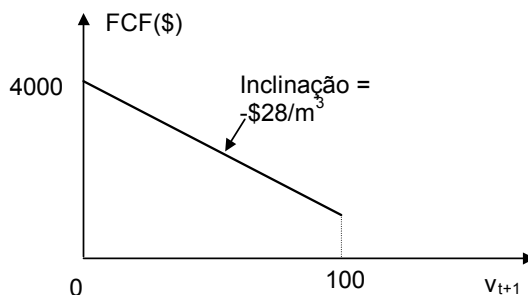


Figura 9-6 – Função de Custo Futuro.

Como visto, a FCF informa ao operador que o custo de oportunidade futuro de 1 m³ de água é R\$ 28. Portanto, só vale a pena utilizar esta água hoje se o benefício imediato (redução de custo operativo) exceder este valor. Como este m³ pode ser utilizado para produzir $\rho \times 1 = 2$ MWh agora, conclui-se que só vale a pena utilizar a hidrelétrica se as alternativas térmicas custarem mais de $28/2 = 14$ R\$/MWh. Em outras palavras, a energia hidrelétrica é, por um lado, mais “cara” que as térmicas 1 e 2, que custam respectivamente 8 e 12 R\$/MWh; e, por outro, mais “barata” que a térmica 3, que custa 15 R\$/MWh.

A ordem de acionamento dos geradores no despacho econômico hidrotérmico seria portanto (T_1, T_2, H_1, T_3) , e a produção de energia resultante, como mostrado na Tabela 9.3:

Tabela 9-3 – Despacho Ótimo – Sistema Hidrotérmico.

Unidade	Custo (\$/MWh)	Ger. (MWh)
T ₁	8	10
T ₂	12	5
H ₁	14	5
T ₃	15	0
total		20

O preço spot do sistema, como sempre, reflete o custo da usina marginal, que no caso é a usina hidrelétrica. Portanto, o preço spot do sistema é o custo de oportunidade da hidrelétrica, 14 R\$/MWh. Este preço spot é usado de maneira idêntica ao apresentado no exemplo térmico para calcular a remuneração dos geradores e pagamentos da demanda na CCEE:

$$RL_1 = (\pi - c_1)g_1 = (14 - 8)10 = 60$$

$$RL_2 = (14 - 10)5 = 20$$

$$RL_H = (14 - 0)5 = 70$$

$$RL_3 = (14 - 15)0 = 0$$

9.3

Cálculo da Função de Custo Futuro

Como visto, as decisões operativas de um sistema hidrotérmico se baseiam no equilíbrio entre o custo de oportunidade hoje e seu valor esperado futuro, representado pela FCF, $\alpha_{t+1}(v_{t+1})$. Esta função é calculada através de um procedimento recursivo chamado programação dinâmica estocástica dual (PDDE) [29,30], apresentado a seguir:

- a) para cada estágio t (tipicamente um mês) define-se um conjunto de *estados do sistema*, por exemplo, níveis de armazenamento 100%, 90% etc. até 0%. A Figura 9-7 ilustra a definição dos estados para um reservatório. Supõe-se conhecido o armazenamento inicial do primeiro estágio.

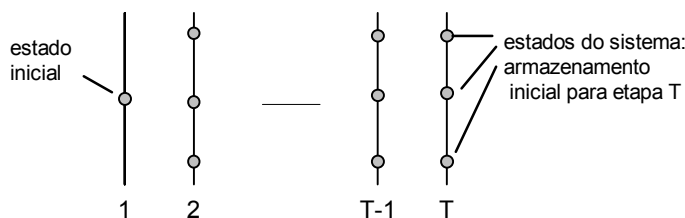


Figura 9-7 – Definição dos Estados do Sistema.

- b) iniciar no *último* estágio, T , e resolver o problema de despacho de um estágio supondo que o armazenamento inicial corresponde ao primeiro nível selecionado no passo (a) - por exemplo, 100%. Dado que se está no último estágio, supõe-se que a FCF é igual a zero. Resolva o problema de despacho

para cada um dos N cenários de vazões para o estágio. O esquema está ilustrado na Figura 9-8.

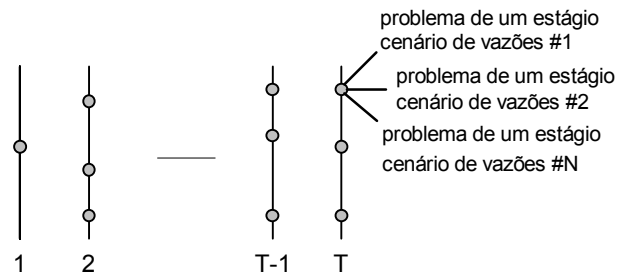


Figura 9-8 – Cálculo da Decisão Ótima por Cenário - Último Estágio

- c) Calcular o valor esperado do custo operativo associado ao nível 100% como a média dos custos dos N subproblemas de um estágio. Com isto se obtém o primeiro ponto da FCF para o estágio T-1, i.e. $\alpha_T(v_T)$. Observe que a *tangente* da FCF em torno deste ponto corresponde ao valor da água esperado (como mencionado na item 9.2.4, o valor da água é obtido do multiplicador simplex da equação de balanço hídrico). O procedimento está ilustrado na Figura 9-9.

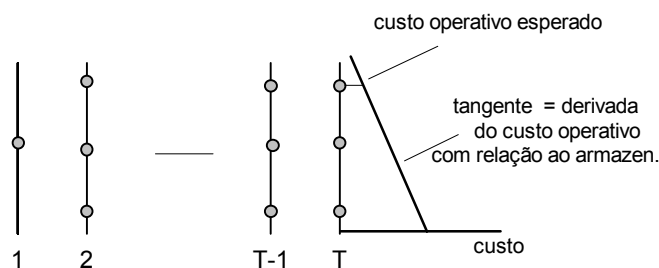


Figura 9-9 – Cálculo do primeiro segmento da FCF

- d) Repetir o cálculo do custo operativo e das tangentes da superfície de custo futuro para cada estado de armazenamento no estágio T. O resultado final é uma superfície linear por partes, que representa a FCF $\alpha_T(v_T)$ para o estágio T-1, como mostrado na Figura 9-10.

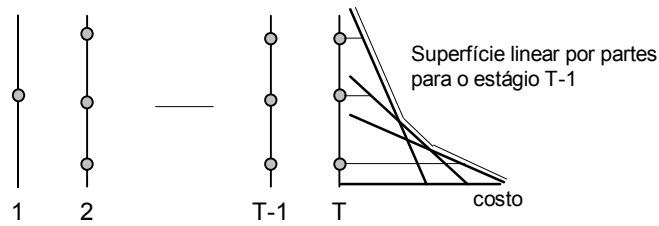


Figura 9-10 – FCF Linear por partes para o Estágio T-1

- e) Repetir o processo para todos os estados de armazenamento selecionados nos estágios T-1, T-2 etc. como mostrado na Figura 9-11. Observe que o objetivo agora é minimizar o custo operativo imediato no estágio T-1 mais o custo futuro esperado, dado pela função linear por partes calculada no passo anterior.

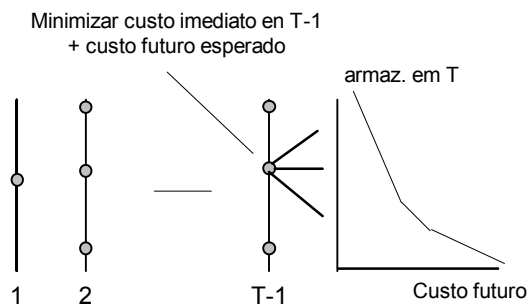


Figura 9-11 – Cálculo do custo operativo para o estágio T-1 e FCF para T-2.

O resultado final do esquema PDE (a)-(e) é um conjunto de FCFs $\{\alpha_{t+1}(v_{t+1})\}$ para todos os estágios $t = 1, \dots, T$. Observe que o cálculo desta função requer a representação da operação conjunta do sistema, com o conhecimento completo dos estados de armazenamento de todas as usinas do sistema. Em outras palavras, o valor da água de uma usina hidrelétrica é uma função não-separável do estado das demais usinas do sistema.

9.4

Mecanismo de Realocação de Energia (MRE)

A predominância absoluta do parque gerador hidroelétrico, com a conseqüente volatilidade dos preços da energia e necessidade de forte cooperação entre empresas que, em princípio, deveriam estar competindo entre si (empresas distintas com reservatórios na mesma cascata), levaram ao estabelecimento do Mecanismo de Realocação de Energia (MRE) [47]. Os objetivos deste mecanismo são mitigar o risco das usinas hidroelétricas contra períodos secos prolongados e administrar convenientemente o problema das usinas em cascata.

O MRE consiste essencialmente na atribuição a cada usina participante de um valor de referência, denominado Energia Assegurada, e na repartição da maior parte da produção do conjunto de usinas participantes entre as mesmas proporcionalmente às suas Energias Asseguradas. Desta forma, a energia alocada a cada usina participante do MRE, para efeitos da CCEE, não é a sua produção física, e sim, uma parcela do rateio da produção de todas as usinas pertencentes ao MRE, denominada de *crédito de energia*. O detalhamento completo das regras do MRE pode ser encontrado em [46][47].

9.5

MRE: Motivação

9.5.1

Riscos Hidrológicos de Usinas Hidrelétricas Riscos Hidrológicos de Usinas Hidrelétricas

Os contratos bilaterais entre empresas no Setor Elétrico Brasileiro constituem apenas instrumentos financeiros. Isto significa que a produção física das usinas é completamente desvinculada dos contratos firmados por seus proprietários.

Como discutido no decorrer desta tese, no caso de usinas térmicas, os contratos bilaterais permitem gerenciar adequadamente a volatilidade: se o preço “spot” é reduzido, a usina não é despachada e atende seu contrato através da

compra de energia no mercado “spot”, evitando assim os custos de produção; se o preço “spot” é elevado, a usina é despachada e atende seu contrato através de geração própria, evitando assim compras onerosas de energia.

No caso de usinas hidrelétricas, entretanto, a contratação não é suficiente para reduzir os riscos a um nível adequado. Devido à predominância da produção hidroelétrica no sistema brasileiro, os preços “spot” são mais elevados em situações de seca, quando as hidroelétricas necessitam comprar energia para cumprir seus contratos. Como consequência, a hidroelétrica contratada corre riscos em ambos os extremos: se estiver pouco contratada, está exposta a preços baixos no “spot”; e se estiver muito contratada, está exposta ao risco de ser obrigada a comprar energia a preços elevados. Este risco é conhecido como “risco hidrológico”. Em particular, no caso de racionamento de energia, as hidroelétricas teriam que pagar o equivalente à diferença entre a energia contratada e produzida multiplicada pelo custo de racionamento.

9.5.2

Eficiência Econômica da remuneração “spot”

A implementação do esquema “spot” em sistemas hidrotérmicos não deveria apresentar dificuldades conceituais: uma vez calculado o despacho ótimo do sistema, no balanço de pagamentos no mercado “spot” cada agente receberia (pagaria) o produto do preço “spot” e sua produção (consumo) de energia. Uma das justificativas básicas para a implantação de um esquema de pagamento “spot” é a eficiência de seus sinais econômicos. Mostra-se em [45] que, sob condições de concorrência perfeita, a expansão descentralizada do sistema, onde os agentes tentam maximizar seu lucro, coincide com a expansão centralizada do sistema, onde um agente central (o planejador) procura encontrar a solução de mínimo custo total.

Entretanto, conforme mostrado em [45], o mecanismo de remuneração “spot” só fornece sinais econômicos corretos quando as usinas hidroelétricas estão isoladas ou quando todas as usinas de uma mesma cascata pertencem a uma única empresa. Num caso extremo podemos imaginar um sistema composto de um reservatório “puro”, isto é, sem geração associada, a montante de usinas a fio d’água. Este reservatório é obviamente benéfico para o sistema, pois regula a

vazão afluyente às usinas e, portanto, aumenta sua capacidade de produção firme de energia. Entretanto, dado que o esquema “spot” remunera somente a *energia* gerada, o reservatório não seria remunerado, enquanto as usinas a jusante ficariam com toda a renda. Isto indica que há uma distorção na alocação dos benefícios econômicos aos agentes.

É importante observar que esta distorção ocorre mesmo se as usinas com reservatório têm capacidade de turbinamento, isto é, estamos discutindo um efeito *geral* para as usinas em cascata, não um caso particular para reservatórios sem máquina. A compensação pelo serviço de regularização prestado pelos reservatórios numa cascata é essencial para corrigir os sinais econômicos. Conforme discutido em [45][43], esta distorção pode ser corrigida através da criação de um mercado “spot” de água, que tem com relação à compra a venda deste recurso uma função análoga à do mercado “spot” de energia, e permite remunerar estes serviço de maneira a restabelecer a eficiência econômica.

9.6

O Mecanismo de Realocação de Energia

O Mecanismo de Realocação de Energia apresenta uma proposta de solução para os dois tópicos anteriores.

O MRE é um mecanismo de “hedging” compulsório entre as usinas hidrelétricas que compõe o sistema. No contexto do MRE, cada usina hidroelétrica recebe a cada período um *crédito de energia* (MWh) proporcional à produção hidroelétrica *total* (soma da produção de todas as usinas hidroelétricas) nesta mesma etapa. O fator de proporção é dado pela razão entre o *certificado de energia assegurada* da hidroelétrica e a soma dos certificados de todas as usinas participantes do MRE. Este crédito de energia, e não a energia produzida fisicamente pela mesma, é então utilizado para atender o contrato da usina.

Como a produção *total* de energia hidroelétrica (e portanto o crédito de energia) é muito mais constante que a produção individual das usinas

hidroelétricas, conclui-se que o MRE é um esquema eficiente de redução da volatilidade e risco hidrológico¹⁷.

Por outro lado, o MRE procura corrigir a distorção econômica da remuneração “spot” das hidroelétricas através de uma representação *implícita* do mercado “spot” de água. A razão é que este esquema de compensação se baseia na observação de que se todas as usinas numa cascata pertencem ao mesmo agente, a renda “spot” total da cascata (soma dos pagamentos “spot” a todas as usinas da cascata) está correta. Portanto, pode-se interpretar o MRE como uma empresa *fictícia* chamada “Mecanismo de Realocação de Energia” cujos “acionistas” são as usinas da cascata. As “ações” da “empresa” MRE são os *Certificados de Energia Assegurada (CEA)* e tudo funciona como se a “empresa” MRE recebesse o pagamento “spot” total e o distribuísse entre seus acionistas como “lucros”, em proporção às ações que cada um possui, e não à produção individual. Com isto, um reservatório puro, por exemplo, é remunerado com base no seu *Certificados de Energia Assegurada* e não com base na sua produção individual (que é nula).

Portanto, conclui-se que o MRE atinge os dois objetivos a que se propõe. Finalmente, o valor do CEA de cada usina (i.e. a quantidade de MWs) é determinado pela ANEEL e pode ser revisto a cada 5 anos. Em cada revisão, o mesmo não pode ser alterado em mais (menos) de 5% e o limite para sua alteração total ao longo de toda a concessão do empreendimento é 10%.

9.7

Exemplo de Aplicação do MRE

Como visto anteriormente, no esquema MRE, a geração total da cascata a cada hora é alocada entre as usinas na proporção de seus CEAs. O pagamento “spot” se aplica então à energia alocada a cada usina, e não à produzida fisicamente pela mesma. Em outras palavras, tudo funciona como se a “empresa” MRE recebesse o pagamento “spot” total e o distribuísse entre seus acionistas como “lucros”, em proporção às ações que cada um possui.

¹⁷Entretanto, conforme discutido em [42], o MRE não mitiga o risco hidrológico global: se a produção total de energia das UHEs for inferior à soma das seus certificados de energias asseguradas, os créditos do MRE distribuídos às UHEs serão inferiores às seus certificados de energias asseguradas.

9.7.1

Sistema Exemplo

Os conceitos apresentados acima serão ilustrados através de um exemplo com dois geradores térmicos, três hidroelétricas e duas demandas, com as seguintes características:

Tabela 9-4 – Geradores

Nome	Cap. (MW)
H ₁	20
H ₂	50
H ₃	30
T ₁	10
T ₂	20

Tabela 9-5 – Demandas

Nome	Carga (MWh)
D _A	50
D _B	30

9.7.2

Despacho Ótimo

Suponhamos que o despacho ótimo para uma dada etapa (1 hora) é o apresentado a seguir:

Tabela 9-6 – Despacho Ótimo

gerador	Produção (MWh)
H ₁	5
H ₂	40
H ₃	25
T ₁	10
T ₂	0

9.7.3

Balanço de Pagamentos no mercado “spot” - sem MRE

No balanço de pagamentos no mercado “spot”, os geradores recebem o produto de sua geração física (MWh) pelo preço “spot” (\$/MWh). Por sua vez, as demandas pagam o produto de seu consumo (MWh) pelo preço “spot”. A Tabela 9-7 apresenta o balanço no mercado “spot” para o caso exemplo, supondo um preço “spot” de \$10/MWh.

Tabela 9-7 – Balanço no mercado “spot” - Geração - sem MRE

Agente	Geração (MWh)	Remuneração (\$)
H ₁	5	50
H ₂	40	400
H ₃	25	250
subtotal H		700
T ₁	10	100
T ₂	0	0
subtotal T		100
total geração		800

Tabela 9-8 – Balanço no mercado “spot” – Demanda

Demanda	Consumo (MWh)	Pagamento (\$)
D _A	-50	-500
D _B	-30	-300
Total		-800

9.7.4

Aplicando o Mecanismo de Realocação de Energia (MRE)

Como mencionado anteriormente, cada agente hidro possui uma quantidade de “cotas” numericamente igual a seu CEA. A Tabela 9-9 apresenta os CEAS associados a cada usina no exemplo.

Tabela 9-9 – CEAs e Cotas da “Empresa” MRE

agente	CEA (MW)	cota (p.u.)
H ₁	10	0.2
H ₂	25	0.5
H ₃	15	0.3
total	50	1.0

Também como mencionado, o procedimento MRE transforma a geração física $\{H_1, H_2, H_3\}$ de cada usina (MWh) em *créditos de geração* $\{E_1, E_2, E_3\}$ (também em MWh). Estes créditos são calculados como o produto da participação da usina na “empresa” (em p.u.) pela geração hidrelétrica *total*. No exemplo acima, a geração hidrelétrica total (soma das gerações das três usinas hidrelétricas) é 70 MWh. Os créditos são, portanto:

Tabela 9-10 – Créditos de Geração das Hidrelétricas

agente	Geração física (MWh)	cota (p.u.)	Crédito de geração (MWh)
1	H ₁ = 5	0.2	E ₁ = 0.2×70 = 14
2	H ₂ = 40	0.5	E ₂ = 0.5×70 = 35
3	H ₃ = 25	0.3	E ₃ = 0.3×70 = 21
total	70	1.0	70

9.7.5

Balanco de Pagamentos no mercado “spot” - com MRE

A única diferença no balanço do mercado “spot” com MRE é que os geradores hidrelétricos recebem o produto de seu crédito de geração (MWh) pelo preço “spot” (\$/MWh). Todos os demais elementos (remuneração das térmicas, das demandas, total dos geradores etc.) permanecem idênticos. Em outras

palavras, o MRE é um ajuste *interno* ao conjunto de geradores hidrelétricos, e não tem efeito nos demais agentes. A Tabela 9-11 ilustra este pagamento.

Tabela 9-11 – Balanço no mercado “spot” - Geradores Hidrelétricos - com MRE

Agente	Geração (MWh)	Remuneração (\$)
E ₁	14	140
E ₂	35	350
E ₃	21	210
subtotal H	70	700

Finalmente, observa-se que, como o crédito de energia de uma usina é fração da produção total do “sistema MRE”, os créditos podem ser localizados em regiões (sub-mercados) distintos ao de origem da usina, uma vez que o “sistema MRE” está localizado em diferentes regiões e bacias. Esta possibilidade não foi considerada no exemplo anterior e o conjunto de regras que a define pode ser encontrado em [46][47]¹⁸. Quando há diferenças de preços entre as regiões onde o crédito da usina está alocada, existe um “surplus” da transmissão (soma dos pagamentos das demandas excede a receita dos geradores). Este “surplus” é alocado aos agentes MRE com o objetivo de reduzir a exposição por alocação em diferente submercado.

¹⁸ Conforme discutido em [46][47], um crédito de uma UHE alocado em um submercado diferente daquele em que ela se situa gera uma despesa adicional devida à diferença entre o preços dos submercados em pauta. É claro que teoricamente esta realocação poderia gerar lucro para a UHE afetada se o preço do MAE da região onde ela recebeu o crédito fosse maior que a da região de origem, mas o que acontece normalmente é o contrário, pois as regiões de alto preço do MAE são aquelas onde se observam piores condições hidrológicas e onde é mais difícil a alocação de créditos.

9.8

Vantagens e Limitações do MRE

O MRE apresenta vários aspectos atraentes:

1. Desvincula a produção física da usina do seu crédito de geração. Isto permite que o Operador do Sistema despache os recursos hidroelétricos do sistema de maneira ótima global (por exemplo: mantendo um grande reservatório cheio por vários meses, com geração reduzida, para aumentar a segurança futura do sistema) sem afetar o fluxo de caixa do proprietário.
2. O crédito de geração de cada usina, por ser proporcional à geração hidrelétrica total na cascata, apresenta menos variabilidade que a geração individual da mesma. Em outras palavras, há menos risco do crédito de geração ser inferior ao contrato, o que evita a compra de energia no “spot”.
3. Os investidores em usinas hidrelétricas na realidade não estão comprando ativos físicos, mas “cotas” de uma “empresa” fictícia. Isto torna possível vender as usinas hidroelétricas como simples “papéis” financeiros, isto é, não é necessário dividir as empresas por bacia, etc. para sua venda.

Uma possível desvantagem do MRE seria o desincentivo que o proprietário teria para operar e manter em boas condições sua usina. Prevê-se no marco regulatório a aplicação de multas por não manter um nível adequado de disponibilidade dos equipamentos, que seriam inspecionados periodicamente.

10

Anexo B: Contratos de compra e venda de energia

Este capítulo discute a segunda parcela de renda de um gerador, que é a venda de contratos de energia.

10.1

Volatilidade dos preços spot

O conjunto de preços spot $\{\pi_{ts}\}$ apresenta flutuações, ou volatilidade, tanto ao longo do tempo, para um mesmo cenário s , como ao longo dos cenários, para um mesmo estágio t .

Como exemplo de flutuações ao longo do tempo, a Figura 10-1 mostra o preço “spot” no sistema Sul-Sudeste brasileiro de janeiro de 1993 a agosto de 1997 (em US\$/MWh).

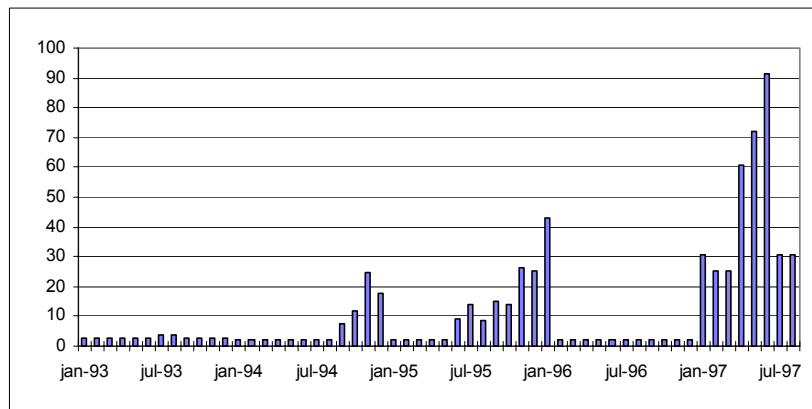


Figura 10-1 – Sistema Brasileiro – Custo marginal de curto prazo.

Vê-se na figura que o preço “spot” do sistema estava próximo de zero em 36 dos 56 meses observados. Também se pode notar que houve um período de quase dois anos (21 meses) onde os preços se mantiveram muito baixos.

Como exemplo de flutuações ao longo dos cenários, a Figura 10-2 mostra a distribuição de frequência prevista do preço “spot” no sistema sul brasileiro, calculadas por um modelo de despacho hidrotérmico (em R\$/MWh). Cinquenta e

um dos 64 cenários hídricos mostram preços abaixo da média. Dentre estes, 26 cenários têm preço “spot” igual a zero. Por outro lado, existem alguns cenários onde o preço “spot” ultrapassa os R\$300/MWh.

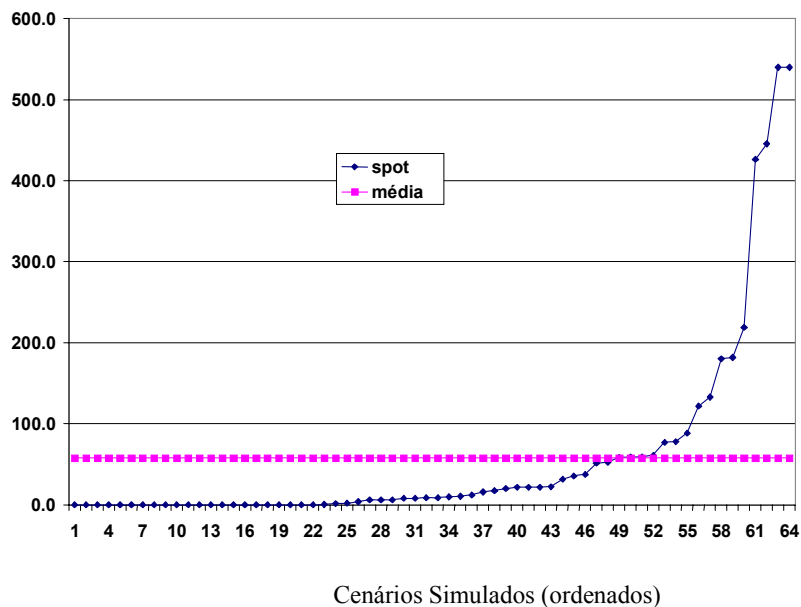


Figura 10-2 – Cenários simulados do Preço “spot”– Janeiro de 2002

A razão para a volatilidade é que os sistemas hidrelétricos são projetados para garantir o atendimento da carga sob circunstâncias hidrológicas adversas, que não ocorrem com frequência. Como resultado, na maior parte do tempo formam-se excedentes temporários de energia (conhecidos como “energia secundária”), o que implica em um preço “spot” muito baixo. Por outro lado, se houver um período de seca, o preço “spot” pode subir abruptamente, chegando a alcançar o custo de racionamento do sistema.

Devido à capacidade de armazenamento do reservatório, estes períodos de baixo custo não apenas ocorrem com frequência, mas podem estender-se por muito tempo, sendo intercalados por períodos de custo muito elevado em decorrência das secas.

10.1.1

Contratos Bilaterais

Os contratos de suprimento têm sido tradicionalmente utilizados como medida de proteção contra a volatilidade da renda líquida resultante da venda de energia no mercado de curto prazo.

Suponha, por exemplo, que um gerador vende hoje um contrato de 100 MWh a um preço de 35 R\$/MWh, com vencimento no estágio t . Nesta data, a produção do gerador é de 95 MWh, a carga é 105 MWh e o preço “spot” do sistema é π R\$/MWh. A renda líquida do gerador e o pagamento líquido da demanda são dados por:

$$R_g = \pi \times G + (35 - \pi) \times E_c \quad (10-1)$$

$$P_d = \pi \times D + (35 - \pi) \times E_c \quad (10-2)$$

As expressões acima contêm duas parcelas: na primeira, o gerador e demanda vendem (compram) sua produção G (consumo D) no “spot”, da maneira tradicional. Na segunda, o gerador e demanda recebem (pagam) o produto da diferença entre o preço contratado e o “spot” pela quantidade E_c contratada.

Suponha que o preço “spot” π seja baixo, por exemplo 10 R\$/MWh. Neste caso, a remuneração correspondente à primeira parcela da expressão (10-1) – venda da geração no spot – é reduzida. Por outro lado, a segunda parcela é positiva, isto é, o gerador recebe uma remuneração adicional à remuneração “spot”. Em outras palavras, o contrato protege o gerador contra preços “spot” reduzidos. Por sua vez, se o preço spot for alto (por exemplo, 50 R\$/MWh), a demanda tem gastos elevados de compra no “spot” (primeira parcela de (10-2)). Estes gastos são parcialmente compensados na segunda parcela, que tem valor negativo. Conclui-se portanto que o contrato protege a demanda contra preços “spot” altos.

A Figura 10-3 resume a situação, mostrando os rendimentos e pagamentos do gerador e demanda (em \$), para as quatro situações: com e sem contrato, preço spot alto e baixo.

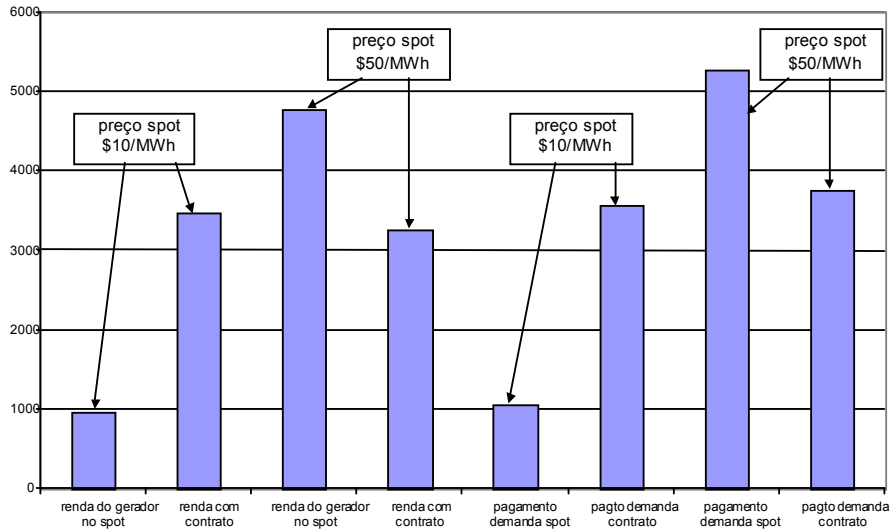


Figura 10-3 – Uso de Contratos para Redução de Volatilidade

10.2

Riscos de preço e quantidade

O contrato de energia, como visto, tem várias características atraentes. Entretanto, também oferece riscos para o gerador, que devem ser quantificados. Em particular, devem ser analisados os cenários onde a produção do gerador é inferior ao montante contratado (em linguagem do setor financeiro, quando o gerador está “short” em relação a seu contrato). Como visto, o gerador nestes casos paga um montante (R\$) dado pela diferença entre contrato e produção (MWh), multiplicada pelo preço spot (R\$/MWh). Se este preço spot for elevado, a perda financeira do gerador pode ser substancial. O recente racionamento de energia no Brasil ilustra bem este risco. Antes do racionamento, 100% da demanda estava contratada com os geradores. Quando houve o racionamento, a demanda se reduziu em 20%, mas os montantes de energia dos contratos não foram afetados (como visto anteriormente, os contratos são “hedges” puramente financeiros). Dado que a produção física de energia é necessariamente igual à demanda física, ocorreu uma diferença também de 20% entre contrato e produção, que deveria ser paga pelos geradores às distribuidoras. Entretanto, o preço spot na época do racionamento era cerca de cinco vezes maior do que o preço que os geradores recebiam pelos contratos; portanto, o montante (R\$) que os geradores

deviam pagar correspondia a 20% (diferença de energia) x 5 (diferença de preço) = 100% da remuneração que recebiam pelos contratos.

Embora o racionamento tenha sido um evento excepcional, este tipo de risco existe nos contratos regulares. No caso das usinas térmicas, o maior risco é uma falha de longa duração do gerador coincidente com um período de preço “spot” elevado. Este risco é relativamente pequeno porque os eventos de falha e preço são estatisticamente independentes; portanto, a probabilidade da ocorrência simultânea de ambos é dada pelo produto das probabilidades individuais.

Entretanto, como visto em [30], a situação das hidrelétricas é diferente, pois há uma correlação **negativa** entre a geração de uma usina hidrelétrica e o preço spot, isto é, a produção tende a diminuir quando o preço spot aumenta, e vice-versa. Este fenômeno é ilustrado nas Figura 10-4 e Figura 10-5, que mostram a evolução do preço spot e nível de armazenamento nos sistema Sudeste ao longo de quatro anos.

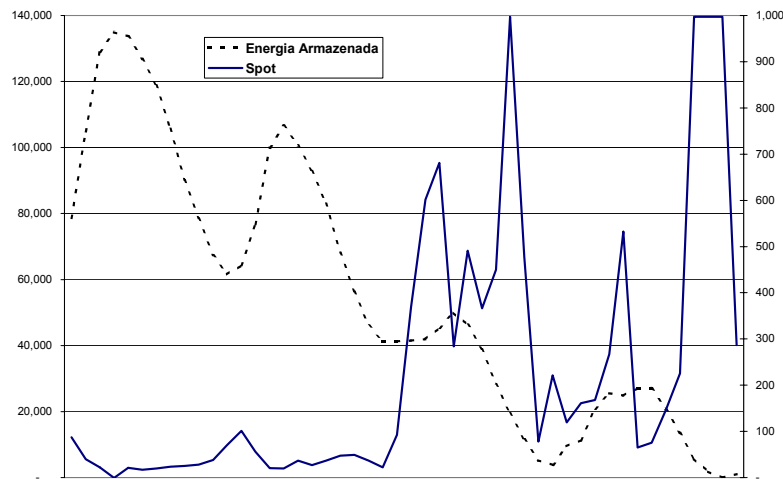


Figura 10-4 – Preços “spot” x Nível de Armazenamento (II) – situação seca

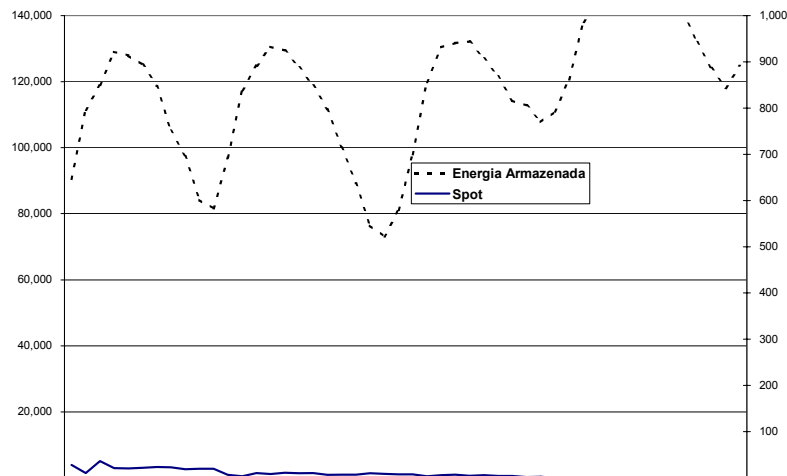


Figura 10-5 – Preços “spot” x Nível de Armazenamento (III) – situação úmida

Esta correlação negativa se deve à grande participação hidrelétrica na geração de energia no Brasil, onde o preço spot é dado, em geral, pelo custo de oportunidade das hidrelétricas. Como visto em capítulos anteriores, este custo de oportunidade reflete a média ponderada dos custos de racionamento e despacho térmicos futuros, que por sua vez dependem dos níveis de armazenamento.

Conclui-se que o montante contratado pela hidrelétrica deve ser cuidadosamente calibrado. Se houver sub-contratação, a hidrelétrica estará exposta ao risco de baixas remunerações nos períodos de preços spot reduzidos; se houver sobre-contratação, a hidrelétrica estará exposta ao risco de compensações financeiras substanciais nos períodos de preço spot elevado.

11

Anexo C: Formas de funções utilidade

11.1

Função Utilidade Quadrática

Este tipo de função é bastante utilizada por proporcionar um resultado analítico, que é o critério média-variância. A função de utilidade quadrática pode ser definida como um polinômio de segundo grau conforme a equação abaixo:

$$U(x) = ax - \frac{1}{2}bx^2 \quad \text{para } a > 0 \text{ e } b \geq 0 \quad (11-1)$$

Esta função é significativa apenas para o domínio de $x \leq a/b$, onde ela é crescente. Outra observação importante é que para $b > 0$, esta função é estritamente côncava, caracterizando um perfil de aversão a risco.

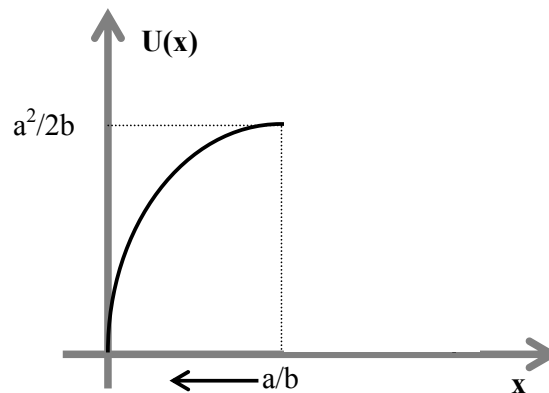


Figura 11-1 – Função de utilidade quadrática

Para demonstrar como a utilidade quadrática reflete o critério de média-variância através de seu valor esperado, vamos assumir que x seja uma v.a. limitada superiormente por a/b , ou seja, $\text{Prob}(x \leq a/b) = 1$. Então o valor esperado da utilidade de x pode ser expresso por:

$$E[U(x)] = aE(x) - \frac{1}{2}bE(x^2) \quad (11-2)$$

$$E[U(x)] = aE(x) - \frac{1}{2}bE(x)^2 - \frac{1}{2}b\text{Var}(x) \quad (11-3)$$

A expressão acima, que só depende da média de x e de sua variância, nos mostra que, se b e a forem maiores que zero e de $x \leq a/b$, o valor esperado da utilidade de x cresce à medida que o valor esperado de x cresce, e em contrapartida, decresce conforme a variância de x aumenta. Essa propriedade é bastante intuitiva e promove uma expressão analítica que simplifica muito o desenvolvimento de diversos problemas.

$$CAR_U(x) = -U''(x)/U'(x) \quad (11-4)$$

$$CAR_U(x) = b/(a-bx) \quad (11-5)$$

Porém, essa forma quadrática apresenta uma “inconsistência” de comportamento, pois como pode ser visto na expressão (11-5), o grau de aversão a risco, expresso pelo coeficiente de aversão a risco, CAR, aumenta à medida que x cresce, o que não é muito intuitivo. Esse fato nos motiva a explorar outras formas de utilidade.

11.2

Função Utilidade Exponencial (EXP)

A função de utilidade exponencial consiste em uma exponencial amortecida negativa. Esta não apresenta o inconveniente de domínio restrito e pode ser encontrada, à medida que se imponha um comportamento onde o CAR seja constante, ou seja, o grau de aversão a risco não se altere ao longo da renda. Dessa maneira, pode-se encontrar a expressão de $U(x)$ através da resolução da equação diferencial a seguir.

$$CAR_U(x) = U''(x)/U'(x) = -a \quad (11-6)$$

Que resulta em:

$$U(x) = -e^{-ax} \quad (11-7)$$

Outra vantagem desta forma pode ser visto no caso em que a distribuição de probabilidade da variável avaliada é normal. Essa apresenta uma propriedade similar à da função quadrática, onde o valor esperado da utilidade proporciona uma expressão analítica em função dos parâmetros da v.a. (média e variância). Na figura a seguir, pode-se visualizar a forma que esta função adquire.

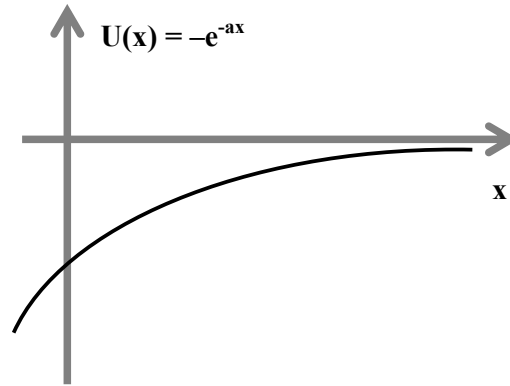


Figura 11-2 – Função de utilidade exponencial negativa

Se x for uma v.a. normal com média μ e variância σ^2 , então o valor esperado da utilidade de x pode ser escrito como:

$$E[U(x)] = - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-ax}}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} dX \quad (11-8)$$

$$E[U(x)] = - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x^2 - (2a\sigma^2 - 2\mu)x + \mu^2)} dX \quad (11-9)$$

Ao completarmos o quadrado do expoente do integrando, em busca da forma padrão de uma distribuição normal, encontra-se a seguinte expressão:

$$E[U(x)] = - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-a\left(\mu - \frac{a}{2}\sigma^2\right)}}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}[x - (2a\sigma^2 - 2\mu)]^2} dX \quad (11-10)$$

Como o integrando da expressão acima, a menos de uma exponencial constante com relação à variável de integração, é a distribuição de uma v.a. normal, a expressão (11-10) pode ser reescrita como:

$$E[U(x)] = -e^{-a\left(\mu - \frac{a}{2}\sigma^2\right)}, \text{ que só depende da média e variância de } x. \quad (11-11)$$

Nesta expressão final, nota-se que:

- (i) à medida que a média aumenta o valor esperado da utilidade cresce.
- (ii) conforme a variância aumenta, o mesmo valor esperado decresce.

Esse resultado, porém, não pode ser generalizado para qualquer distribuição que a v.a. x assuma, como no caso da quadrática.

11.3

Função Utilidade Logarítmica (LN)

A função de utilidade LN pode ser obtida através da imposição de um perfil de aversão a risco, onde o CAR “decaia” com a renda (x), segundo uma hipérbole. Esta hipótese é razoável, visto que se a renda de uma agente aumenta, espera-se que este seja menos avesso ao risco. Assim, se fizermos:

$$\text{CAR}_U(x) = (x+a)^{-1} \quad (11-12)$$

Onde o parâmetro a controla a translação da função, de forma que se permita modificar o CAR da maneira que expresse o perfil de cada agente.

Então,

$$U''(x)/U'(x) = -1/(x+a) \quad (11-13)$$

que resulta na função:

$$U(x) = \ln(x+a) \quad (11-14)$$

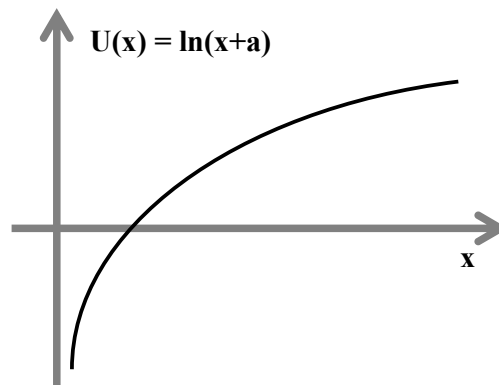


Figura 11-3 – Função de utilidade logarítmica

A função utilidade logarítmica também pode ser justificada para o caso de um agente que busque maximizar a média geométrica dos possíveis resultados

$$\{x_s\}, \text{Max} \prod_{s=1}^S x_s^{1/S}.$$

Como maximizar uma transformação biunívoca e estritamente crescente de qualquer função, não altera o seu ponto de máximo, ao aplicarmos o logaritmo à média geométrica (função objetivo), este proporciona a forma exata do problema de maximização da utilidade esperada para o caso da FU logarítmica, pois

$$\text{Maximizar } \ln\left(\prod_{s=1}^S x_s^{1/S}\right) = \text{Maximizar } \sum_{s=1}^S \ln(x_s).$$

11.4

Utilidade Generalizada de Machina

Em 1944/47 os trabalhos publicados por von Neumann e Morgenstern (vN-M) introduziram a teoria de decisão os axiomas da teoria de utilidade esperada. Neste trabalho as variáveis aleatórias foram caracterizadas por um suporte (possíveis valores) e suas respectivas probabilidades (ver capítulo 7 em [16]). A preferência de um agente entre duas variáveis aleatórias seria feita então, com base em um funcional composto pelo valor esperado da função utilidade aplicada a cada variável. Contudo, este funcional apresenta um comportamento linear com respeito às probabilidades, e traduz todo o perfil de comportamento do agente somente através do mapeamento (função utilidade) do suporte da variável aleatória mensurada.

Savage (1954) sintetizou o conceito de probabilidade subjetiva com a teoria de utilidade esperada de vN-M através da atribuição de diferentes “pesos” a cada probabilidade. Em outras palavras, foi introduzida no funcional de preferência a percepção de diferentes importâncias que se poderia dar às diferentes probabilidades. Este conceito se mostrou bastante intuitivo e foi bem aceito pelos teóricos da área de teoria de decisão, que neste sentido, desenvolveram um gama de trabalhos com o intuito de caracterizar as dependências não lineares nas probabilidades dos funcionais de preferência, dando origem aos chamados “Non-Expected Utility Models”, ou modelos não baseados em utilidade esperada. Alguns exemplos incluem as formas:

- $V(F_R) \equiv \sum_s v(p_s) \cdot u(r_s),$
- $V(F_R) \equiv \sum_s v(p_s) \cdot u(r_s) / \sum_s v(p_{s'}),$
- $V(F_R) \equiv \sum_s p_s \cdot u(r_s) + [\sum_s p_{s'} \cdot g(r_{s'})]^2,$
- $V(F_R) \equiv \sum_s p_s \cdot u(r_s) / \sum_s p_{s'} \cdot g(r_{s'}), \text{ etc.}$

A pesar do intuito destes desenvolvimentos ser o de capturar nos funcionais de preferência o efeito não linear da preferência individual dos agentes por diferentes probabilidades, que passaram também a ser vistas como de propriedade individual de cada agente (probabilidade subjetiva), o trabalho [32] de Mark Machina (1983), mostrou que funcionais mais gerais que o estabelecido por vN-M deveriam comportar mapeamentos tanto do suporte das variáveis aleatórias quanto de suas probabilidades, utilizando-se para isto somente resultados de cálculo. Neste sentido, este mapa poderia ser visto como famílias de utilidades “locais”¹⁹ de vN-M, parametrizadas nas probabilidades. Para exemplificar o argumento de Machina, repetimos no parágrafo abaixo o seu desenvolvimento que evidencia tal fato.

Se R é uma variável aleatória com função de probabilidade acumulada $F_R: \mathcal{R} \rightarrow [0,1]$, e $V(\cdot)$ é um funcional de preferência, diferenciável nas probabilidades, pode-se fazer a expansão de Taylor deste com relação a F_R nas vizinhanças de uma dada função F_R^0 e obter o seguinte resultado:

$$V(F_R) - V(F_R^0) = \int U(r, F_R) [dF_R(r) - dF_R^0(r)] + o(\|F_R - F_R^0\|). \quad (11-15)$$

Onde fica evidente a dependência de V com F_R através de uma “utilidade generalizada” ou do mapa $U(r, F_R)$.

Assim como Machina, outros autores expressaram tal dependência de diversas formas diferentes, contudo, no que diz respeito aos desenvolvimentos que serão feitos neste trabalho, a idéia por trás do funcional proposto por Machina se encaixará perfeitamente às propriedades verificadas pela utilidade por trás do *Conditional Value-at-Risk* (CVaR). Isso não significa que tal utilidade seja um caso particular da utilidade de Machina, mas simplesmente que a idéia da dependência da função utilidade com relação à distribuição da v.a. avaliada seja compartilhada entre ambas.

¹⁹O termo “local” utilizado por Machina se refere à existência de uma função utilidade de vN-M para cada dada função de probabilidade $F(\cdot)$ da variável aleatória em questão.

Como notação, será assumido durante todo o corpo deste trabalho que a palavra “utilidade” se refere à função utilidade clássica de $vN-M$, e quando necessário, será utilizado o termo completo “Utilidade de Machina” ou “Utilidade Generalizada de Machina” para se fazer referência ao mapeamento $U(r, F_R)$ obtido em (11-15).

Anexo D: Relações entre as soluções da utilidade esperada e do equivalente certo no caso multi-período

Vamos supor um caso simples de dois períodos com apenas uma variável de decisão x (escalar), onde normalmente a função objetivo seria maximizar o valor presente das rendas líquidas, descontadas ao custo de capital. Neste exemplo, vamos assumir que o fator de impaciência será igual a uma taxa (J) a que a utilidade $U(\cdot)$ de cada período será descontada para expressar a preferência temporal do agente. Assim, o objetivo do agente é:

$$\text{Max}_{(x)} E\{U[R_1(x, \xi_1)]\} \cdot (1+J)^{-1} + E\{U[R_2(x, \xi_2)]\} \cdot (1+J)^{-2} \quad (12-1)$$

Neste caso, a decisão ótima é tal que atenda à seguinte equação:

$$f_1'(x^*) \cdot (1+J)^{-1} + f_2'(x^*) \cdot (1+J)^{-2} = 0 \quad (12-2)$$

Onde fazemos $f_t(x) = E\{U[R_t(x, \xi_t)]\}$ para simplificarmos e proporcionarmos mais clareza às expressões. Neste contexto, se definirmos como notação que $f_t'(x) \equiv \partial f_t(x) / \partial x$, podemos escrever a derivada de f com respeito a x como: $f_t'(x) = E\{U'[R_t(x, \xi_t)] \cdot R_t'(x, \xi_t)\}$.

Por outro lado, se buscamos a solução ótima sob o critério dos equivalentes certos de cada período, teremos como função objetivo a seguinte expressão:

$$\text{Max}_{(x)} U^{-1}(E\{U[R_1(x, \xi_1)]\}) \cdot (1+J^{LR})^{-1} + U^{-1}(E\{U[R_2(x, \xi_2)]\}) \cdot (1+J^{LR})^{-2} \quad (12-3)$$

Ou, já utilizando a notação anterior,

$$\text{Max}_{(x)} U^{-1}[f_1(x)] \cdot (1+J^{LR})^{-1} + U^{-1}[f_2(x)] \cdot (1+J^{LR})^{-2} \quad (12-4)$$

É importante notar que neste caso, a taxa de desconto utilizada será o custo de capital do agente livre de risco (J^{LR}), uma vez que este enxerga o fluxo $\{U^{-1}[f_t(x)]\}_{t=1,2}$ como sendo determinístico.

Para encontrar o ótimo que satisfaça este critério, devemos encontrar x^* tal que atenda à seguinte igualdade:

$$f_1'(x^{*EC}) \cdot U^{-1}[f_1(x^{*EC})] \cdot (1+J^{LR})^{-1} + f_2'(x^{*EC}) \cdot U^{-1}[f_2(x^{*EC})] \cdot (1+J^{LR})^{-2} = 0 \quad (12-5)$$

Ao compararmos as expressões (12-2) com a expressão acima (12-5), pode-se constatar que estas diferem, além do fator de desconto, na ponderação do gradiente de cada período. Os “pesos” desta ponderação são justamente as inclinações da função inversa da utilidade, onde as utilidades esperadas da renda de cada período, no ponto ótimo $f_1(x^{*EC})$ e $f_2(x^{*EC})$, se encontram. Para o caso da utilidade linear por partes, esses fatores são justamente os coeficientes $e_{k(1)}$ e $e_{k(2)}$ tal que $f_1(x^{*EC}) \in \Theta_{k(1)}$ e $f_2(x^{*EC}) \in \Theta_{k(2)}$. Onde Θ_k representa a região do domínio da inversa da utilidade relativa ao k-ésimo segmento.

Desta maneira, para que as soluções provenientes das duas abordagens sejam as mesmas, ou seja, $x^* = x^{*EC}$, é necessário que $U^{-1}[f_t(x^{*EC})] \cdot [(1+J)/(1+J^{LR})]^t$ seja igual (constante) para todo t e maior que zero, pois desta forma a expressão (12-5) pode ser simplificada e igualada à expressão (12-2). Um caso particular ocorre ao utilizarmos a taxa de impaciência igual à taxa livre de risco, ou seja, $J = J^{LR}$ e ao utilizarmos uma utilidade linear por partes, as utilidades esperadas de cada período assumem valores nos mesmos segmentos, tendo assim as mesmas inclinações $e_{k(1)} = e_{k(2)}$.

Outra relevante comparação pode ser feita no sentido de compara os equivalentes certos obtidos pelo funcional tradicional baseado em utilidade esperada e no proposto neste trabalho para um mesmo fluxo estocástico $\{R_t\}_t$. Para o primeiro caso, que denominaremos de clássico o equivalente certo poderia ser obtido através da aplicação da seguinte igualdade:

$$EC^{(clássico)} = U^{-1} \{ \sum_t E[U(R_t)] \cdot (1+J)^{-t} \} \quad (12-6)$$

Já para a abordagem proposta no capítulo 3 desta tese, o equivalente certo assume uma forma bastante parecida, porém com a inversa da utilidade sendo aplicada a cada termo do somatório e não ao total deste, conforme a expressão que segue mostra:

$$EC^{(proposto)} = \sum_t U^{-1} \{ E[U(R_t)] \} \cdot (1+J^{LR})^{-t} \quad (12-7)$$

Para efeito de comparação, se $J = J^{LR}$ e J^{LR} fosse tal que $\sum_{t>0} (1+J^{LR})^{-t} = 1$, então através da desigualdade de *Jensen* para funções convexas (no caso de U ser côncava – agente avesso a risco) poder-se-ia verificar a seguinte desigualdade:

$$EC^{(\text{proposto})} \geq EC^{(\text{clássico})} \quad (12-8)$$

Mostrando que, neste caso, o equivalente certo proposto estaria atribuindo mais valor ao fluxo $\{R_t\}_t$ que o clássico. Contudo, este caso nunca ocorre na prática e, portanto, cada caso deve ser analisado especificamente, pois não se pode dizer quando um será superior ao outro.

Assim, uma vez que se adota a abordagem proposta nesta tese, é possível calcular o fator de impaciência do agente J^* que torna os equivalentes certos em ambas as abordagens iguais. Neste sentido, como a abordagem proposta não tem a pretensão de invalidar a abordagem clássica, e sim de propor algo mais prático no que diz respeito à preferência entre períodos, o fator J^* de impaciência de um agente poderia ser “estimado” com base nesta igualdade. Logicamente, devemos ser muito cuidadosos com tal afirmação, pois este fator J^* , fruto da igualdade dos equivalentes certos das duas abordagens, seria dependente da maioria dos parâmetros e elementos envolvidos nas expressões dos equivalentes certos, como por exemplo, da função utilidade $U(\cdot)$, da distribuição conjunta de probabilidade $F_R(\cdot)$ do fluxo $\{R_t\}_t$ e obviamente de J^{LR} .

Anexo E: A utilidade por trás do funcional CVAR

Como visto revisado no item 4.2 desta tese, o CVaR pode ser escrito como um problema de maximização de valor esperado com restrições lineares. Neste sentido, a formulação do CVaR se assemelha à formulação da função utilidade linear por partes (2-2)(2-3). Conforme descrito anteriormente, o $\text{CVaR}_\alpha(R)$ de uma v.a. R pode ser formulado conforme a seguinte expressão:

$$\text{CVaR}_\alpha(R) = \sup_{(z)} \{z + E[(R - z)^-]/(1-\alpha)\} \quad (13-1)$$

Onde mostra-se (ver item 4.2) que $z^* = \text{argmax}_{(z)} \{z + E[(R - z)^-]/(1-\alpha)\} = \text{VaR}_\alpha(R)$ e $(\cdot)^-$ é a função truncamento, tal que:

$$(x)^- = x, \text{ se } x \leq 0 \text{ e } (x)^- = 0, \text{ se } x \geq 0 \quad (13-2)$$

Então, podemos supor uma família contínua de funções utilidades (em z) com um parâmetro (α), com a seguinte forma:

$$[U_{(\alpha)}(r)]_z = z + (r - z)^-/(1-\alpha) \quad (13-3)$$

Por conveniência e simplicidade de notação, a família de utilidades será definida e reescrita como $U_{z,\alpha}(r) \equiv [U_{(\alpha)}(r)]_z$.

Podemos verificar que $U_{z,\alpha}$ é côncava com relação ao espaço da família $\{z \in \mathfrak{R}\}$ e no seu domínio $\{r \in \mathfrak{R}\}$ (renda), para um dado α fixo. Isto fica evidente ao analisarmos diretamente o gráfico desta função em ambas as dimensões (“ z ” e “ r ”).

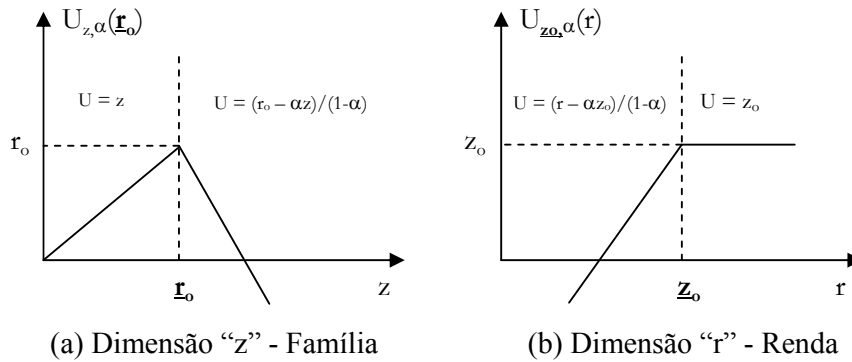


Figura 13-1 – Função de utilidades implícita no CVAR – (a) Análise da função U no domínio da família, fixado o ponto de renda $r = r_0$; e (b) análise da função U no domínio da renda, fixado a utilidade $z = z_0$.

Entretanto, existe apenas uma utilidade de vN-M, dentro da família (13-3), que através do seu valor esperado proporciona o $CVaR_\alpha(R)$. E conforme já visto antes, segundo R.T. Rochafellar et al. [48], essa é tal que $z = z^*(R) = VaR_\alpha(R) = F_R^{-1}(1-\alpha)$, quantil de $1-\alpha\%$ de probabilidade (rever item 4.2 ou [48]). Nesse caso, a função utilidade implícita ao funcional de preferência definido pelo $CVaR_\alpha(\cdot)$ depende explicitamente da função distribuição de probabilidade acumulada (F_R) da v.a. R que está sendo avaliada e pode ser escrita conforme a expressão a seguir:

$$U_{z^*(R),\alpha}(r) = z^* + (r - z^*) / (1 - \alpha) \quad (13-4)$$

Assim, a função utilidade exibida acima pode ser vista como um exemplo de utilidade que exibe dependência com a distribuição da v.a., conceito similar ao obtido pela Utilidade Generalizada de Machina [32]. Entretanto, este não é exatamente o caso da Utilidade de Machina, pois esta última é obtida através da derivada do funcional de preferência com respeito às probabilidades, o que não é bem definido no caso do funcional dado pelo CVAR por se tratar de uma função convexa linear por partes²⁰. Contudo, esta formulação permite uma forma bastante

²⁰Um resultado conhecido de análise de sensibilidade de programação linear é que uma função definida pelos valores que a função objetivo de um problema de otimização linear (maximização) proporciona no ponto ótimo, ao variarmos o lado direito das restrições, é uma função côncava e linear por partes. Para um problema de minimização o resultado análogo é a constatação de uma função convexa. Assim, através da igualdade primal-dual, é fácil constatar que o valor da função objetivo de um problema de maximização é convexo com relação aos coeficientes da função objetivo. Este é justamente o caso das probabilidades na formulação do CVAR.

prática de se obter tal utilidade para um dada distribuição obtida por uma solução intermediária ao processo de otimização. Através do “sup” ou máximo do valor esperado da família de utilidades (13-3), o quantil $z^*(R) = \text{VaR}_\alpha(R) = F_R^{-1}(1-\alpha)$ pode ser selecionado durante a otimização, bastando para isso, incluir um conjunto de restrições lineares adicionais ao problema original. Desta forma, o problema de maximização do funcional de preferência dado pelo $\text{CVaR}_\alpha[R(\mathbf{x})]$, onde “ \mathbf{x} ” é um vetor de decisão que parametriza a distribuição R com S possíveis realizações de probabilidades $\{R_s(\mathbf{x}), p_s\}$, pode ser definido pelo seguinte problema de otimização:

$$\text{Maximizar}_{(x, \beta, z)} \sum_s p_s \cdot z + \sum_s p_s \cdot \beta_s \quad (13-5)$$

Sujeito a:

$$\beta_s \leq 0 \quad \forall s = 1, \dots, S \quad (13-6)$$

$$\beta_s \leq (1-\alpha)^{-1} \cdot [R_s(\mathbf{x}) - z] \quad \forall s = 1, \dots, S \quad (13-7)$$

$$\mathbf{x} \in \mathfrak{X} \quad (13-8)$$

Onde \mathfrak{X} é um conjunto de soluções viáveis de serem tomadas pelo agente.

Além disso, pode-se mostrar que o equivalente certo de R de um agente que utiliza a utilidade (13-4) será exatamente igual ao $\text{CVaR}_\alpha(R)$. Isso decorre do fato de que, por definição, o valor esperado desta utilidade resulta no CVaR da v.a. avaliada e o CVaR de uma variável determinística assume o seu próprio valor. Então, segundo esta função utilidade, o valor determinístico que torna o agente indiferente entre este valor e uma renda estocástica R qualquer será o próprio valor esperado da utilidade de R .

O desenvolvimento necessário para se obter o valor do Equivalente Certo (EC^*) de R é exibido a seguir:

$$\sup_{(z)} \{E[U_{z, \alpha}(\text{EC}^*)]\} = \sup_{(z)} \{E[U_{z, \alpha}(R)]\} \quad (13-9)$$

A partir da definição de $U_{z, \alpha}(r)$ em (13-3) o lado esquerdo assume o valor máximo no ponto EC^* (ver Figura 13-1 – (a) onde o domínio “ r ” está fixado a um valor determinístico). De acordo com (13-1) e (13-3), o lado direito de (13-9) assumirá o valor de $\text{CVaR}_\alpha(R)$, originando assim à expressão do equivalente certo:

$$EC^* = E[U_{z^*(R),\alpha}(R)] = CVaR_{\alpha}(R) \quad (13-10)$$

É interessante ressaltar que a utilidade (13-4) proporciona uma interpretação relativista do perfil de risco do agente, uma vez que este é dependente da própria percepção futura de ocorrências, que vem da distribuição objetiva estimada pelo agente. Isso pode ser evidenciado à medida que, dada uma distribuição, a utilidade proveniente do funcional α -CVaR penaliza somente os resultados abaixo do quantil associado ao α -VaR. Este comportamento pode ser comparado ao comportamento de investidores que projetam os seus fluxos de caixa para um cenário “pessimista” (associado a alguma medida de stress ou pior caso) e ao mesmo tempo o avaliam para um cenário denominado “realista” (normalmente associado ao valor esperado dos fluxos). Geralmente, o investidor somente apresenta uma “descepção” com o projeto se a realização do fluxo se verificar inferior ao cenário pessimista. Caso contrário, o seu retorno já foi assegurado e, portanto, este poderia exibir um perfil indiferente.

Neste sentido, para que a utilidade acima do α -VaR não seja “flat”, exibindo indiferença com relação a valores acima deste, os mesmo desenvolvimentos podem ser realizados para se encontrar a utilidade por trás da combinação convexa entre o CVaR e o valor esperado da v.a. avaliada. Neste caso, a utilidade resultante seria ligeiramente diferente da tratada neste capítulo e carregaria a maioria de suas virtudes, por se tratar de uma composição linear de duas medidas coerentes. Contudo, deixamos este desenvolvimento para pesquisas futuras e possíveis extensões deste trabalho.

13.1

O CVaR e o Equivalente Certo de Ben Tal

De acordo com Bem Tal et al. [7][8], o “valor” de uma dada v.a. R é o máximo que se pode “obter” com ela. Por exemplo, $\sup_{(z)} \{z: z \leq R_s \forall s\}$ poderia ser uma possível valoração para R , entretanto essa atribuição seria demasiadamente avessa a risco, pois o menor valor que R pode assumir pode ser muito improvável. Por isso, foi proposta uma valoração em dois estágios, onde no primeiro estágio atribui-se o valor à v.a. e no segundo, após a realização das incertezas, mede-se a frustração ou sucesso desta atribuição através da uma

função de valor $v(\cdot)$ aplicada a este resultado, $R - z$. O procedimento implícito a esta valoração faz um paralelo com um problema de otimização estocástica de dois estágios com recurso, onde um determinado fluxo de caixa R pode ser “consumido” hoje, através de um valor certo z e em um segundo estágio, quando este terá o seu valor conhecido.

O que Ben Tal propõe é a alocação ótima, que deve ser definida no primeiro estágio (quando o resultado do segundo ainda não é conhecido), do consumo de R entre o primeiro e o segundo estágio. Esta alocação será realizada com base em uma esperança sobre uma função de valor $v(\cdot)$ do indivíduo, referente ao excesso ou déficit de caixa no segundo estágio. Isso é feito em [7] e [8] da seguinte forma:

$$V(R) = \sup_{(z)} z + E\{v(R - z)\} \quad (13-11)$$

O valor $V(R)$ é denominado em [8] de “*Recourse Certainty Equivalent*”, onde a denominação de equivalente certo (“*Certainty Equivalent*”) vem do fato desta medida estar atribuindo um valor equivalente determinístico de indiferença à v.a.. O termo Recurso (“*Recourse*”) é devido à interpretação de recurso dada às violações ou folgas decorrentes das possíveis realizações de $R - z$ conforme feito em problemas de programação estocástica de dois estágios com recurso [27]. Neste mesmo trabalho são vastamente detalhadas as propriedades de coerência da medida (13-11) e de preferência como: translação, aditividade, consistência, subhomogeneidade, convexidade, dominância estocástica de segunda ordem, aversão a risco, etc. Além disso, é abordada a conexão entre este funcional com o funcional de Machina.

Finalmente, podemos fechar o “link” entre este funcional e o CVaR, apenas comparando a expressão (4-3) do CVaR com a expressão (13-11) de Ben Tal et al., na qual se $v(\cdot) = (\cdot)^{1/(1-\alpha)}$, então,

$$V(R) = \sup_{(z)} z + \{E[(R - z)^{1/(1-\alpha)}]\} = \text{CVaR}_{\alpha}(R) \quad (13-12)$$