

## 4

### Relação entre utilidade, equivalente certo e medidas de risco

#### 4.1

##### Medidas de Risco como perfil de aversão a risco

As medidas de risco e suas propriedades têm sido bastante exploradas no contexto de finanças nas últimas duas décadas. Classicamente, o modelo econômico utilizado para capturar o comportamento de aversão a risco em problemas de decisão sob incerteza é o modelo de utilidade esperada. Porém, em função da dificuldade de se encontrar uma utilidade prática, que expresse a aversão a risco do tomador de decisão com base em parâmetros mais práticos do dia-a-dia, de forma mais isenta a uma subjetividade pessoal e que simplesmente expressassem a “aversão ao risco da entidade” como, por exemplo, um banco ou empresa geradora de energia, a busca por medidas de risco que fossem capazes de controlar o risco assumido durante o processo decisório foi bastante impulsionada [19][21][26][28].

Neste sentido, buscou-se atacar o problema “risco” de resultados indesejáveis, de forma mais direta e pragmática, onde a distribuição dos resultados seriam diretamente monitoradas e “controladas” através destas medidas e de valores limites de exposição estipulados pelos comitês de risco. Assim sendo, a atribuição subjetiva de um valor de utilidade ou satisfação para cada resultado, caracterizado pela função utilidade, foi deixado de lado e o objetivo, então, passou a ser maximizar a esperança dos resultados futuros controlados por restrições de risco.

Por exemplo, podemos citar o caso particular do  $\alpha$ -Value-at-Risk ( $VaR_\alpha$ ) [29][40] que propôs controlar a perda financeira associada a um dado quantil  $(1-\alpha)$  da distribuição de probabilidade do resultado. Isso proporcionou a segurança necessária para que o agente tomasse suas decisões baseado na maximização do valor esperado dos resultados, pois a probabilidade de se obter uma dada perda

financeira poderia ser tão pequena quanto se quisesse (controlada pelo valor  $1-\alpha$  especificado pelo agente).

Contudo, a inserção dessas restrições em problemas de otimização estocástica proporcionavam um grande aumento de sua complexidade e em alguns casos requeriam a inclusão de variáveis inteiras, como o caso do Value-at-Risk. Desta forma, muitos estudos foram realizados nesta área no sentido de se desenvolver formas eficientes de se implementar e acoplar tais restrições em problemas de otimização [48]. Além disso, muitos esforços foram realizados no sentido de se estabelecer as propriedades adequadas e desejáveis para tais medidas de risco [9][10][11][ ] com relação à coerência das soluções e resultados obtidos. Segundo Artzner et al. (1999) (referência completa em [10]), se  $\mathcal{X}$  é um espaço linear de funções mensuráveis que definem as variáveis aleatórias (que representam perdas financeiras) do espaço de probabilidade definido por  $(\Omega, \mathcal{P}, P)$  e  $\rho: \mathcal{X} \rightarrow \mathfrak{R}$  é uma medida de risco coerente, então,

1.  $\rho$  deve ser Monótona:  $X \leq Y$ , então,  $\rho(Y) \leq \rho(X)$ ,  $\forall X, Y \in \mathcal{X}$
2.  $\rho$  deve ser Relevante:  $X \geq 0$ , então  $\rho(X) \leq 0$ ,  $\forall X \in \mathcal{X}$
3.  $\rho$  deve ser Sub-adititiva:  $\rho(X + Y) \leq \rho(X) + \rho(Y)$ ,  $\forall X, Y \in \mathcal{X}$
4.  $\rho$  deve ser Homogenia Positiva:  $\rho(\lambda X) = \lambda \rho(X)$ ,  $\forall X \in \mathcal{X}$  e  $\lambda > 0$
5.  $\rho$  deve ser Transladável:  $\rho(X + a) = \rho(X) - a$ ,  $\forall X \in \mathcal{X}$  e  $a \in \mathfrak{R}$

## 4.2

### Conditional Value at Risk (CVaR)

O métrica de risco CVaR tem sido vastamente utilizada em problemas de portfolio e em função da sua capacidade de capturar a presença de eventos de alta profundidade (catastróficos) na distribuição da renda. Esta tem sido uma crítica recorrente feita ao VaR, que não diferencia distribuições com diferentes profundidades de perdas. Geralmente, tanto o VaR quanto o CVaR são definidos para medir perdas, e devido a isso, são definidos para o negativo dos resultados financeiros. Neste contexto, ambos são definidos como limites superiores para as máximas perdas permitidas. Entretanto, neste trabalho vamos assumir, sem perda de generalidade, que ambos são definidos para a renda líquida. Assim, estes passam a ser limites inferiores de resultados mínimos aceitáveis.

Na figura a seguir, é exemplificado o caso de duas distribuições A com menor profundidade em sua cauda inferior e B com possibilidades de eventos de renda bastante negativas. Neste exemplo, ambas as distribuições apresentam o mesmo Value-at-risk de  $\alpha\%$ , ou seja, com probabilidade de  $\alpha\%$  a renda líquida nos dois casos será superior ao valor  $VaR_{\alpha}(A)$  e  $(B)$ . Porém, a distribuição B apresenta um maior valor esperado que A. Desta forma, um modelo com o objetivo de maximizar o valor esperado com uma restrição de risco limitando o VaR, apontaria como solução ótima a opção B.

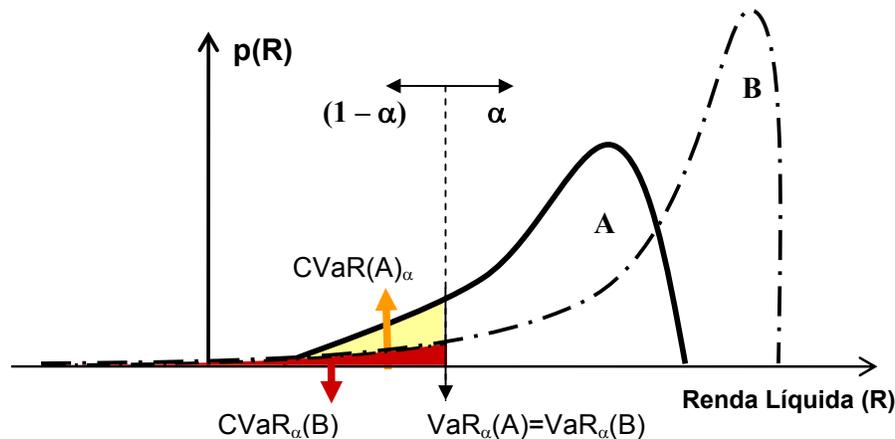


Figura 4-1 – Comparação de  $CVaR_{\alpha}$  para duas distribuições com o mesmo valor de  $VaR_{\alpha}$ , porém com diferentes curtoses.

Entretanto, pode-se argumentar que os eventos extremos da distribuição B poderiam levar a empresa à falência e logo, não deveria ser considerada. Nesta mesma figura, pode-se ver que o  $CVaR$  de ambas as distribuições são diferentes, e que o  $CVaR_{\alpha}(B)$  sinalizou a existência de eventos de alta profundidade abaixo do nível do VaR.

Após o trabalho publicado por R.T. Rockafellar and S.P. Uryasev (2000) [48], o  $CVaR$  foi impulsionado frente às demais medidas de risco devido às características de sua formulação matemática. Essencialmente, o  $CVaR$  que anteriormente era calculado como um valor esperado condicionado ao valor do VaR, conseqüentemente tornando-se dependente da implementação deste último, passou a ser formulado como um problema de otimização de valor esperado irrestrito, sujeito a restrições lineares. Isso possibilitou a sua implementação e

utilização em problemas de otimização linear de forma direta, apenas adicionando um conjunto restrições lineares ao problema.

Diversos trabalhos tem sido realizados no sentido de comparar essas duas medidas (ver [22]), entretanto, o maior crítica feita ao VaR se dá devido ao não atendimento da propriedade de sub-aditividade, para o caso de perdas, ou super-aditividade, para os casos de renda que tratamos nesta tese (uma interessante discussão na linha desta crítica pode ser encontrada em [5] e [6]). Assim sendo, esta medida não atende uma das condições necessárias para se enquadrar na classe de medidas coerentes de risco, podendo levar a decisões errada do ponto de vista de coerência entre risco e retorno [24][25]. Em [5] e [6] também é evidenciada e discutida a não convexidade e a presença de mínimos locais que esta medida proporciona para diferentes portfólios ou diferentes níveis de risco, além de apresentar argumentos no sentido de tornar indispensável o uso de uma medida coerente. Neste contexto, [6] introduz o CVaR como a alternativa natural para o VaR em problemas de portfólio, evidenciando suas propriedades de coerência e convexidade.

A definição clássica para o Conditional Value at Risk ( $CVaR_\alpha$ ) de uma variável aleatória (v.a.)  $R$  com função de probabilidade acumulada  $F_R(r) = P(R \leq r)$  é:

$$CVaR_\alpha(R) = E[R | \Psi] = \int_{\Psi} R \cdot dF_{R|\Psi} \quad (4-1)$$

onde,  $\Psi = \{R: R \leq VaR_\alpha(R)\}$  é o conjunto de valores inferiores a  $VaR_\alpha(R)$ , que a v.a.  $R$  pode assumir,  $F_{R|\Psi}$  é função de probabilidade condicionada ao evento  $\Psi$  e

$$VaR_\alpha(R) = \inf_{(r)} \{r: F_R(r) \geq 1-\alpha\} \quad (4-2)$$

Neste caso, o  $CVaR_\alpha(R)$  é obtido através da esperança condicionada a valores de renda inferiores ao  $VaR_\alpha$ , que pode ser visto como um quantil desta mesma variável aleatória. Esta definição, apesar de ser bastante intuitiva, a primeira vista não oferece uma forma eficiente de ser inserida em problemas de programação linear.

Contudo, segundo Rockafellar et al., o Conditional Value at Risk de uma variável aleatória  $R$  também pode ser escrito através do seguinte problema de otimização:

$$\text{CVaR}_\alpha(R) = \text{Maximizar}_{(z)} \{z + E[(R - z)]^-(1-\alpha)\} \quad (4-3)$$

onde  $(.)^-$  é a função truncamento, tal que,

$$(x)^- = x, \text{ se } x \leq 0 \text{ e } (x)^- = 0, \text{ se } x \geq 0 \quad (4-4)$$

Além disso, no ponto ótimo,

$$z^* = \text{argmax}_{(z)} \{z + E[(R-z)]^-(1-\alpha)\} = \text{VaR}_\alpha(R) \quad (4-5)$$

Assim, se considerarmos os cenários e probabilidades  $\{R_s, p_s\}_{s=1,\dots,S}$  que caracterizam a distribuição de  $R$ , a formulação (4-3) pode ser reescrita pelo seguinte PL:

$$\text{Maximizar}_{(\beta, z)} z + \sum_s p_s \cdot \beta_s \quad (4-6)$$

Sujeito a:

$$\beta_s \leq 0 \quad \forall s = 1, \dots, S \quad (4-7)$$

$$\beta_s \leq (1-\alpha)^{-1} \cdot [R_s - z] \quad \forall s = 1, \dots, S \quad (4-8)$$

Onde a função truncamento negativo  $(.)^-$  é representada pelas restrições (4-7) e (4-8) e inserida na função objetivo através do valor esperado  $\sum_s p_s \cdot \beta_s$ .

O mais interessante desta formulação é que possibilita que esta seja implementada por um PL, como apresentado acima, reside no fato de que ela é definida para todo valor de  $R$ , diferentemente da formulação original (4-1), onde a esperança deve ser restrita a valores pertencentes ao conjunto  $\Psi$ .

No trabalho original [48], a expressão (4-3) é definida para as perdas de percentil superiores a  $\alpha\%$ , mas conforme já comentado, esta pode ser convenientemente associada para as piores rendas líquidas de forma a expressar a idéia de limite inferior para a distribuição de probabilidade. Então, devido à relevância deste resultado, tema central dos próximos desenvolvimentos deste trabalho, vamos rerepresentar a demonstração para o resultado (4-3) e (4-5) adaptado ao nosso caso, que trata de rendas e não de perdas.

#### **Demonstração para (4-5):**

Conforme a expressão (4-3),

$$\text{CVaR}_\alpha(R) = \text{Maximizar}_{(z)} H(R, z) \quad (4-9)$$

onde

$$H(R,z) = z + \frac{1}{(1-\alpha)} \cdot \int (R-z)^- \cdot dF_R \quad (4-10)$$

Como a função truncamento  $(.)^-$  retornará zero para valores de  $R \geq z$ , esta expressão pode ser reescrita manipulada da seguinte forma

$$H(R,z) = z + \frac{1}{(1-\alpha)} \cdot \int_{\{R \leq z\}} R - z \cdot dF_R \quad (4-11)$$

$$H(R,z) = z + \frac{1}{(1-\alpha)} \cdot \left( \int_{\{R \leq z\}} R \cdot dF_R - \int_{\{R \leq z\}} z \cdot dF_R \right) \quad (4-12)$$

$$H(R,z) = z + \frac{1}{(1-\alpha)} \cdot \left( \int_{\{R \leq z\}} R \cdot dF_R - z \cdot F_R(z) \right) \quad (4-13)$$

$$H(R,z) = z \cdot \left( 1 - \frac{F_R(z)}{1-\alpha} \right) + \frac{1}{(1-\alpha)} \cdot \left( \int_{\{R \leq z\}} R \cdot dF_R \right) \quad (4-14)$$

Esta última então, pode ser facilmente derivada com relação a “z” e igualada a zero, conforme segue.

$$\frac{\partial H(R, z^*)}{\partial z} = 1 - \frac{F_R(z^*)}{1-\alpha} - \frac{z^* \cdot f_R(z^*)}{(1-\alpha)} + \frac{z^* \cdot f_R(z^*)}{(1-\alpha)} = 1 - \frac{F_R(z^*)}{1-\alpha} = 0 \quad (4-15)$$

Resultando em,

$$F_R(z^*) = 1-\alpha \quad (4-16)$$

Assim, conforme definido em (4-2),

$$z^* = \text{VaR}_\alpha(R) \quad (4-17)$$

Desta maneira, chegamos ao final da demonstração de (4-5). Para finalizar este resultado, podemos constatar que  $z^*$  é um ponto de máximo analisando a segunda derivada de  $H(R,z)$ . Como esta será negativa, para todo valor de  $z$ ,  $z^*$  será obrigatoriamente um máximo.

#### **Demonstração de (4-3):**

Para demonstrar a igualdade (4-3), basta verificarmos que esta se dá ao avaliarmos  $H(R,z)$  em  $z^*$ . Para isso, recorreremos à expressão (4-13) já convenientemente manipulada.

$$H(R,z^*) = z^* + \frac{1}{(1-\alpha)} \cdot \left( \int_{\{R \leq z^*\}} R \cdot dF_R - z^* \cdot F_R(z^*) \right) \quad (4-18)$$

E devido à identidade (4-16), o segundo termo da equação acima se cancelará com o primeiro termo, acarretando em

$$H(R, z^*) = \frac{1}{(1-\alpha)} \cdot \int_{\{R \leq z^*\}} R \cdot dF_R \quad (4-19)$$

Nesta, o termo  $(1-\alpha)^{-1}$  representa a probabilidade  $P(R \leq \text{VaR}_\alpha(R))^{-1}$ , que ao ser convenientemente combinada com  $F_R$ , e integrada em  $\Psi = \{R \leq z^*\}$ , reflete a esperança condicional do CVaR, conforme a definição original dada em (4-1):

$$H(R, z^*) = \int_{\Psi} R \cdot dF_{R|\Psi} \quad (4-20)$$

Assim, finalizamos a demonstração para (4-3).

### 4.3

#### **Relação entre problemas de maximização de renda com restrições de Conditional Value-at-Risk (CVaR) e problemas de maximização da Utilidade Esperada**

Como mencionado, os desenvolvimentos dos grupos de finanças, aplicados a problemas práticos do dia-a-dia das empresas e instituições financeiras, caminhou no sentido de controlar o risco das posições assumidas (decisões tomadas), enquanto que o estudo da preferência entre resultados incertos de consumidores avessos a risco e suas conseqüências na formação e desenvolvimento de economias prosseguiu através da teoria de utilidade pelos economistas.

Assim, rapidamente criou-se um descasamento entre as duas vertentes (finanças e economia – medidas de risco e teoria de utilidade) que visavam modelar o mesmo processo (decisão sob incerteza), porém com abordagens diferentes. Enquanto os grupos de finanças buscavam tomar decisões altamente pragmáticas (quanto capital alocar hoje em um determinado grupo de ativos) com implicações extremamente realistas e arriscadas (resultados financeiros destas operações ao longo de um determinado horizonte de tempo), a teoria econômica visava caracterizar as propriedades decorrentes da atuação dos agentes frente ao risco em diversas economias.

Obviamente, nenhuma das duas finalidades é mais ou menos relevante que a outra, e claramente estão conectadas pelo seu objetivo comum: como caracterizar

o perfil de risco de um agente para que este seja capaz de tomar decisões sob incerteza. Nesse sentido, vamos mostrar como um conjunto de restrições de risco, que visam controlar os valores esperados condicionais de diferentes níveis de significância da distribuição dos resultados financeiros, pode ser interpretado como uma função utilidade linear por partes.

Para demonstrar de maneira simples essa conexão, vamos considerar um processo decisório de dois estágios, onde o agente deve tomar uma decisão no primeiro estágio, selecionando um vetor  $\mathbf{x}$ , a qual acarretará em uma renda estocástica no próximo estágio. Assumiremos que a função de renda representada por  $R(\mathbf{x}, \xi)$  é linear em  $\mathbf{x}$ . Esta hipótese é bastante plausível e engloba a maioria dos problemas de decisão de compra e venda de energia elétrica e de ativos em geral, onde  $\mathbf{x}$  representa os montantes de contratação e  $\xi$  geralmente compreende os preços de mercado spot, produção de energia e outros fatores de incerteza que podem ser modelados.

Assim, a estratégia será seguinte: vamos escrever o problema de maximização da renda esperada sujeito a um conjunto de  $M$  restrições de risco do tipo,  $\{CVaR_{\alpha_i}(R) \geq R_i^{\min}\}_{i=1, \dots, M}$ , e mostrar que este pode ser reescrito como um problema de programação linear definido em (3-6) a (3-8) (proveniente da aplicação da formulação (2-2) a (2-3)).

Desta forma, o problema de maximização da renda esperada sujeito a  $M$  restrições  $\{CVaR_{\alpha_i}(R) \geq R_i^{\min}\}_{i=1, \dots, M}$  pode ser visto a seguir.

$$\text{Maximizar}_{(\mathbf{x}, \beta, z)} \sum_s p_s \cdot R(\mathbf{x}, \xi_s) \quad (4-21)$$

Sujeito a:

$$\beta_{i,s} \leq 0 \quad \text{para todo } i = 1, \dots, M \text{ e } s = 1, \dots, S \quad (4-22)$$

$$\beta_{i,s} \leq (1 - \alpha_i)^{-1} \cdot [R(\mathbf{x}, \xi_s) - z_i] \quad \text{para todo } i = 1, \dots, M \text{ e } s = 1, \dots, S \quad (4-23)$$

$$z_i + \sum_s p_s \cdot \beta_{i,s} \geq R_i^{\min} \quad \text{para todo } i = 1, \dots, M \quad (4-24)$$

$$\mathbf{G} \cdot \mathbf{x} \leq \mathbf{d} \quad (4-25)$$

Onde  $\alpha_i \geq \alpha_{i+1}$  e  $R_i^{\min} \leq R_{i+1}^{\min}$  para todo  $i=1, \dots, M$

Como visto no item anterior 4.2, as duas primeiras restrições deste problema produzem o efeito de truncamento negativo para os cenários da renda com relação

às variáveis  $\{z_i\}$ . Se dualizarmos o conjunto de restrições (4-24), inserindo na função objetivo uma penalização  $\lambda = [\lambda_1, \dots, \lambda_M]^T$  por unidade de folga, dada pelo módulo do multiplicador simplex (ou variável dual de cada restrição), obtido ao se encontrar o ponto ótimo do problema original, obteremos uma nova função objetivo:

$$F^{\text{obj}} = \sum_s p_s \cdot R(\mathbf{x}, \xi_s) + \sum_i \lambda_i \cdot (z_i + \sum_s p_s \cdot \beta_{i,s} - R^{\text{min}}_i) \quad (4-26)$$

Devido ao fato da restrição ser do tipo maior ou igual “ $\geq$ ”, a variável dual associada a esta restrição será negativa, indicando que ao aumentar o lado direito desta ( $R^{\text{min}}$ ) estamos restringindo o espaço viável e, portanto, decrescendo o valor da função objetivo. Devido a este fato as penalidades  $\{\lambda_i\}$  serão igualadas aos valores absolutos das respectivas variáveis duais das restrições de CVaR, garantindo assim, a coerência de (4-26) com o processo de relaxação lagrangeana do problema (4-21) a (4-25).

Esta nova função, nos permitirá alcançar o objetivo de mostrar que existe uma função linear por partes implícita no problema de maximização do valor esperado com restrições de CVaR mínimo que pode ser interpretada ou associada a uma função utilidade. Para isso, vamos rearranjar os termos estocásticos (termos que dependam dos cenários – s) para dentro de um mesmo somatório que represente o valor esperado dos mesmos, e por fim, obter a seguinte expressão:

$$F^{\text{obj}} = \sum_s p_s \cdot [R(\mathbf{x}, \xi_s) + \sum_i \lambda_i \cdot \beta_{i,s}] + \sum_i \lambda_i \cdot (z_i - R^{\text{min}}_i) \quad (4-27)$$

Nesta, se olharmos somente para o primeiro termo (contido dentro do somatório de valor esperado,  $\sum_s p_s \cdot [R(\mathbf{x}, \xi_s) + \sum_i \lambda_i \cdot \beta_{i,s}]$ ), perceberemos que se trata de uma função linear por partes da função de renda R, com M+1 segmentos. Como visto no item anterior 4.2, para cada cenário s, a variável  $\beta_{i,s}$  desempenha o papel da função truncamento  $(\cdot)^-$  negativa dentro do problema de otimização (4-21) a (4-25) através das restrições (4-22) e (4-23). Desta forma, a função linear por partes implícita em (4-27) é composta por uma reta de inclinação um que sai da origem, somada a M outras funções lineares por partes, cada uma com dois segmentos dados pelas restrições (4-22) e (4-23). Essas componentes são ilustradas para um caso de duas restrições, para um ponto de renda “r”, qualquer, pertencente ao domínio desta.

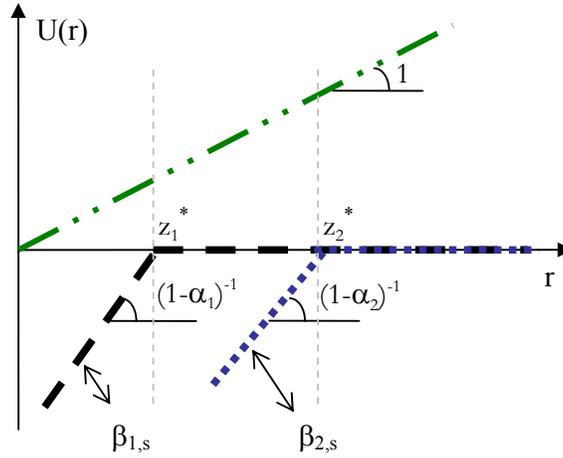


Figura 4-2 – Componentes da Função Utilidade Linear por Partes implícita ao problema de maximização da renda esperada sujeito a um conjunto de restrições do tipo CVaR.

Como o conjunto de restrições é um conjunto coerente, no sentido de que nenhuma restrição é sempre dominada por outra<sup>8</sup>, a seqüência  $\{(1-\alpha_i)^{-1}\}_{i=1,\dots,M}$  é decrescente. Além disso, devido à  $\alpha_i \geq \alpha_{i+1}$ , a seqüência de valores obtidos (ótimos – solução de (4-3)) para  $\{z_i^*\}_{i=1,\dots,M}$  é crescente e igual a  $\{z_i^* = \text{VaR}_{\alpha_i}[R(\mathbf{x}, \xi)]\}_{i=1,\dots,M}$ .

A composição dessas curvas pode ser generalizada da seguinte forma: para um dado valor de renda  $r \in (z_{k-1}^*, z_k^*]$ , onde  $z_0^* = -\infty$ , a curva composta somente receberá contribuição das funções diferentes de zero neste ponto, o que é equivalente a somar todas as “i” funções, tais que  $z_i^* \geq r$ , ponderadas pelos respectivos multiplicadores  $\lambda_i$ . Isso pode ser expresso por:

$$U(r) = r + \sum_{\{i: k \leq i \leq M\}} \lambda_i \cdot (1-\alpha_i)^{-1} \cdot (r - z_i^*) \quad \text{para } r \in (z_{k-1}^*, z_k^*] \quad (4-28)$$

e reescrito de forma a isolar o termo referente ao ponto de renda avaliado “r” conforme a seguinte expressão:

$$U(r) = r \cdot [1 + \sum_{\{i: k \leq i \leq M\}} \lambda_i \cdot (1-\alpha_i)^{-1}] - \sum_{\{i: k \leq i \leq M\}} \lambda_i \cdot (1-\alpha_i)^{-1} \cdot z_i^* \quad (4-29)$$

<sup>8</sup> Uma dada restrição  $i \in \{1, \dots, M\}$  de CVaR é dita “dominada” se existir alguma outra restrição  $j \in (\{1, \dots, M\} \setminus \{i\})$  com  $(1 - \alpha_j) \leq (1 - \alpha_i)$  e  $R^{\min}_j \geq R^{\min}_i$ . Ou seja, se existir uma exigência de renda mínima superior à da restrição i, para uma média condicionada a um quantil inferior ao associado a esta restrição, esta será dita dominada.

válida somente para  $r \in (z_{k-1}^*, z_k^*]$

Desta forma, ao associarmos os coeficientes desta função para cada segmento  $\{\Theta_k = (z_{k-1}^*, z_k^*]\}_{k=1, \dots, M+1}$  com os coeficientes  $\{a_k$  e  $b_k\}_{k=1, \dots, K}$  do problema (2-2) e (2-3), encontramos uma função utilidade linear por partes, tal que, ao resolvermos o problema de maximização da utilidade esperada (3-6) a (3-8) com esta, o resultado obtido é exatamente o mesmo que o encontrado pelo problema (4-21) a (4-25). Esta afirmação pode ser constatada através das condições de otimalidade de programação linear. Na solução ótima, quando a variável dual  $\lambda_i$  da  $i$ -ésima restrição de CVaR for diferente de zero a folga desta restrição valerá zero e vice-versa. Então, a associação dos coeficientes da utilidade pode ser feita diretamente da equação em (4-29) conforme a seguir:

$$a_k = [1 + \sum_{\{i: k \leq i \leq M\}} \lambda_i \cdot (1 - \alpha_i)^{-1}] \quad \text{para todo } k = 1, \dots, K = M + 1 \quad (4-30)$$

$$b_k = - \sum_{\{i: k \leq i \leq M\}} \lambda_i \cdot (1 - \alpha_i)^{-1} \cdot z_i^* \quad \text{para todo } k = 1, \dots, K = M + 1 \quad (4-31)$$

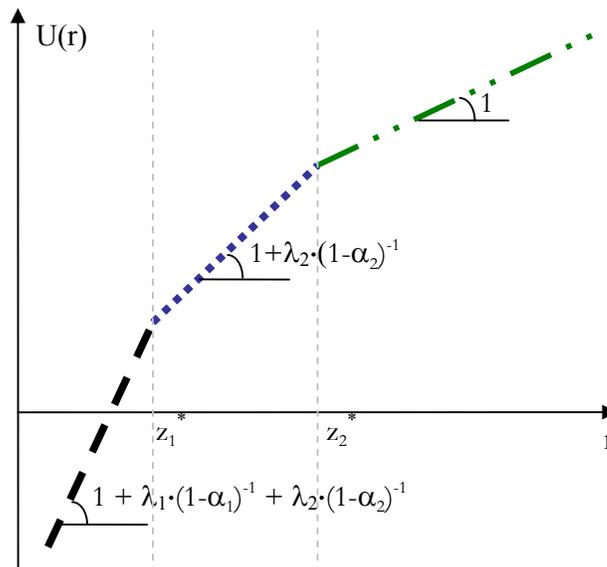


Figura 4-3 – Função Utilidade Linear por Partes implícita ao problema de maximização da renda esperada sujeito a um conjunto de restrições do tipo CVaR.

É importante notar que esta função utilidade é uma função utilidade clássica de von Neumann-Morgenstern (vN-M) encontrada a partir das condições de otimalidade do problema original. Segundo vN-M [56], a função utilidade não depende da distribuição da variável aleatória avaliada. Contudo, vimos em (4-30)

e (4-31) que a FU implícita ao problema (4-21) a (4-25) depende do valor ótimo  $\{z_i^*, \lambda_i\}_{i=1,\dots,M}$  das variáveis primais e duais associadas às restrições de CVaR deste ponto. A presença destas variáveis na expressão da função utilidade identifica a dependência desta com o parâmetro estocástico  $\xi$ .

Desta forma, uma vez fixados os parâmetros  $\{R_i^{\min}\}_{i=1,\dots,M}$  e  $\{\alpha_i\}_{i=1,\dots,M}$ , existe uma função utilidade para cada distribuição que o parâmetro de incerteza (instância do problema) possa apresentar. O efeito desta dependência será estudado mais adiante no exemplo ilustrado no item 4.4.1, onde será evidenciada a não linearidade com relação às probabilidades do funcional de preferência implícito ao problema analisado de maximização de renda sujeito à restrição de CVaR mínimo.

Este conceito é ainda mais acentuado ao estudarmos o comportamento do funcional implícito ao problema  $\text{Maximizar}_{(x)}\{\text{CVaR}_\alpha[R(x,\xi)]:G \cdot x \leq d\}$ , ou seja, quando o funcional é definido pelo próprio  $\text{CVaR}_\alpha[R(x,\xi)]$ . Para este caso, em que o índice de preferência dado a uma distribuição é o seu próprio CVaR, será evidenciada a presença de uma utilidade linear por partes de dois segmentos cujo ponto de quebra e os segmentos dependerão explicitamente da distribuição de probabilidade da variável aleatória  $R(x,\xi)$  avaliada. O caso em que a FU depende da distribuição de probabilidade avaliada foi previsto por Machina em [32] para funcionais diferenciáveis nas probabilidades, que não é exatamente o caso que estamos tratando, porém a idéia desta dependência nos abre uma fonte de discussão bastante interessante para futuros trabalhos. A idéia desta utilidade será explorada e sua expressão final formalizada no Anexo E: A utilidade por trás do funcional CVAR.

### 4.3.1

#### Exemplo

Para ilustrar o resultado obtido e visualizarmos a função utilidade relativa a um caso onde será imposta uma restrição de CVaR, vamos considerar o mesmo problema de contratação ótima introduzido no capítulo anterior.

Contudo, neste caso nos restringiremos a apenas um período (ano de 2010), para o qual examinaremos os resultados obtidos. Com o intuito de exemplificar o

relacionamento as duas classes de problemas (maximização de renda esperada sujeito a uma restrição de CVaR e a forma clássica de maximização de utilidade esperada), seguiremos os seguintes passos: (i) analisar a distribuição de renda para o caso neutro a risco (maximizar o valor esperado da renda sem restrição) e identificar a presença de eventos indesejáveis; (ii) utilizar o modelo de maximização de renda com uma restrição de CVaR para a renda mínima; (iii) com base na solução deste problema, encontrar os valores para os dois coeficientes, angulares (4-30) e lineares (4-31), traçando assim, a utilidade implícita ao modelo utilizado em (ii).

Desta maneira, vamos considerar o mesmo gerador hidrelétrico com 100 MW médios de lastro descontratados, e encontrar o montante de contratação ótimo para uma proposta de contratação com início em janeiro de 2010 e duração de um ano, ao preço de 120 R\$/MWh (preço inferior ao preço considerado no exemplo do item 3.4, onde o contrato compreendia um período de 5 anos).

A decisão neutra a risco, sem qualquer restrição ou utilidade, é novamente de contratar 100% do lastro (espaço descontratado), devido ao preço spot médio em 2010 assumir o valor de 114 R\$/MWh, inferior aos 120 do contrato. Assim, a consequente distribuição de renda para o gerador pode ser visualizada na figura abaixo:

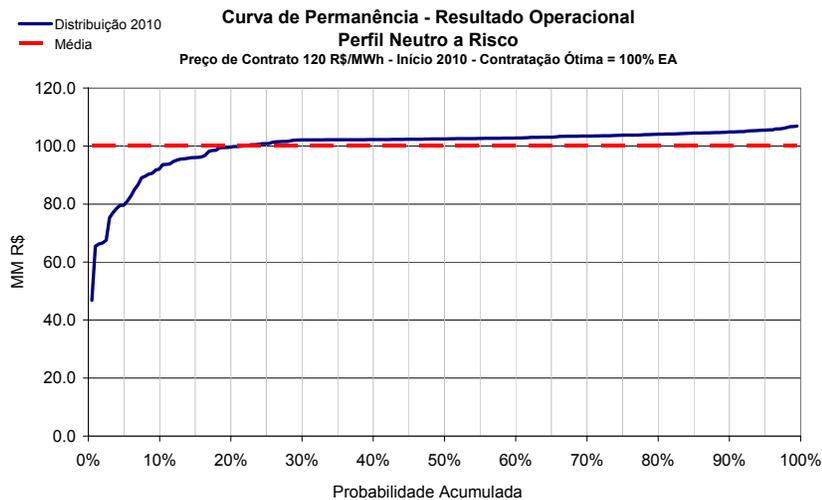


Figura 4-4 – Distribuição da Renda para um perfil neutro a risco – 100% do Lastro contratado – Preço de contrato igual a 120R\$/MWh – início em 2010 – duração de um ano.

O valor esperado do resultado neutro a risco, 100 MMR\$ durante todo o período (2010), pode ser contrastado com valores inferiores a 80 MMR\$ (perda de 20% com relação à média) que podem ocorrer com uma probabilidade de 5%. Assim, de forma a limitar esta perda, vamos impor uma restrição sobre a média dos cenários que apresentam o percentil associado inferior a 5%, para que esta seja assim, superior a 85 MMR\$. Ou seja, impor a restrição  $CVaR_{95\%}(R_{2010}) \geq 85$  MMR\$.

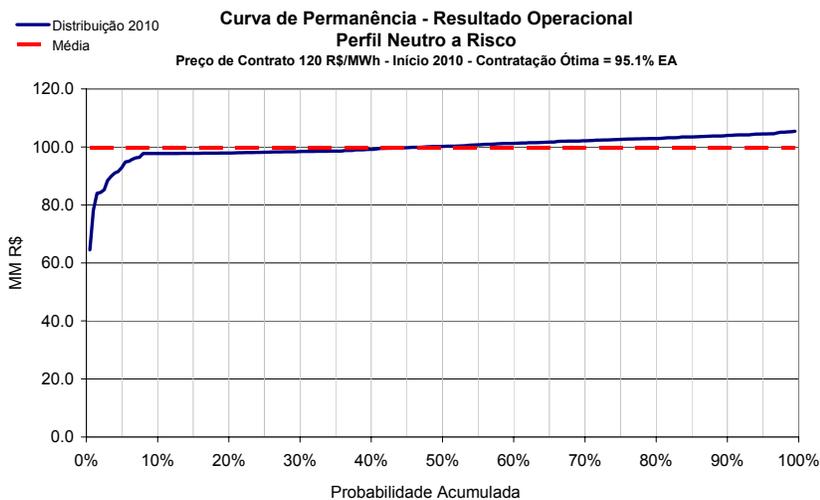


Figura 4-5 – Distribuição da Renda para um perfil avesso a risco ( $CVaR_{95\%}(R_{2010}) \geq 85$  MMR\$) – 95.1% do Lastro contratado – Preço de contrato igual a 120R\$/MWh – início em 2010 – duração de um ano.

Na figura acima, já se pode notar a melhoria dos 5% piores cenários com relação ao caso neutro a risco. Para este caso, a variável dual associada à restrição de renda mínima assumiu o valor  $\lambda = |-0.0146|$  e o respectivo ponto  $z_1^* = 94.79$ . Pode-se então apresentar a função utilidade de dois segmentos relativa a este problema que resultou na mesma solução anterior (95.1% de contratação):

Tabela 4-1 – Coeficientes da Função Utilidade Linear por Partes

| Segmentos | Coeficientes angulares $\{a_k\}$ | Coeficientes lineares $\{b_k\}$ |
|-----------|----------------------------------|---------------------------------|
| 1         | 1.29                             | -27.77                          |
| 2         | 1                                | 0                               |

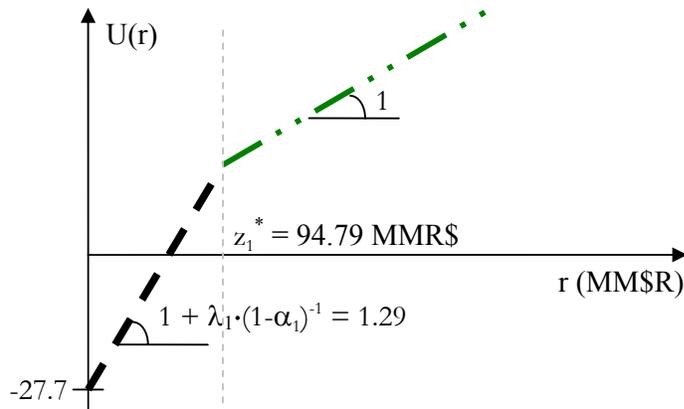


Figura 4-6 – Função Utilidade de dois segmentos (M+1) implícita para o caso de uma (M) restrição de CVaR.

#### 4.4

#### O Equivalente Certo em problemas de maximização de renda com restrições de CVaR mínimo

Conforme desenvolvido no item anterior, a relação entre as abordagens baseadas em restrições de risco, largamente utilizadas pelos grupos de finanças, foi interpretada e conectada à abordagem baseada na maximização de um funcional local de utilidade esperada. Foi evidenciada a dependência da função utilidade obtida neste caso com a distribuição dos parâmetros de incerteza. Além disso, foi apontado um anexo (Anexo E:) que discute semelhanças entre o funcional baseado na Utilidade Generalizada de Machina e o problema de maximização do CVaR, que é uma abordagem alternativa ao problema de maximização de renda esperada com restrições de CVaR mínimo estudado ao longo deste capítulo.

Contudo, voltando para a primeira abordagem, foco deste capítulo, onde o agente busca maximizar a renda esperada e impõe o seu perfil de risco sob a

forma de restrições de CVaR, torna-se importante formalizar o processo de obtenção do equivalente certo associado a cada distribuição que  $R(\mathbf{x}, \xi)$  pode assumir de forma condizente com o funcional de preferência implícito à ordenação imposta por este problema. Desta forma, o problema em questão pode ser visto como um problema de maximização de um funcional de preferência, como será evidenciado logo a seguir, pode-se encontrar o equivalente certo proveniente deste funcional. Contudo, para encontrarmos este equivalente certo, não mais poderemos utilizar a expressão clássica (3-2), pois a “utilidade” implícita a este funcional assume diferentes formas para diferentes distribuições de probabilidade avaliadas. Assim sendo, deveremos recorrer à definição mais elementar, (3-1), e através desta obter o equivalente certo de  $R(\mathbf{x}, \xi)$  de forma condizente ao funcional em questão.

A definição de equivalente certo, como sendo o menor valor (EC em \$) certo (determinístico) para o qual o agente fica indiferente entre a renda aleatória  $R(\mathbf{x}, \xi)$  e este, nos permite escrever a seguinte definição:

$$EC[R(\mathbf{x}, \xi)] = \inf_{(\mu)} \{ \mu \in \mathcal{R} : \Phi[R(\mathbf{x}, \xi)] \leq \Phi(\mu) \} \quad (4-32)$$

Onde  $\Phi(\cdot)$  é o funcional de preferência do agente. Por exemplo, para o caso da função utilidade clássica, esse é igual ao valor esperado da utilidade e a expressão (4-32) é atendida na igualdade, quando  $\Phi[R(\mathbf{x}, \xi)] = \Phi(\mu)$ . Dessa maneira, como  $\Phi(\cdot) = E[U(\cdot)]$ , este funcional permite uma expressão analítica para o valor  $EC = \mu^*$  que produz essa igualdade através da inversa de  $U(\cdot)$  aplicada à utilidade esperada da renda, conforme visto em (3-1) e (3-2).

Então, a estratégia adotada para relacionar o problema de maximização do equivalente certo com o problema de maximização da renda esperada sujeito a uma restrição de CVaR mínimo, o qual chamaremos de problema original a partir de agora, será a seguinte: (i) mostrar que o problema original pode ser visto como um problema de maximização de um funcional de preferências incompleto de variáveis aleatórias, que produz valores de preferência somente para um subconjunto de distribuições factíveis de serem avaliadas, (ii) apresentar uma extensão deste funcional de forma a torná-lo completo sem alterar suas propriedades e resultados dentro do conjunto já considerado, e finalmente, (iii) aplicar a definição de equivalente certo para este funcional e encontrar a expressão do seu equivalente certo.

Se pensarmos em um funcional que produza a ordenação e os valores produzidos pelo problema original (4-21) a (4-25), este deverá ser composto pelo valor esperado da renda aleatória  $E[R(\mathbf{x}, \xi)]$ , restrito às distribuições que atendam a  $CVaR_\alpha[R(\mathbf{x}, \xi)] \geq R^{\min}$ , indicando que distribuições que proporcionem o  $CVaR_\alpha$  abaixo de  $R^{\min}$  não são em hipótese alguma admitidas.

Intuitivamente pode-se argumentar que o equivalente certo de  $R(\mathbf{x}, \xi)$  deverá ser o seu valor esperado, se a distribuição atender à restrição de  $CVaR_\alpha$ . Por outro lado, para o caso em que a restrição não é atendida, o equivalente certo não estará definido. Dessa forma, será importante estender este funcional para o caso geral, sem alterar as preferências já dadas para as distribuições que atendem à restrição de risco. Para isso, vamos separar a região poliédrica de decisão  $\mathcal{N} = \{\mathbf{x} \in \mathcal{R}_+^n : \mathbf{G} \cdot \mathbf{x} \leq \mathbf{d}\}$  em duas: região viável de decisões com relação às restrições de  $CVaR$ ,

$$\mathcal{N}(\xi)^V = \{\mathbf{x} \in \mathcal{N} : CVaR_\alpha[R(\mathbf{x}, \xi_s)] \geq R^{\min}\} \quad (4-33)$$

e região inviável de decisões que proporcionam distribuições indesejáveis,

$$\mathcal{N}(\xi)^I = \{\mathbf{x} \in \mathcal{N} \setminus \mathcal{N}(\xi)^V\} \quad (4-34)$$

Devemos também, explicitar a separação do problema original em dois estágios, onde o primeiro estágio seleciona a decisão  $\mathbf{x} \in \mathcal{N}$  e o segundo estágio avalia o valor desta solução através de um funcional  $Q[R(\mathbf{x}, \xi)] = \{E[R(\mathbf{x}, \xi)] : \mathbf{x} \in \mathcal{N}(\xi)^V\}$ . Na seqüência são apresentados os problemas do primeiro e segundo estágio que traduzem o processo de decisão descrito.

1º Estágio: Seleciona  $\mathbf{x}$  com base no conjunto  $\mathbf{x} \in \mathcal{N}$

$$\text{Maximizar}_{(\mathbf{x})} Q[R(\mathbf{x}, \xi)] \quad (4-35)$$

Sujeito a:

$$\mathbf{G} \cdot \mathbf{x} \leq \mathbf{d} \quad (4-36)$$

2º Estágio: Avalia  $E[R(\mathbf{x}, \xi)]$  somente se  $\mathbf{x} \in \mathcal{N}(\xi)^V$

$$Q[R(\mathbf{x}, \xi)] = \text{Maximizar}_{(\beta, z)} \sum_s p_s \cdot R(\mathbf{x}, \xi_s) \quad (4-37)$$

Sujeito a:

$$\beta_s \leq 0 \quad \forall s = 1, \dots, S \quad (4-38)$$

$$\beta_s \leq (1-\alpha)^{-1} \cdot [R(\mathbf{x}, \xi_s) - z] \quad \forall s = 1, \dots, S \quad (4-39)$$

$$z + \sum_s p_s \cdot \beta_s \geq R^{\min} \quad (4-40)$$

Neste segundo problema,  $Q[R(\mathbf{x}, \xi)]$  representa o resultado do segundo estágio do problema original e exerce o papel de receber a decisão  $\mathbf{x}$  selecionada no primeiro estágio e retornar o valor esperado da renda conseqüente desta decisão. Entretanto esta atribuição se dará apenas para os casos viáveis de renda, ou seja, casos onde a distribuição de renda atenda ao critério de CVaR mínimo. Contudo, como argumentado anteriormente,  $Q[R(\mathbf{x}, \xi)]$  não atribui qualquer preferência para distribuições de renda provenientes de  $\mathcal{N}(\xi)^I$  e simplesmente rejeita as mesmas. Com o intuito de tornar o funcional completo, ou seja, capaz de atribuir preferência a todo o espaço de soluções  $\mathcal{N}$ , vamos definir um funcional mais geral que nos dê alguma informação para os pontos em  $\mathcal{N}(\xi)^I$ , porém sem alterar as propriedades e soluções do problema original quando este seja viável. Neste sentido, podemos introduzir a seguinte função dual (em  $\mathbf{x}$ ) de  $Q[R(\mathbf{x}, \xi)]$ , que dispõe exatamente desta característica.

$$\Phi_{\alpha, \lambda}[R(\mathbf{x}, \xi)] = E[R(\mathbf{x}, \xi)] + \lambda \cdot (\text{CVaR}_{\alpha}[R(\mathbf{x}, \xi)] - R^{\min})^- \quad (4-41)$$

Onde  $(.)^- = \min(0, .)$  representa a mesma função truncamento negativa utilizada na formulação do CVaR. Assim, como visto antes, esta é uma função linear por partes côncava, e devido a isto podemos escrever  $\Phi_{\alpha, \lambda}[R(\mathbf{x}, \xi)]$  como o resultado do seguinte PL:

$$\Phi_{\alpha, \lambda}[R(\mathbf{x}, \xi)] = \text{Maximizar}_{(\beta, z, \tau)} \sum_s p_s \cdot R(\mathbf{x}, \xi_s) + \lambda \cdot \tau \quad (4-42)$$

Sujeito a:

$$\tau \leq 0 \quad (4-43)$$

$$\tau \leq z + \sum_s p_s \cdot \beta_s - R^{\min} \quad (4-44)$$

$$\beta_s \leq 0 \quad \forall s = 1, \dots, S \quad (4-45)$$

$$\beta_s \leq (1-\alpha)^{-1} \cdot [R(\mathbf{x}, \xi_s) - z] \quad \forall s = 1, \dots, S \quad (4-46)$$

Por definição, qualquer função dual do problema  $Q[R(\mathbf{x}, \xi)]$  deve apresentar as seguintes propriedades: (1) para todo  $\lambda \geq 0$ ,  $\Phi_{\alpha, \lambda}[R(\mathbf{x}, \xi)] \geq Q[R(\mathbf{x}, \xi)]$  para todo  $\mathbf{x} \in \mathcal{N}(\xi)^V$  e (2) o seu domínio deve ser mais amplo que o domínio de  $Q[R(\mathbf{x}, \xi)]$ , o que de fato ocorre devido à própria definição de  $\mathcal{N}(\xi)^V$ . A condição (1), para a função proposta  $\Phi_{\alpha, \lambda}[R(\mathbf{x}, \xi)]$ , é atendida pela igualdade, pois quando  $\mathbf{x} \in \mathcal{N}(\xi)^V$ ,  $\text{CVaR}_\alpha[R(\mathbf{x}, \xi)] - R^{\min} \geq 0$ , acarretando em  $\tau = 0$  em (4-42).

Este novo funcional evidencia a intuição inicial sobre o que o equivalente certo deveria ser segundo o funcional de preferência de um problema de maximização da renda esperada restrito condições de CVaR mínimo. No caso onde a condição de viabilidade da distribuição é atendida ( $\mathbf{x} \in \mathcal{N}(\xi)^V$ ), o equivalente certo, segundo a aplicação direta de (4-32), será igual ao valor esperado da renda, conforme segue o desenvolvimento:

$$EC[R(\mathbf{x}, \xi)] = \inf_{(\mu)} \{ \mu \in \mathcal{R} : \Phi_{\alpha, \lambda}[R(\mathbf{x}, \xi)] \leq \Phi_{\alpha, \lambda}(\mu), \mathbf{x} \in \mathcal{N}(\xi)^V \} \quad (4-47)$$

Onde  $\Phi_{\alpha, \lambda}(\mu) = \mu$  se dá devido a fato de que  $\mathbf{x} \in \mathcal{N}(\xi)^V \Rightarrow \text{CVaR}_\alpha[R(\mathbf{x}, \xi)] \geq R^{\min}$  e como por definição  $E[R(\mathbf{x}, \xi)] \geq \text{CVaR}_\alpha[R(\mathbf{x}, \xi)]$ , então  $E[R(\mathbf{x}, \xi)] \geq R^{\min}$ , o que acarreta em  $\Phi_{\alpha, \lambda}(\mu) \geq R^{\min}$ . Este resultado é suficiente para garantir que  $\mu \geq R^{\min}$  (ver Figura 4-7 para uma visualização gráfica de  $\Phi_{\alpha, \lambda}(\mu)$ ), implicando diretamente em  $\Phi_{\alpha, \lambda}(\mu) = \mu$ . Assim, desenvolvendo a expressão (4-47) temos que:

$$\dots = \inf_{(\mu)} \{ \mu \in \mathcal{R} : \Phi_{\alpha, \lambda}[R(\mathbf{x}, \xi)] = E[R(\mathbf{x}, \xi)] \leq \Phi_{\alpha, \lambda}(\mu) = \mu, \mathbf{x} \in \mathcal{N}(\xi)^V \} \quad (4-48)$$

$$\Phi_{\alpha, \lambda}[R(\mathbf{x}, \xi)] = E[R(\mathbf{x}, \xi)] = \Phi(\mu) = \mu^* = EC[R(\mathbf{x}, \xi)] \quad (4-49)$$

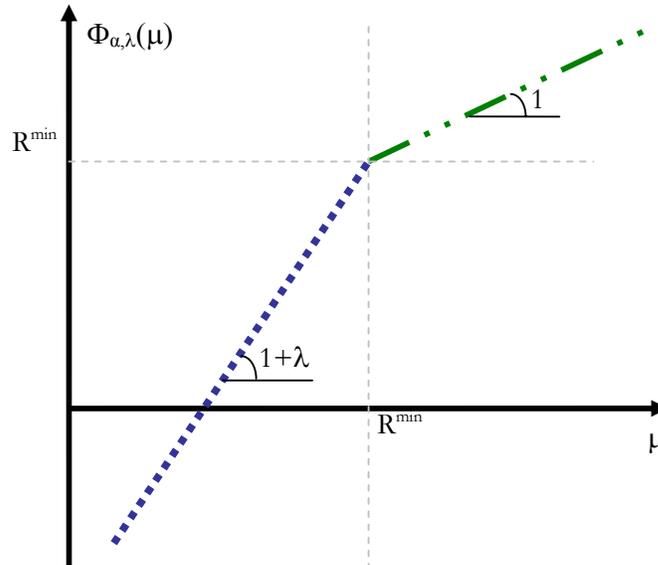


Figura 4-7 – Forma que o funcional de preferência  $\Phi_{\alpha,\lambda}(\cdot)$  assume ao avaliar um valor determinístico  $\mu \in \mathfrak{R}$  - caso particular com duas restrições de CVaR mínimo.

Entretanto, para o caso onde a condição de viabilidade não é atendida pela distribuição de  $R(\mathbf{x}, \xi)$ , ou seja,

$$EC[R(\mathbf{x}, \xi)] = \inf_{(\mu)} \{ \mu \in \mathfrak{R} : \Phi_{\alpha,\lambda}[R(\mathbf{x}, \xi)] \leq \Phi_{\alpha,\lambda}(\mu), \mathbf{x} \in \mathfrak{N}(\xi)^1 \} \quad (4-50)$$

a seguinte desigualdade é válida para todo  $\mu$ <sup>9</sup>:

$$E[R(\mathbf{x}, \xi)] + \lambda \cdot (\text{CVaR}_\alpha[R(\mathbf{x}, \xi)] - R^{\min}) \leq \mu + \lambda \cdot (\mu - R^{\min})^- \quad (4-51)$$

Para o lado esquerdo desta desigualdade, como  $\mathbf{x} \in \mathfrak{N}(\xi)^1$  a função mantém inalterado o termo da violação do CVaR de  $R(\mathbf{x}, \xi)$  com relação a  $R^{\min}$ . Para facilitar o entendimento podemos recorrer mais uma vez à Figura 4-7, que nos mostra a possibilidade de duas possíveis desigualdades decorrentes de (4-51) conforme será enumerado a seguir.

1ª possibilidade:  $E[R(\mathbf{x}, \xi)] + \lambda \cdot (\text{CVaR}_\alpha[R(\mathbf{x}, \xi)] - R^{\min}) \geq R^{\min}$ , de onde decorre que

$$E[R(\mathbf{x}, \xi)] + \lambda \cdot (\text{CVaR}_\alpha[R(\mathbf{x}, \xi)] - R^{\min}) \leq \mu, \text{ para } \mathbf{x} \in \mathfrak{N}(\xi)^1 \quad (4-52)$$

<sup>9</sup> Para o caso onde o valor avaliado é um valor determinístico ( $\mu$ ),  $E[\mu] = \mu$  e  $\text{CVaR}_\alpha[\mu] = \mu$

2ª possibilidade:  $E[R(\mathbf{x}, \xi)] + \lambda \cdot (\text{CVaR}_\alpha[R(\mathbf{x}, \xi)] - R^{\min}) \leq R^{\min}$ , de onde decorre que

$$(1+\lambda)^{-1} \cdot E[R(\mathbf{x}, \xi)] + (1+\lambda)^{-1} \cdot \lambda \cdot \text{CVaR}_\alpha[R(\mathbf{x}, \xi)] \leq \mu \quad (4-53)$$

para  $\mathbf{x} \in \mathcal{N}(\xi)^I$

Assim, podemos escrever a expressão do equivalente da seguinte forma:

|  |        |
|--|--------|
| <p>Se <math>\mathbf{x} \in \mathcal{N}(\xi)^V</math>, então,</p> $EC[R(\mathbf{x}, \xi)] = E[R(\mathbf{x}, \xi)]$ <p>Se <math>\mathbf{x} \in \mathcal{N}(\xi)^I</math> e <math>E[R(\mathbf{x}, \xi)] + \lambda \cdot (\text{CVaR}_\alpha[R(\mathbf{x}, \xi)] - R^{\min}) \geq R^{\min}</math>, então,</p> $EC[R(\mathbf{x}, \xi)] = E[R(\mathbf{x}, \xi)] + \lambda \cdot (\text{CVaR}_\alpha[R(\mathbf{x}, \xi)] - R^{\min})$ <p>Se <math>\mathbf{x} \in \mathcal{N}(\xi)^I</math> e <math>E[R(\mathbf{x}, \xi)] + \lambda \cdot (\text{CVaR}_\alpha[R(\mathbf{x}, \xi)] - R^{\min}) \leq R^{\min}</math>, então,</p> $EC[R(\mathbf{x}, \xi)] = (1+\lambda)^{-1} \cdot E[R(\mathbf{x}, \xi)] + (1+\lambda)^{-1} \cdot \lambda \cdot \text{CVaR}_\alpha[R(\mathbf{x}, \xi)]$ | (4-54) |
|--|--------|

Essa expressão, então, nos passa a idéia de que quando tomamos uma decisão que não atende à restrição de CVaR mínimo, violando o critério de risco, o valor que atribuído à distribuição desta renda não será mais o valor esperado da mesma, mas sim um valor intermediário entre o  $E[R(\mathbf{x}, \xi)]$  e o  $\text{CVaR}_\alpha[R(\mathbf{x}, \xi)]$ .

Além disso, no âmbito de medidas de risco, o funcional  $\Phi_{\alpha, \lambda}[\cdot]$  proporciona uma avaliação para todas as possíveis distribuições que podem ser geradas pela decisão  $\mathbf{x} \in \mathcal{N}$ . Entretanto, é importante notar que este, para valores de  $\lambda$  “pequenos”, poderá selecionar uma decisão que não seria selecionada por  $Q[R(\mathbf{x}, \xi)]$ . Para comprovarmos isso, basta olharmos o caso onde uma solução inviável do ponto de vista de risco, ou seja, que não atende à solução de CVaR, apresenta um altíssimo valor esperado. Se  $\lambda$  não for suficientemente “grande”, a violação na restrição de CVaR, ponderada pela penalização  $\lambda$ , pode ser que não seja suficiente para anular o ganho obtido no valor esperado com relação à solução ótima do problema original e desta forma, a seleção ótima do problema original não seria obtida.

Este caso está perfeitamente de acordo com a idéia de que quanto maior o retorno, maior deverá ser o risco. Obviamente, pode-se argumentar que dependendo de quão maior seja o ganho obtido com o valor esperado de uma

solução inviável, se comparado com a melhor solução viável, um violação pequena poderia até ser justificável. Contudo, certamente esse comportamento não refletiria o comportamento do problema original que estamos tratando.

De forma a garantir a mesma ordenação do problema original, onde as soluções inviáveis deveriam ser extremamente penalizadas com relação às viáveis (restrição “forte”), bastaria tomarmos o  $\lambda \rightarrow +\infty$ . Desta maneira,

$$\lim_{(\lambda \rightarrow +\infty)} \Phi_{\alpha, \lambda}[R(\mathbf{x}, \xi)] = \lim_{(\lambda \rightarrow +\infty)} E[R(\mathbf{x}, \xi)] + \lambda \cdot (CVaR_{\alpha}[R(\mathbf{x}, \xi)] - R^{\min}) \quad (4-55)$$

acarretaria em,

$$\lim_{(\lambda \rightarrow +\infty)} \Phi_{\alpha, \lambda}[R(\mathbf{x}, \xi)] = E[R(\mathbf{x}, \xi)], \text{ para } \mathbf{x} \in \mathcal{N}(\xi)^V \quad (4-56)$$

e

$$\lim_{(\lambda \rightarrow +\infty)} \Phi_{\alpha, \lambda}[R(\mathbf{x}, \xi)] \rightarrow -\infty, \text{ para } \mathbf{x} \in \mathcal{N}(\xi)^I \quad (4-57)$$

Esse comportamento indicaria uma extrema aversão a soluções que proporcionem distribuições inviáveis, onde de acordo com o problema original, todas estas devem ocupar um lugar inferior, em termos de preferência, que qualquer outra solução viável, ou seja,

$$\sup_{(\mathbf{x})} \{ \Phi_{\alpha, \lambda}[R(\mathbf{x}, \xi)] : \mathbf{x} \in \mathcal{N}(\xi)^I \} \leq \inf_{(\mathbf{x})} \{ \Phi_{\alpha, \lambda}[R(\mathbf{x}, \xi)] : \mathbf{x} \in \mathcal{N}(\xi)^V \} \quad (4-58)$$

Neste caso, o equivalente certo associado às distribuições viáveis se manteria o mesmo, pois o fato de não haver violação anula o efeito de qualquer penalização. Entretanto, para o caso de decisões que violem o critério de CVaR ( $\mathbf{x} \in \mathcal{N}(\xi)^I$ ), as duas possibilidades de equivalente certo tornam-se uma única, “Possibilidade 1” em (4-52) recai para no caso da “Possibilidade 2” (4-53), que por fim converge para o próprio valor do  $CVaR_{\alpha}[R(\mathbf{x}, \xi)]$ .

$$EC[R(\mathbf{x}, \xi)] = E[R(\mathbf{x}, \xi)], \quad \text{para } \mathbf{x} \in \mathcal{N}(\xi)^V \quad (4-59)$$

$$EC[R(\mathbf{x}, \xi)] = CVaR_{\alpha}[R(\mathbf{x}, \xi)] \quad \text{para } \mathbf{x} \in \mathcal{N}(\xi)^I \quad (4-60)$$

Este resultado nos revela a seguinte idéia, com respeito ao problema original:

**Uma vez que a restrição de risco esteja atendida, o equivalente certo associado à distribuição da renda assumirá exatamente o seu valor esperado. Entretanto, para os casos onde a restrição de risco não tenha sido atendida, o equivalente certo passará a ser o “melhor” que se pode obter da distribuição, valendo assim, o *proxy* adotado para medir o seu pior caso, dado pelo *conditional value at risk*.**

Como consequência, segundo esta ótica de penalização forte, no caso de violação do critério de risco o agente é totalmente indiferente entre distribuições que apresentam o mesmo CVaR.

Como já argumentado, este fato é factível de ser questionado, pois mesmo que esteja de acordo com o problema original, que trata as inviabilidades de forma indiferente, este comportamento expressa uma “falha” no sentido de que mesmo em uma situação de extrema aversão a risco, um agente racional que se depara com duas distribuições de mesmo CVaR preferiria a distribuição que apresenta o maior valor esperado.

Desta maneira, é possível encontrar um limite inferior para  $\lambda$  de tal forma que, ao utilizarmos a métrica  $\Phi_{\alpha,\lambda}[\cdot]$ , esta garanta a mesma decisão ótima que o problema original proporcionaria para o caso de  $\aleph(\xi)^V$  não vazio. Neste sentido, se  $\lambda^{D*}$  é a variável dual ótima, associada à restrição de CVaR mínimo do problema original, então, para todo  $\lambda \geq |\lambda^{D*}|$ ,

$$\mathbf{x}_1^* = \mathbf{x}_2^* \text{ e } Q[\mathbf{R}(\mathbf{x}_1^*, \xi)] = \Phi_{\alpha,\lambda}[\mathbf{R}(\mathbf{x}_2^*, \xi)] \quad (4-61)$$

Onde,

$$\mathbf{x}_1^* = \arg\text{Max}_{(x)} \{Q[\mathbf{R}(x, \xi)] \text{ s.a: } x \in \aleph(\xi)^V\} \quad (4-62)$$

e

$$\mathbf{x}_2^* = \arg\text{Max}_{(x)} \{\Phi_{\alpha,\lambda}[\mathbf{R}(x, \xi)] \text{ s.a: } x \in \aleph\} \quad (4-63)$$

### **Demonstração:**

Seja  $\lambda^{D*}$  a variável dual ótima associada à restrição de risco (4-68) do **problema original Q**, reescrito abaixo:

$$\text{Maximizar}_{(x,\beta,z)} \sum_s p_s \cdot R(\mathbf{x}, \xi_s) \quad (4-64)$$

Sujeito a:

$$G\mathbf{x} \leq d \quad (4-65)$$

$$\beta_s \leq 0 \quad \forall s = 1, \dots, S \quad (4-66)$$

$$\beta_s \leq (1-\alpha)^{-1} \cdot [R(\mathbf{x}, \xi_s) - z] \quad \forall s = 1, \dots, S \quad (4-67)$$

$$z + \sum_s p_s \cdot \beta_s \geq R^{\min} \quad \rightarrow \text{Variável dual } \lambda^{D*} \quad (4-68)$$

E seja o problema de maximização (em  $\mathbf{x}$ ) da preferência  $\Phi_{\alpha,\lambda}[R(\mathbf{x}, \xi)]$ , conforme (4-63), convenientemente modificado para explicitar o termo negativo referente à penalização de risco, onde  $\upsilon = -\tau$ .

$$\text{Maximizar}_{(x,\beta,z,\tau)} \sum_s p_s \cdot R(\mathbf{x}, \xi_s) - \lambda \cdot \upsilon \quad (4-69)$$

Sujeito a:

$$G\mathbf{x} \leq d \quad (4-70)$$

$$\upsilon \geq 0 \quad (4-71)$$

$$\upsilon \geq R^{\min} - (z + \sum_s p_s \cdot \beta_s) \quad (4-72)$$

$$\beta_s \leq 0 \quad \forall s = 1, \dots, S \quad (4-73)$$

$$\beta_s \leq (1-\alpha)^{-1} \cdot [R(\mathbf{x}, \xi_s) - z] \quad \forall s = 1, \dots, S \quad (4-74)$$

Se reescrevermos a restrição (4-72) do problema acima, que contabiliza as violações de CVaR de forma tornar esta análoga à restrição (4-68), o problema assumirá a seguinte forma, a qual vamos denominar de **problema penalizado  $\Phi$** :

$$\text{Maximizar}_{(x,\beta,z,\tau)} \sum_s p_s \cdot R(\mathbf{x}, \xi_s) - \lambda \cdot \upsilon \quad (4-75)$$

Sujeito a:

$$G\mathbf{x} \leq d \quad (4-76)$$

$$\upsilon \geq 0 \quad (4-77)$$

$$z + \sum_s p_s \cdot \beta_s + v \geq R^{\min} \quad (4-78)$$

$$\beta_s \leq 0 \quad \forall s = 1, \dots, S \quad (4-79)$$

$$\beta_s \leq (1-\alpha)^{-1} \cdot [R(\mathbf{x}, \xi_s) - z] \quad \forall s = 1, \dots, S \quad (4-80)$$

Comparando o problema original com este último (penalizado), é possível perceber que o segundo apresenta a mesma estrutura do problema original, com pequenas diferenças. Nota-se que foi introduzida uma variável a mais na restrição de risco, a qual passa a “permitir” e a contabilizar as violações desta restrição provenientes de soluções que seriam inviáveis no problema original. Contudo, as soluções que passam a ser viáveis no segundo problema são penalizadas por um fator  $\lambda$  na função objetivo.

Neste sentido e de acordo com a definição (4-62), se  $\mathbf{x}_1^*$  é solução ótima do problema original (4-64) a (4-68), é fácil de se constatar que a solução  $\mathbf{x}^\Phi = [\mathbf{x}_1^*, 0]^T$  é uma solução viável do problema penalizado (4-75) a (4-80), pois a única restrição modificada neste problema, com relação ao problema original, assume o mesmo valor ao ser avaliada neste ponto ( $\mathbf{x}^\Phi$ ).

Agora vamos mostrar que existe uma condição sobre o valor de  $\lambda$  que faz o ponto  $\mathbf{x}^\Phi$  ser ótimo no problema penalizado, e assim igual a  $[\mathbf{x}_2^*, 0]^T$ , como queremos demonstrar.

Como os dois problemas são idênticos, exceto com relação a variável  $v$ , basta analisar o custo reduzido associado a variável  $v$  usando as mesmas variáveis duais associadas à solução ótima  $\mathbf{x}_1^*$  do problema original. Isto ocorre, pois construímos a solução  $\mathbf{x}^\Phi$  de forma a produzir, no problema penalizado, a mesma base que a solução  $\mathbf{x}_1^*$  produz no original. Desta forma, os custos reduzidos associados a todas as variáveis não básicas do problema original, no ponto  $\mathbf{x}_1^*$ , já atendem às condições de otimalidade no problema penalizado quando avaliado no ponto  $\mathbf{x}^\Phi$ :  $\mathbf{c}_{\text{red}} \leq 0$ . Então, para que  $\mathbf{x}^\Phi$  seja o ótimo do problema penalizado, basta selecionarmos  $\lambda$  de forma que o custo reduzido de  $v$  atenda a mesma condição, pois esta variável deverá estar fora da base por hipótese:  $\mathbf{x}^\Phi = [\mathbf{x}_1^*, v]^T = [\mathbf{x}_1^*, 0]^T$ .

Ao constatarmos que a variável dual associada à restrição (4-78), no ponto  $\mathbf{x}^\Phi$ , é a mesma da restrição (4-68)<sup>10</sup>, no ponto  $\mathbf{x}_1^*$ , definida como  $\lambda^{D^*}$ , o custo reduzido de  $v$  pode ser escrito da seguinte forma:

$$c_{\text{red}}(v) = -\lambda - \lambda^{D^*} \quad (4-81)$$

Assim, para que  $c_{\text{red}}(v) \leq 0$  e por conseguinte,  $\mathbf{x}^\Phi$  seja ótimo do segundo problema, basta que  $\lambda$  atenda à seguinte condição:

$$\lambda \geq -\lambda^{D^*} \quad (4-82)$$

Como  $\lambda$  é definido como sendo maior que zero, de forma a representar uma penalização, e como sabemos que  $\lambda^{D^*} \leq 0$ , pois ao aumentarmos o lado direito da restrição (4-68) estaremos restringindo mais o problema, podemos reescrever a expressão anterior como:

$$\lambda \geq |\lambda^{D^*}| \quad (4-83)$$

E assim, chegamos ao **fim da demonstração**.

#### 4.4.1

#### Aplicação – Axioma da Independência e Paradoxo de Allais

Neste item vamos mostrar um exemplo para evidenciar a não linearidade, com relação às probabilidades, dos funcionais estudados neste capítulo. Neste sentido, o primeiro passo será mostrar que o funcional  $Q(\cdot)$  não atenderá ao axioma da independência de von Neumann-Morgenstern (vN-M). Posteriormente, será mostrado que o funcional  $\Phi_{\alpha,\lambda}(\cdot)$ , dual a  $Q(\cdot)$ , captura a ordenação do Paradoxo de Allais, a qual é impossível de ser obtida pelos funcionais baseados em utilidade esperada.

O axioma da independência diz que para qualquer par de variáveis aleatórias  $A$  e  $B$ , tal que  $R^A \succ R^B$ , as misturas representadas por  $R^{A'} = q \cdot R^A + (1-q) \cdot R$  e  $R^{B'} =$

---

<sup>10</sup>A justificativa é que as variáveis duais de ambas as restrições podem ser escrita apenas como o produto entre os coeficientes da função objetivo das variáveis básicas ( $C_B$ ) e a inversa da matriz ( $B$ ) contendo as colunas da matriz de restrições associadas às variáveis básicas ( $\lambda^D = C_B \cdot B^{-1}$ ). Como as soluções  $\mathbf{x}_1^*$  e  $\mathbf{x}^\Phi$  foram construídas de forma a gerar a mesma base, as variáveis duais, das referidas restrições, avaliadas nas respectivas soluções serão idênticas.

$q \cdot R^B + (1-q) \cdot R$  realizadas com uma terceira variável  $R$ , qualquer, terão necessariamente a ordenação  $R^{A'} \succ R^{B'}$ , qualquer que seja  $q \in [0, 1]$ .

O funcional de vN-M atende a este axioma em função da sua linearidade nas probabilidades. Se cada v.a. pode ser representada por um conjunto de valores de seu suporte e probabilidades associadas aos mesmos ( $R^{(j)} = \{(R_s^j, p_s^j)\}_{s \in \{1, \dots, S\}}$ ), então, a preferência  $R^{B'} \succ R^{A'}$  para uma função utilidade de vN-M, qualquer, implica em  $q \cdot \sum_s U(R_s^B) \cdot p_s^B + (1-q) \cdot \sum_s U(R_s) \cdot p_s > q \cdot \sum_s U(R_s^A) \cdot p_s^A + (1-q) \cdot \sum_s U(R_s) \cdot p_s$ . Se, por definição  $q \cdot \sum_s U(R_s^B) \cdot p_s^B > q \cdot \sum_s U(R_s^A) \cdot p_s^A$ , então a desigualdade anterior estará assegurada e a preferência  $R^{B'} \succ R^{A'}$  será sempre verdadeira para qualquer  $U$  crescente e  $R^{(j)} < \infty$ .

Contudo, o funcional  $Q(\cdot)$  não atende a este axioma. Para isso vamos definir duas v.a.: (exemplo baseado em [16])

$$R^A = \{(0\$, 1\%); (2400\$, 66\%); (2500\$, 33\%)\}$$

$$R^B = \{(0\$, 0\%); (2400\$, 100\%); (2500\$, 0\%)\}$$

e calcular a preferência segundo o funcional  $Q(\cdot)$ , considerando  $\alpha = 99\%$  e  $R^{\min} = 1000\%$ :

$$Q(R^A) = \text{inviável! (pois } CVaR_{99\%}(R^A) = 0 < 1000)$$

$$Q(R^B) = 2400 \text{ (pois } CVaR_{99\%}(R^B) = 2400 > 1000)$$

Desta forma, como  $Q(R^A)$  é inviável, qualquer solução viável é preferível a esta, acarretando em  $R^B \succ_Q R^A$ . Porém, ao misturarmos estas duas rendas aleatórias com uma terceira, definida como sendo igual à segunda  $R = R^B$ , violaremos a ordenação esperada,  $R^{B'} \succ_Q R^{A'}$ , definida pelo axioma independência de vN-M.

A mistura de variáveis aleatórias pode ser vista como um “sorteio” de uma variável aleatória do tipo Bernoulli, independente das demais variáveis e com probabilidade  $q$  associada, que selecionará uma das variáveis misturadas. Desta forma, as misturas  $R^{A'}$  e  $R^{B'}$  podem ser visualizadas conforme a figura a seguir:

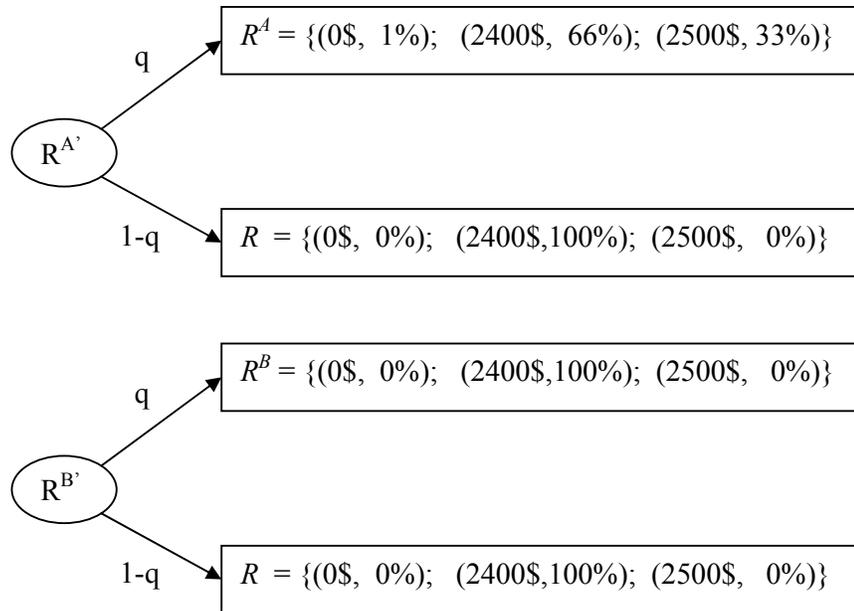


Figura 4-8 – Mistura das variáveis aleatórias  $R^A$  e  $R^B$  com uma terceira variável  $R$ .

Se considerarmos  $q = 50\%$ , as distribuições destas duas novas variáveis aleatórias,  $R^{A'}$  e  $R^{B'}$ , assumirão as seguintes formas:

$$R^{A'} = \{(0\$, 0.5\%); (2400\$, 83\%); (2500\$, 16.5\%)\}$$

$$R^{B'} = \{(0\$, 0\%); (2400\$, 100\%); (2500\$, 0\%)\}.$$

Para estas duas, o mesmo funcional  $Q(\cdot)$  aplicado anteriormente, com  $\alpha = 99\%$  e  $R^{\min} = 1000\%$ , acarretará nos seguintes valores:

$$Q(R^{A'}) = 2404.5 \text{ (pois } CVaR_{99\%}(R^{A'}) = 1200 > 1000)$$

$$Q(R^{B'}) = 2400 \text{ (pois } CVaR_{99\%}(R^{B'}) = 2400 > 1000)$$

Apresentando, portanto, a ordenação  $R^{A'} \succ_Q R^{B'}$ , que viola o princípio da independência de vN-M.

Com base no resultado obtido acima, podemos utilizar o funcional  $\Phi_{\alpha,\lambda}[\cdot]$ , que é uma extensão do funcional  $Q(\cdot)$  para todo o espaço de distribuições, em um exemplo bastante interessante e conhecido na literatura como o Paradoxo de Allais. Neste exemplo evidenciaremos como este funcional proporciona uma ordenação de variáveis aleatórias impossível de ser capturada por funcionais baseados no valor esperado de funções utilidades clássicas de von Neumann-Morgenstern.

Para isso, definimos quatro variáveis aleatórias (v.a.) representando a renda que um agente pode obter em uma dada operação comercial:  $R^A$ ,  $R^B$ ,  $R^C$ ,  $R^D$ .

$$R^A = \{(0\$, 1\%); (2400\$, 66\%); (2500\$, 33\%)\}$$

$$R^B = \{(0\$, 0\%); (2400\$, 100\%); (2500\$, 0\%)\}$$

$$R^C = \{(0\$, 67\%); (2400\$, 0\%); (2500\$, 33\%)\}$$

$$R^D = \{(0\$, 66\%); (2400\$, 34\%); (2500\$, 0\%)\}$$

A seguir, são exibidas as densidades de probabilidade das duas primeiras variáveis,  $R^A$  e  $R^B$ , para as quais o suporte dos possíveis valores de renda foi convenientemente exibido uma só vez, no eixo horizontal de  $R^B$ . As setas, então, indicam a presença de eventos pontuais de probabilidades não nulas e, portanto, discretas.

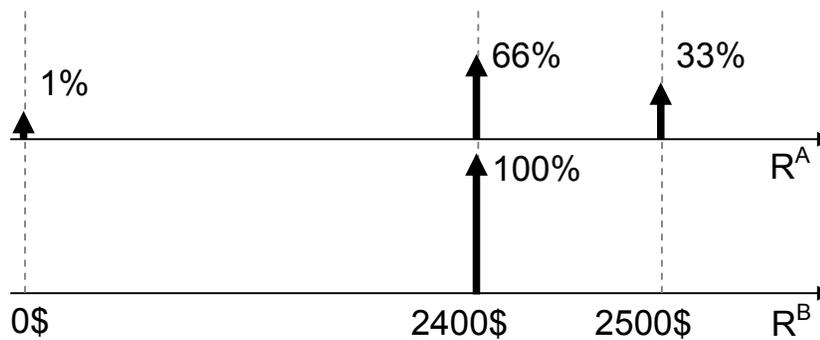


Figura 4-9 – Funções de densidade de probabilidade das variáveis aleatórias  $R^A$  e  $R^B$ .

Ao utilizarmos o funcional de preferência  $\Phi_{\alpha,\lambda}[\cdot]$ , com parâmetros  $\alpha = 99\%$  e  $\lambda = 1$ , e medirmos a preferência entre as variáveis A e B para um  $R^{\min} = 1000\$,$  obteremos os seguintes valores de preferência:

$$\Phi_{99\%,1}[R^A] = E(R^A) + \lambda \cdot (\text{CVaR}_{99\%}(R^A) - R^{\min})^- = 2409 + (0 - 1000) = 1409$$

$$\Phi_{99\%,1}[R^B] = E(R^B) + \lambda \cdot (\text{CVaR}_{99\%}(R^B) - R^{\min})^- = 2400 + (2400 - 2400) = 2400$$

Desta maneira, podemos dizer que a renda B é preferível à renda A segundo o funcional  $\Phi_{99\%,1}[\cdot]$ , ou seja,  $R^B \succ_{\Phi} R^A$ .

Analisando as probabilidades das variáveis A e B na Figura 4-9, notamos que A dominaria B se não fosse pela probabilidade de 1% de ocorrer o valor zero.

Neste caso, uma pequena probabilidade (1%) de não ganhar nada (zero) torna-se muito mais relevante que a probabilidade de 33% de ganhar 100\$ a mais do que seria ganho certamente em B (2400\$). Esse comportamento é intuitivo e pode ser interpretado como o medo do arrependimento de ser “ganancioso”.

Podemos repetir o mesmo exercício para as variáveis  $R^C$  e  $R^D$ , cujas densidades são exibidas a seguir:

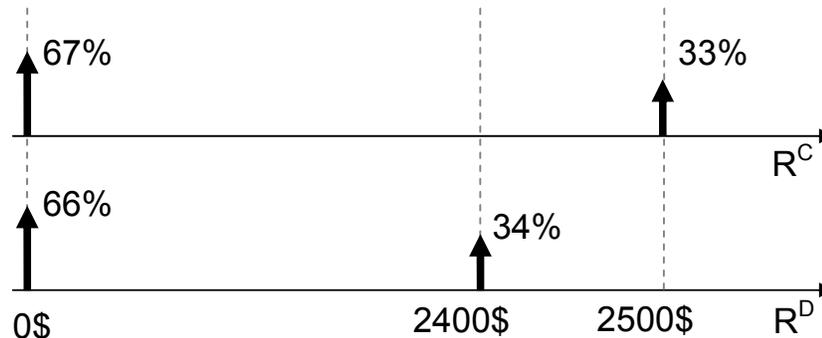


Figura 4-10 – Funções de densidade de probabilidade das variáveis aleatórias  $R^C$  e  $R^D$ .

Para cada uma delas associamos os seus respectivos valores de preferência, atribuídos por  $\Phi_{99\%,1}[\cdot]$ :

$$\Phi_{99\%,1}[R^C] = E(R^C) + \lambda \cdot (\text{CVaR}_{99\%}(R^C) - R^{\min})^- = 825 + (0 - 1000) = -175$$

$$\Phi_{99\%,1}[R^D] = E(R^D) + \lambda \cdot (\text{CVaR}_{99\%}(R^D) - R^{\min})^- = 816 + (0 - 1000) = -184$$

Constatamos que o funcional  $\Phi$  atribui a seguinte ordenação de preferências:  $R^C \succ_{\Phi} R^D$ . Nesta, o efeito inverso ao anterior ocorreu, ou seja, a presença de 1% a mais de probabilidade no evento zero (não ganhar nada) não foi suficientemente relevante frente à possibilidade de se obter um maior resultado com a opção C, uma vez que a probabilidade do evento zero já era consideravelmente grande.

O interessante é que as duas ordenações,  $(R^B \succ_{\Phi} R^A)$  e  $(R^C \succ_{\Phi} R^D)$ , dadas pelo funcional de preferências  $\Phi_{99\%,1}[\cdot]$ , são impossíveis de serem obtidas por qualquer funcional baseado no valor esperado de funções utilidades clássicas de von Neumann-Morgenstern, pois os comportamentos que à primeira vista nos pareceram intuitivos, são devidos a uma não linearidade nas probabilidades do funcional  $\Phi$ . Como este é definido por um problema de maximização, (4-42), onde as probabilidades aparecem como coeficientes da função objetivo, se

analisarmos do ponto de vista das probabilidades das v.a.'s que estamos avaliando,  $\Phi(\mathbf{p})$  definido por  $\Phi: \wp \rightarrow \mathfrak{R}$  pode ser encarado como uma função convexa em  $\mathbf{p}^{11}$ . Onde  $\wp = \{\mathbf{p} \in \mathfrak{R}_+^S : \sum_{s \in \{1, \dots, S\}} p_s = 1\}$  é o conjunto de possíveis vetores de probabilidades de uma v.a. contendo S cenários.

Para mostrarmos a impossibilidade de representar as ordenações obtidas pelo funcional  $\Phi$  através de uma função utilidade clássica, vamos definir  $U: \mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{R}$  como uma utilidade clássica de vN-M e mostrar que chegaremos a uma contradição ao tentarmos impor ambas as preferências ao seu funcional  $E[U(R^j)] = \sum_{s \in \{1, \dots, S\}} p_s^j \cdot U(R_s^j)$  de preferência, no qual nota-se a linearidade com respeito às probabilidades.

**(Condição 1):** Para atender a  $(R^B)_{\Phi} R^A$ :

$$E[U(R^B)] > E[U(R^A)] \Rightarrow 100\% \cdot U(2400) > 33\% \cdot U(2500) + 66\% \cdot U(2400) + 1\% \cdot U(0)$$

$$\Rightarrow \underline{34\% \cdot U(2400)} > 33\% \cdot U(2500) + 1\% \cdot U(0)$$

**(Condição 2):** Para atender a  $(R^C)_{\Phi} R^D$ :

$$E[U(R^C)] > E[U(R^D)] \Rightarrow 33\% \cdot U(2500) + 67\% \cdot U(0) > 34\% \cdot U(2400) + 66\% \cdot U(0)$$

$$\Rightarrow \underline{34\% \cdot U(2400)} < 33\% \cdot U(2500) + 1\% \cdot U(0)$$

Chegando assim a uma contradição para a função  $U(\cdot)$ .

Esta contradição é justamente o “Paradoxo de Allais” apresentado em (1953) por Maurice Allais. Entretanto, neste exemplo a ordenação de preferência foi ditada pela métrica  $\Phi_{\alpha, \lambda}[\cdot]$ , ao passo que na versão original, esta era empiricamente reconhecida como a ordenação que deveria ser realizada pela maioria das pessoas. Diversos estudos e trabalhos realizados no passado, desde Savage, Machina e outros, mostraram modelos e funcionais capazes de incorporar tal não linearidade nas probabilidades e incorporar as preferências do “Paradoxo de Allais”. Contudo, o funcional  $\Phi$  baseado na combinação entre o CVaR e o

---

<sup>11</sup>A prova para a convexidade do funcional  $\Phi$  com relação ao domínio definido por  $\wp$  decorre de um conhecido resultado de programação linear (PL): A função definida pelo resultado do PL  $f(\mathbf{c}) = \text{Max}_{(\mathbf{x})} \{\mathbf{c}^T \cdot \mathbf{x} : \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} \leq \mathbf{b}\}$  é convexa com relação a  $\mathbf{c}$ . Como as probabilidades fazem parte dos coeficientes do PL que constitui  $\Phi$ , este é convexo com relação a  $\mathbf{p}$ .

valor esperado apresentou esta desejável característica através de duas medidas bastante simples, práticas e intuitivas, proporcionando uma excelente ferramenta analítica (modelo baseado em programação linear) para a tomada de decisões pragmáticas e realistas.