

### 3

#### Equivalente certo (EC)

A definição de Equivalente Certo (EC) de um resultado financeiro aleatório é o menor montante determinístico que torna o agente indiferente a este fluxo estocástico.

Se pensarmos em termos de preferência, estes dois resultados, certo e incerto, devem ser comparados em termos de utilidade esperada e o equivalente certo encontrado de forma a igualar o valor esperado da utilidade de ambos os casos. Neste sentido, se  $R$  é a renda estocástica que se deseja avaliar, precificar em termos de equivalente certo, e  $U: \mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{R}$  é a função utilidade do agente tomador de decisão, a comparação de preferências pode ser expressa por:

$$E[U(EC)] = E[U(R)] \quad (3-1)$$

A partir da expressão acima pode-se encontrar o valor EC isolando este no lado esquerdo da expressão. Uma vez que  $U(EC)$  é um valor determinístico, então  $E[U(EC)] = U(EC)$ . Assim, aplicando a inversa da utilidade  $U^{-1}(\cdot)$  em ambos os lados de (3-1), encontramos a expressão clássica para o equivalente certo:

$$EC = U^{-1}\{E[U(R)]\} \quad (3-2)$$

Neste trabalho, a abordagem proposta baseia-se na utilização deste valor como métrica de preferência para cada período. O argumento para essa abordagem é fruto do caso multi-período, onde a abordagem mais usual utilizada em teoria econômica prevê uma função utilidade (FU) separável no tempo, composta pelas funções utilidades de cada período ponderadas por um fator de impaciência ou uma taxa de desconto que expressa a preferência intertemporal do agente.

$$EU = \sum_t E[U_t(R_t)] \cdot (1+J)^{-t} \quad (3-3)$$

Neste funcional, a definição de um fator de impaciência é algo bastante difícil de ser estimado para ser utilizado pelo agente em situação práticas.

O que se pretende com a abordagem proposta é deixar para a utilidade apenas o papel de precificar, ou valorar, a distribuição do resultado financeiro de cada período, em termos de equivalente certo, e uma vez estabelecido um fluxo equivalente, a comparação intertemporal torna-se direta através do custo de oportunidade livre de risco<sup>5</sup> (para fluxos determinísticos) que o agente tenha acesso.

$$EC = \sum_t U_t^{-1} \{E[U_t(R_t)]\} \cdot (1+J^{LR})^{-t} \quad (3-4)$$

Onde  $J^{LR}$  representa o custo de oportunidade livre de risco do agente.

As virtudes e contribuições vistas nesta proposta podem ser listadas na seguinte ordem de relevância:

1. A preferência intertemporal é direta e dada pelo mercado (fácil definição da taxa de desconto) uma vez que se tenha um fluxo equivalente certo;
2. Este funcional “precifica” cada período em termos de equivalente certo, sendo assim mais intuitivo do ponto de vista de análise financeira e de tomada de decisão. Desta forma, o fluxo estocástico pode ser visto como um fluxo equivalente, obtido através de um desconto ou prêmio de risco sob o valor esperado do mesmo<sup>6</sup>.
3. O funcional proposto utiliza as propriedades de preferência intraperíodo da utilidade e as diferenças na seleção realizada entre ambos residem no âmbito da preferência interperíodo. Para evidenciar tais diferenças, foi criado o Anexo D: Relações entre as soluções da utilidade esperada e do equivalente certo no caso multi-período.

Através destes pontos, espera-se proporcionar um funcional de fácil especificação, que utilize para isto parâmetros de relevância e do dia-a-dia do investidor ou tomador de decisão, e que carregue consigo as virtudes da teoria de utilidade. Neste sentido, a contribuição se dá através da especificação de um

<sup>5</sup>Livre de risco no sentido de expressar o retorno exigido pelo agente para um fluxo determinístico.

<sup>6</sup>O valor esperado é o indicador mais popular e utilizado como referência em qualquer campo ou aplicação. A transformação do fluxo esperado em um fluxo equivalente é algo direto e intuitivo do ponto de vista financeiro.

funcional com uma forma bastante intuitiva, de fácil interpretação dos seus resultados e que através da sua praticidade e conexão com o mundo prático, através dos parâmetros econômico-financeiros da empresa, o processo de decisão baseado neste funcional torne-se transparente e objetivo.

### 3.1

#### Propriedades do Equivalente Certo

Na figura a seguir, podemos visualizar a distribuição da renda de um determinado período (eixo horizontal) sendo mapeada no domínio das utilidades (eixo vertical). O valor esperado desta nova distribuição,  $E[U(R_t)]$ , é então, levado para o domínio das receitas originando o valor EC. Este valor pode, então, ser comparado com o valor esperado da renda,  $E(R_t)$ , para os três casos básicos de perfil de risco (neutralidade, aversão, e propensão).

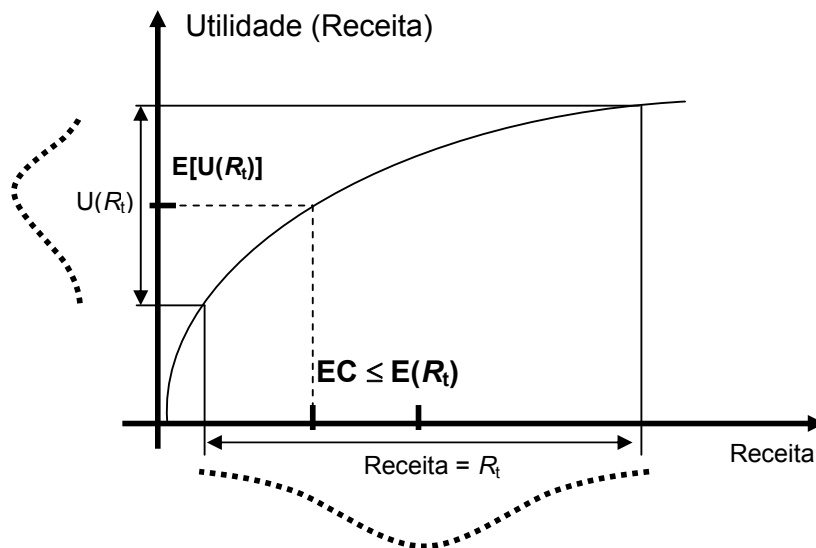


Figura 3-1 – Cálculo do Equivalente Certo

Por exemplo, se o investidor é indiferente a risco, sua função utilidade é linear e então  $EU = E[U(R)] = U[E(R)]$  ou  $U^{-1}(EU) = E(R)$ . Neste caso o equivalente a certeza é igual ao valor esperado das receitas. Se o investidor é avesso a risco, sua função utilidade é côncava e pela desigualdade de Jansen [17],  $EU = E[U(R)] \leq U[E(R)]$  ou  $U^{-1}(EU) \leq E(R)$ . Neste caso o equivalente a certeza é inferior ao valor esperado da renda, o que implicitamente se traduz em um prêmio

de risco. Este prêmio pode ser visto como a menor quantia necessária para igualar o valor atribuído a uma v.a. por um agente avesso a risco ao valor atribuído a esta por um agente neutro a risco.

$$p^{\text{RSK}} = E(R) - EC \quad (3-5)$$

Se o investidor é propenso a risco, sua função utilidade é convexa e pela desigualdade de Jensen,  $EU = E[U(R)] \geq U[E(R)]$  ou  $U^{-1}(EU) \geq E(R)$ . Neste caso o equivalente certo é superior ao valor esperado das receitas.

### 3.1.1

#### Exemplo

A Figura 3-2 mostra uma possível função de utilidade (linear por partes, que será apresentada no final deste capítulo) que possui dois segmentos separados pelo ponto P, dado por uma renda de \$ 30.

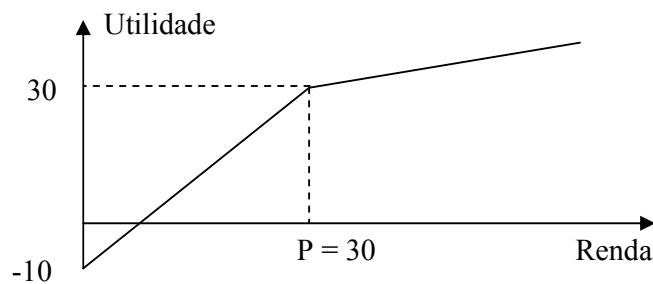


Figura 3-2 – Possível Função Utilidade

Vamos supor que existam quatro cenários para renda com igual probabilidade:  $R_1 = \$ 0$ ,  $R_2 = \$ 25$ ,  $R_3 = \$ 30$ ,  $R_4 = \$ 45$ . Então, o valor esperado da renda é:

$$E(R) = 0.25 * (0) + 0.25 * (25) + 0.25 * (30) + 0.25 * (45) = \$ 25$$

e da função utilidade:

$$E[U(R)] = 0.25 * (-10) + 0.25 * (22.5) + 0.25 * (30) + 0.25 * (45) = 20.6$$

O equivalente à certeza deste fluxo de renda é igual a  $U^{-1}(20.6) = \$ 23.7$  o que corresponde a um desconto de 5 % com relação ao valor esperado da renda.

### 3.2

#### **Modelo de Programação Linear Inteira para o problema de maximização do Equivalente Certo**

O desenvolvimento feito neste tópico mostra como um problema de maximização pode considerar uma função objetivo convexa e linear por partes, e assim, utilizar o equivalente certo como objetivo em problemas de decisão. A forma convexa da função objetivo está relacionada com o fato de estarmos modelando um agente avesso a risco cuja FULP é côncava. Desta maneira, como o objetivo é maximizar o equivalente certo da renda de um dado período, é necessário avaliar o resultado da utilidade esperada na inversa da utilidade (função convexa).

Para atingir este objetivo, primeiramente será apresentado o caso clássico de maximização da utilidade esperada para depois, então, incorporarmos o caso do equivalente certo.

O caso clássico de maximização do valor esperado da função utilidade linear por partes foi aplicado ao problema de contratação ótima de uma empresa de geração de energia em [2][3] e utilizado para precificar o risco de contratação em diferentes submercados em [20].

Considerando uma função de renda linear,  $R(\mathbf{x}, \xi)$ , que dependa de um vetor de variáveis de decisão de primeiro estágio  $\mathbf{x} \in \mathcal{R}_+^n$  e de um vetor de variáveis aleatórias “ $\xi$ ”, representando os possíveis resultados futuros de algum dado da instância, o problema de maximização da utilidade esperada pode ser escrito como um PL, se as v.a.s puderem ser descritas, ou pelo menos “aproximadas”, pelos seus possíveis cenários de realizações e respectivas probabilidades de ocorrência  $\{\xi_s, p_s\}_{s=1, \dots, S}$ .

Em sua forma geral, este problema pode ser descrito pela maximização da média aritmética da função utilidade linear por partes aplicada a cada cenário de renda  $\{R(\mathbf{x}, \xi_s)\}_{s=1, \dots, S}$ , sujeito às restrições que caracterizam os segmentos desta função e às demais restrições sob as variáveis do primeiro estágio ( $\mathbf{x}$ ).

$$\text{Maximizar}_{(x, u)} \sum_s p_s \cdot u_s \quad (3-6)$$

Sujeito a:

$$u_s \leq a_k \cdot R(x, \xi_s) + b_k \quad \text{para } k=1, \dots, K \text{ e } s=1, \dots, S \quad (3-7)$$

$$\mathbf{G} \cdot \mathbf{x} \leq \mathbf{d} \quad (3-8)$$

Neste problema, a matriz  $\mathbf{G}$  (com  $m$  linhas e  $n$  colunas) e o vetor  $\mathbf{d}$  (com  $m$  linhas) representam um conjunto de  $m$  possíveis restrições lineares aplicáveis à variável do primeiro estágio (vetor  $\mathbf{x}$ ). Por exemplo, em [2][3][31] a variável de decisão  $\mathbf{x}$  corresponde aos montantes de contratação de um gerador que vende sua energia através de diferentes contratos de longo prazo em um leilão de energia. Nestes trabalhos, o modelo de maximização da utilidade esperada foi utilizado para decidir o *mix* de energia oferecida para três produtos diferentes (contratos com diferentes datas iniciais e duração), a cada rodada (iteração) do leilão de transição, ocorrido em dezembro de 2004.

Com o intuito de considerar o equivalente certo como função objetivo, precisamos modelar a inversa da função utilidade linear por partes. Assim, será necessário recorrer a uma formulação com variáveis inteiras binárias, por se tratar de uma função convexa.

Problemas de maximização são funções côncavas com respeito ao lado direito de suas restrições. Sob este fato, a utilidade esperada (caso de aversão ao risco – função côncava) é perfeitamente compatível com problemas de maximização (ver sessão 2.4). Entretanto, ao considerarmos uma função objetivo convexa, composta pelos diversos segmentos da inversa da utilidade, temos que impor qual segmento estará ativo em cada possível solução do problema. Neste novo problema, a utilidade esperada continua sendo calculada da mesma forma que em (3-6) a (3-8), entretanto, a diferença é que gostaríamos de avaliar a utilidade esperada obtida em (3-6) na inversa da utilidade para então, obtermos o equivalente certo.

A figura a seguir, ilustra a função utilidade descrita pelos seus coeficientes angulares  $\{a_k\}_{k=1, \dots, K}$  e os pontos de quebra  $\{Q_k\}_{k=0, \dots, K}$ , onde  $Q_0 = -\infty$  e  $Q_K = +\infty$ . Além disso, será importante para a modelagem da inversa, considerarmos que  $U(Q_1) = 0$ . Entretanto, isso não implicará em nenhuma perda de generalidade, pois

uma vez que a FU não assume o valor zero para nenhuma de suas quebras originais, basta identificar a raiz desta função e acrescentá-la como um ponto de quebra adicional, repetindo o coeficiente angular do segmento que cruze o eixo horizontal (da renda) para este novo segmento. Por simplicidade, o modelo será desenvolvido para o caso onde  $Q_1 = 0$  (ver Figura 3-3) e posteriormente essa condição será relaxada para o caso onde  $Q_1$  pode ser qualquer.

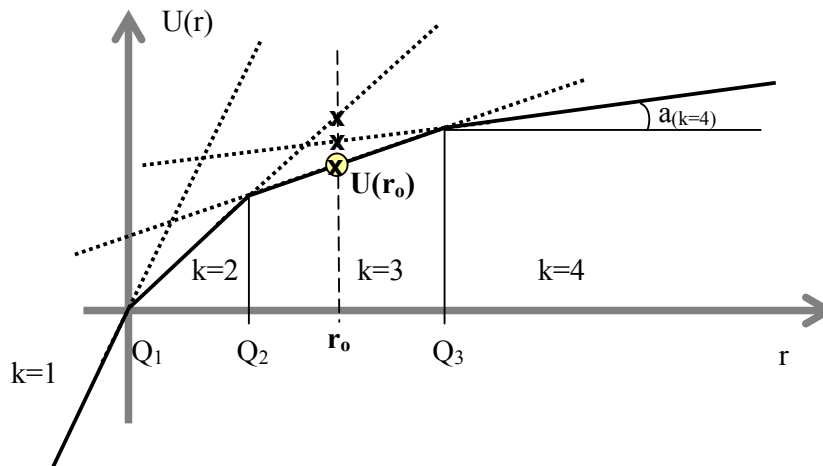


Figura 3-3 – Função Utilidade Linear por Partes (FULP)

Para a função utilidade descrita acima, pode-se visualizar a sua inversa transpondo os eixos “r” e “U(R)”. A figura a seguir expressa a inversa da função Figura 3-3.

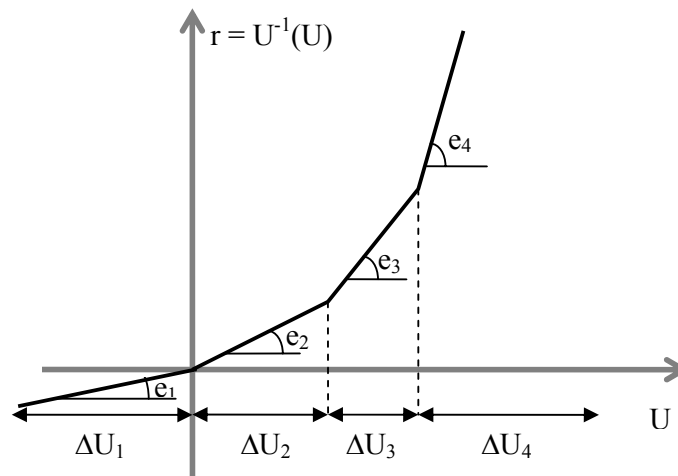


Figura 3-4 – Inversa da Função Utilidade Linear por Partes (InvFULP)

Na figura acima, os coeficientes angulares  $\{e_k\}_{k=1,\dots,K}$  da inversa da utilidade podem ser diretamente obtidos através dos coeficientes  $\{a_k\}_{k=1,\dots,K}$ .

$$e_k = 1/a_k \quad \text{para } k = 1, \dots, K \quad (3-9)$$

E por sua vez, os limites  $\{\Delta U_k\}_{k=1,\dots,K}$  podem ser obtidos através das quebras  $\{Q_k\}_{k=0,\dots,K}$ .

$$\Delta U_k = a_k(Q_k - Q_{k-1}) \quad \text{para } k = 1, \dots, K \quad (3-10)$$

Desta forma, para avaliarmos um valor  $U$  qualquer nesta função, temos que avaliar sob a envoltória superior dentro de todos os segmentos, conforme:

$$r(U) = \sup_{(1 \leq k \leq K)} \{ e_k U + w_k \} \quad (3-11)$$

Onde  $\{w_k\}_{k=1,\dots,K}$  são os coeficientes lineares da inversa da utilidade.

Entretanto, para realizarmos tal avaliação podemos somar cada segmento que antecede o montante  $U$  (se este for maior que zero) ponderado por suas respectivas inclinações. Por exemplo, para calcularmos o valor que a função exibida na Figura 3-4 assume, para um ponto em seu domínio, dentro da região do terceiro segmento ( $U \in \Theta_3$ ), devemos somar integralmente o segundo segmento ponderado por sua inclinação, com o montante correspondente do terceiro segmento, necessário para atingir o valor  $U$  avaliado. Isso acarreta em:  $R(U \in \Theta_3) = \Delta U_2 \cdot e_2 + \delta_3 \cdot e_3$ . Onde  $\delta_3$  é tal que  $\Delta U_2 \cdot e_2 + \delta_3 \cdot e_3 = U$ . É importante notar que, em função da hipótese feita, de que  $U(Q_1)=0$ , o primeiro segmento da inversa expressa os valores negativos de  $U$  (eixo horizontal da Figura 3-4). Assim, o primeiro segmento só será incluído nesta soma quando o valor de  $U$  for menor que zero. E neste caso, o primeiro segmento será o único necessário para compor o valor avaliado.

Utilizando essa estratégia, podemos criar uma variável para cada segmento  $\{\delta_k\}_{k=1,\dots,K}$  que indicará o montante de cada segmento que deverá ser utilizado para compor o valor  $U$ . Nesse sentido, a função inversa da utilidade  $U^{-1}(U)$ , que expressa o equivalente certo (EC) ao ser avaliada no montante  $U=EU$  (valor esperado da utilidade), pode ser escrita da seguinte forma:

$$EC(EU) = \sum_{\{k: 2 \leq k \leq K\}} \delta_k \cdot e_k - \delta_1 \cdot e_1 \quad (3-12)$$

$$0 \leq \delta_k \leq \Delta U_k \quad \text{para todo } k = 1, \dots, K \quad (3-13)$$



$$\sum_{\{k: 2 \leq k \leq K\}} \delta_k - \delta_1 = EU \quad (3-14)$$

Entretanto, supondo um valor fixo para a utilidade esperada EU, o conjunto de restrições acima, (3-13) e (3-14), ainda não é suficiente para reproduzir o comportamento esperado para as variáveis  $\{\delta_k\}_{k=1,\dots,K}$  ao maximizarmos a expressão (3-12). Somente com essas restrições, ao otimizarmos (3-12), o valor EU será atendido somente com a variável  $\delta_K$ , a qual proporciona o maior acréscimo da função objetivo por unidade de “orçamento” disponível (EU). O problema definido por maximizar (3-12), sujeito a (3-13) e (3-14) pode ser visto como o problema da mochila (*Knapsack*) linear (contínuo). Neste, a solução ótima se dá atendendo ao orçamento (representado por EU), com os recursos mais rentáveis. Como neste caso,  $\Delta U_K = +\infty$ , o orçamento será integralmente atendido pelo último segmento.

Assim, necessitamos incorporar um conjunto de variáveis binárias  $\{y_k\}_{k=1,\dots,K}$  que definirão a ordem que os segmentos deverão ser utilizados. Neste sentido, estas variáveis deverão impor uma ordem crescente em k na seleção dos segmentos a serem somados, valendo um para todo k até a região onde esteja EU. A partir desta região, todas as demais variáveis  $y_k$  à frente deverão apresentar o valor zero. Este comportamento pode ser modelado pela restrição (3-15). Adicionalmente, (3-16) dita como os limites das variáveis  $\{\delta_k\}_{k=1,\dots,K}$  devem ser controlados pelas variáveis  $\{y_k\}_{k=1,\dots,K}$ . Esta restrição impõe um limite zero para segmentos a frente do valor EU. Entretanto, somente com as duas primeiras restrições, de ordem e limite, o modelo, ainda sim, poderia selecionar todas as variáveis  $\{y_k\}_{k=1,\dots,K} = 1$  e novamente atender EU somente com  $\delta_K$ . Pois mesmo se  $\{y_i\}_{i \leq k^*} = 1$ , as variáveis  $\{\delta_i\}_{i \leq k^*}$  podem valer zero. Assim, precisamos impor, através de mais duas restrições, (3-17) e (3-18), o seguinte comportamento: se um dado segmento k+1 apresenta  $y_{k+1} = 1$ , então a variável ( $\delta_k$ ), do segmento imediatamente anterior – excluindo o primeiro, deverá estar em seu limite superior ( $\Delta U_k$ ). Para o caso  $\delta_1$ , esta lógica ocorre exatamente de maneira oposta, devido ao fato deste segmento representar o lado negativo da função.

$$\text{Logo, } y_2=1 \rightarrow \delta_1=0 \text{ e } y_2=0 \rightarrow \delta_1 \leq \Delta U_1$$

Ou seja, se um segmento é utilizado, os demais antecessores devem ter sido plenamente “preenchidos” ou utilizados, exceto o primeiro que deve ser zerado.

$$y_k \leq y_{k-1} \quad \text{para } k = 2, \dots, K \quad \text{e} \quad y_1 = 1 \text{ (sempre)} \quad (3-15)$$

$$\delta_k \leq y_k \cdot \Delta U_k \quad \text{para todo } k = 1, \dots, K \quad (3-16)$$

$$\delta_k \geq y_{k+1} \cdot \Delta U_k \quad \text{para todo } k = 2, \dots, K-1 \quad (3-17)$$

$$\delta_1 \leq (1 - y_2) \cdot \Delta U_1 \quad (3-18)$$

Finalmente, se juntarmos as restrições (3-7) e (3-8) do problema de maximização da utilidade esperada com as restrições (3-13) a (3-18), substituindo o valor EU, em (3-14), pela função objetivo (3-6), obteremos o conjunto de restrições necessárias para o modelo de maximização do equivalente certo da renda, onde (3-12), será a nova função objetivo proposta por esta abordagem. Contudo, nesta é importante notar que, conforme a Figura 3-4, além de  $U(Q_1)=0$ , hipótese necessária para nossa modelagem, foi considerado o caso particular onde  $Q_1 = 0$  (rever Figura 3-3). Assim, a função objetivo que expressa o equivalente certo para o caso geral, onde  $Q_1$  pode ser qualquer, deve conter este termo somado. Evidentemente, este fato é irrelevante para a solução ótima ( $\mathbf{x}^*$ ) que será gerada pelo modelo, pois representa apenas uma translação vertical da função objetivo, porém será de extrema importante ao compararmos o valor da função objetivo com os demais resultados como, por exemplo, o valor esperado da renda. Desta maneira, acrescentando  $Q_1$  à expressão (3-12), o modelo de otimização baseado no equivalente certo assume a seguinte forma para o caso de um período:

$$EC^* = \text{Maximizar}_{(x, u, \delta, y)} \sum_{\{k: 2 \leq k \leq K\}} \delta_k \cdot e_k - \delta_1 \cdot e_1 + Q_1 \quad (3-19)$$

Sujeito a:

$$u_s \leq a_k \cdot R(\mathbf{x}, \xi_s) + b_k \quad \forall k=1, \dots, K \text{ e } s=1, \dots, S \quad (3-20)$$

$$\mathbf{G} \cdot \mathbf{x} \leq \mathbf{d} \quad (3-21)$$

$$\sum_{\{k: 2 \leq k \leq K\}} \delta_k - \delta_1 = \sum_s p_s \cdot u_s \quad (3-22)$$

$$y_k \leq y_{k-1} \quad \forall k = 2, \dots, K \quad (3-23)$$

$$\delta_k \leq y_k \cdot \Delta U_k \quad \forall k = 1, \dots, K \quad (3-24)$$

$$\delta_k \geq y_{k+1} \cdot \Delta U_k \quad \forall k = 2, \dots, K-1 \quad (3-25)$$

$$y_k \in \{0,1\} \text{ e } y_1 = 1 \quad \forall k = 1, \dots, K \quad (3-26)$$

$$\delta_k \in \mathfrak{R}_+ \quad \forall k = 1, \dots, K \quad (3-27)$$

$$u_s \in \mathfrak{R} \quad \forall s = 1, \dots, S \quad (3-28)$$

$$\mathbf{x} \in \mathfrak{R}_+^n \quad (3-29)$$

É importante ressaltar que no modelo proposto (acima) as variáveis inteiras (binárias) não dependem do número de cenários considerados para se caracterizar as incertezas. Para os casos onde as incertezas sejam caracterizadas por cenários simulados (Simulação de Monte Carlo), torna-se importante que o modelo seja robusto e capaz de ser executado em um tempo razoável para um elevado número de cenários, de forma a garantir a estabilidade amostral dos resultados.

Como os algoritmos do tipo *branch and bound*, utilizados para resolver o modelo proposto, apresentam uma complexidade exponencial com relação ao número de variáveis inteiras, a propriedade ressaltada acima torna-se bastante relevante para a aplicabilidade deste modelo.

### 3.3

#### Generalização para o problema multi-período

O modelo descrito anteriormente, para um só período, proporciona sempre a mesma solução ótima ( $x^*$ ) que o modelo (3-6) de maximização da utilidade esperada. Conforme já mencionado, este resultado decorre do fato da inversa da utilidade ser uma função biunívoca e estritamente crescente.

Entretanto, essa afirmação não pode ser feita no caso multi-período de interesse, pois ao avaliar as utilidades esperadas dos diversos períodos em uma função convexa crescente (função inversa da utilidade - Figura 3-4) tem-se um novo gradiente, se comparado ao caso da utilidade esperada. Desta maneira, ambas as abordagens até admitem soluções idênticas, porém sob certas circunstâncias envolvendo as taxas de desconto utilizadas em cada abordagem e as derivadas da inversa da utilidade nos pontos de utilidade esperada em cada

período. Essas relações são abordadas e analisadas no Anexo D: Relações entre as soluções da utilidade esperada e do equivalente certo no caso multi-período.

A extensão do modelo proposto (3-19) a (3-29) para o caso multi-período, onde, por exemplo, pretende-se analisar uma oportunidade de contratação para os próximos T períodos, torna-se direta. À medida que a metodologia descrita em 3.2 permite precificar o fluxo estocástico e encontrar o seu equivalente certo para cada período, a taxa de desconto que deverá ser aplicada a esse fluxo equivalente é o custo de capital que o agente tomador de decisão requer na ausência de risco.

Neste contexto, se considerarmos ( $J^{LR}$ ) o custo de capital livre de risco do agente, o modelo para um período, anteriormente apresentado, pode ser estendido para o caso de T períodos da seguinte forma:

$$EC^* = \text{Maximizar}_{(x, u, \delta, y)} \sum_{t \leq T} (\sum_{\{k: 2 \leq k \leq K\}} \delta_{t,k} \cdot e_{t,k} - \delta_{t,1} \cdot e_{t,1} + Q_{t,1}) \cdot (1 + J^{LR})^{-t} \quad (3-30)$$

Sujeito a:

$$u_{t,s} \leq a_{t,k} \cdot R_t(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}_{t,s}) + b_{t,k} \quad \forall k=1, \dots, K; s=1, \dots, S \text{ e } t=1, \dots, T \quad (3-31)$$

$$\mathbf{G}_{(T)} \cdot \mathbf{x} \leq \mathbf{d}_{(T)} \quad (3-32)$$

$$\sum_{\{k: 2 \leq k \leq K\}} \delta_{t,k} - \delta_{t,1} = \sum_s p_s \cdot u_{t,s} \quad \forall t=1, \dots, T \quad (3-33)$$

$$y_{t,k} \leq y_{t,k-1} \quad \forall k = 2, \dots, K \text{ e } t=1, \dots, T \quad (3-34)$$

$$\delta_{t,k} \leq y_{t,k} \cdot \Delta U_{t,k} \quad \forall k = 1, \dots, K \text{ e } t=1, \dots, T \quad (3-35)$$

$$\delta_{t,k} \geq y_{t,k+1} \cdot \Delta U_{t,k} \quad \forall k = 2, \dots, K-1 \text{ e } t=1, \dots, T \quad (3-36)$$

$$y_{t,k} \in \{0, 1\} \text{ e } y_1 = 1 \quad \forall k = 1, \dots, K \text{ e } t=1, \dots, T \quad (3-37)$$

$$\delta_{t,k} \in \mathfrak{R}_+ \quad \forall k = 1, \dots, K \text{ e } t=1, \dots, T \quad (3-38)$$

$$u_{t,s} \in \mathfrak{R} \quad \forall s = 1, \dots, S \text{ e } t=1, \dots, T \quad (3-39)$$

$$\mathbf{x} \in \mathfrak{R}_+^n \quad (3-40)$$

Neste caso, a restrição (3-32) compreende todas as restrições impostas anteriormente às variáveis de decisão, como as novas que poderão ser inseridas em função das relações entre períodos. Por exemplo, no caso multi-período, o vetor de decisão pode representar os montantes a serem contratados para um conjunto de contratos candidatos com diferentes datas de início e duração. Neste caso, esta restrição deverá expressar todas as restrições intertemporais para os montantes a serem contratados, não permitindo, por exemplo, que o montante total contratado em todo período viole o limite máximo de energia lastreada pelos ativos de geração (garantia física de energia de cada usina).

### 3.4

#### Exemplo de Aplicação – Contratação de Longo Prazo

Para ilustrar uma possível aplicação do modelo obtido, vamos considerar o problema de contratação ótima de um gerador hidráulico de energia para os próximos 5 anos. Devido à grande volatilidade dos preços de curto prazo (*spot*) de energia a contratação de longo prazo proporciona aos geradores um fluxo de caixa estável e seguro. Diversos trabalhos foram desenvolvidos no sentido de estudar os impactos da presença de contratos futuros em mercados elétricos hidrelétricos como o Brasil e outros [31][33][34][35][51].

Neste exemplo vamos explorar o impacto na decisão ótima de contratação com relação ao perfil de risco. Para isso, vamos calcular a renda de um gerador hidrelétrico com apenas um contrato e otimizar a quantidade contratada de forma a maximizar o seu equivalente certo conforme proposto neste capítulo. Conforme exibido no capítulo 10 (ANEXO B retirado de [3]), expressão (10-1), a renda de um período de uma empresa geradora relativa à venda de um contrato do tipo quantidade a um preço  $P$  (R\$/MWh) e quantidade  $E$  (MWh) assume a seguinte forma:

$$R_{t,s}(E) = E \cdot P + (G_{t,s} - E) \cdot \pi_{t,s} \quad (3-41)$$

Onde a primeira parcela corresponde à receita fixa do contrato e a segunda corresponde à liquidação da diferença entre a geração ( $G_{t,s}$ ) e a quantidade contratada ( $E$ ) ao preço  $\pi_{t,s}$  (R\$/MWh) do mercado de curto prazo (ou spot). Esta segunda parcela (variável) se traduz em uma receita de venda do excedente de energia produzida, caso a geração seja superior ao montante contratado, e em uma despesa com a compra no mercado de curto prazo do montante de energia necessário para honrar o montante contratado.

Neste caso, o vetor de variáveis de decisão apresenta somente uma dimensão, o montante contratado ( $x = [E]$ ). Já o vetor de incertezas é bidimensional e pode ser representado pelo seu conjunto de possíveis cenários  $\{\xi_{t,s} = [\pi_{t,s}, G_{t,s}]^T\}_{s=1,\dots,S}$ .

Neste exemplo, será analisado o caso de um gerador hidrelétrico com 100 MW médios de lastro descontratados, que pretende encontrar o montante de contratação ótimo para uma proposta de contratação com início em janeiro de 2010 e duração de cinco anos (até 2014), ao preço de 125 R\$/MWh.

Para um gerador neutro a risco, a decisão ótima seria contratar toda sua energia, devido ao preço de contrato ser superior ao spot médio neste período (120 R\$/MWh)<sup>7</sup>. Além disso, neste exemplo será considerado um custo de capital de 10%, real ao ano, como a taxa de referência para fluxos certos.

Neste caso, o valor presente líquido da renda esperada de cada período obtido foi de 406 MMR\$. A distribuição de probabilidade do valor presente líquido pode ser visualizada na figura a seguir:

---

<sup>7</sup>Para gerar os cenários de preço spot e geração, foi executado um modelo de despacho hidrotérmico (SDDP de propriedade da PSR Consultoria) onde a configuração de oferta e demanda do curto e médio prazo (até 2011) foi ajustada conforme o Plano Mensal de Operação (PMO) de maio de 2007. Para o longo prazo foi considerada uma inserção de fontes de acordo com o potencial de cada região, de forma a tornar o balanço oferta e demanda equilibrado e proporcionar um risco de déficit inferior a 5% em todos os anos.

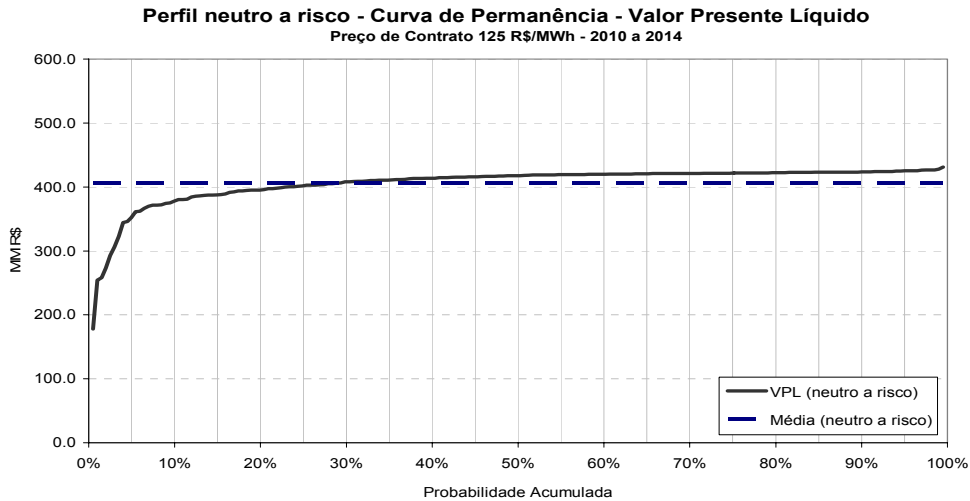


Figura 3-5 – Distribuição de Probabilidade do valor presente líquido do resultado no período (2010 a 2014), para a solução de contratação com perfil neutro a risco.

Neste caso, pode-se observar a presença de eventos extremos, onde o valor presente dos resultados futuros assume valores muito abaixo da média. Entretanto, esse fato fica mais evidente ao analisarmos a distribuição da renda de cada período, que, segundo a figura abaixo, indica a possibilidade de resultados negativos, frutos da correlação negativa entre preço spot e geração hidráulica.

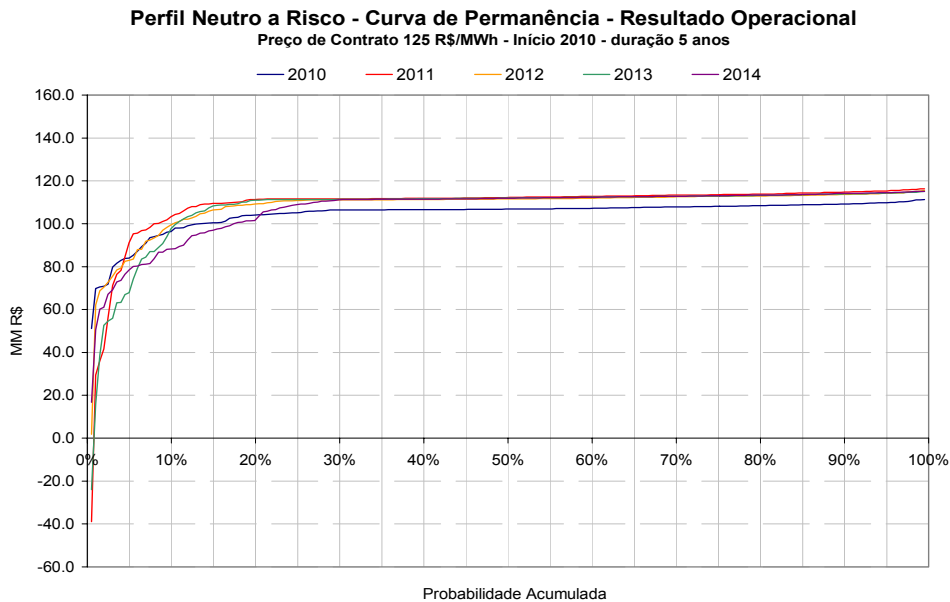


Figura 3-6 – Distribuição de Probabilidade da renda líquida, ou resultado operacional do contrato, de cada período (2010 a 2014), para a solução de contratação com perfil neutro a risco.

Devido ao risco de preço e quantidade, que proporciona a ocorrência de perdas financeiras em alguns cenários, o montante de contratação deverá ser selecionado segundo um perfil de aversão a risco que reflita, por exemplo, a aversão a resultados financeiros piores que a renda esperada no spot, a qual pode servir de referência para um gerador descontratado. No período estudado, a renda média esperada para a venda da geração do gerador no mercado spot apresenta um valor de 100 MMR\$ por ano (média nos períodos e cenários). Assim, uma possível função utilidade linear por partes poderia conter dois pontos de quebra,  $Q_1 = 80$  MMR\$ e  $Q_2 = 100$  MMR\$, proporcionando assim três segmentos de diferentes inclinações: resultados abaixo de 80% da renda esperada no spot (altamente penalizados – inclinação 20), resultados entre 80% e 100% desta (penalizados – inclinação 2) e resultados acima da renda esperada no spot (inclinação 1).

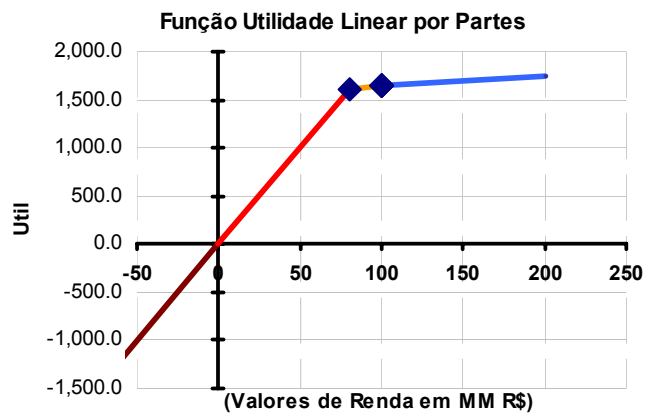


Figura 3-7 – Função Utilidade Linear por Partes com três segmentos (dois pontos de quebra)

Na tabela abaixo é exibido o resumo da solução ótima obtida pelo modelo (3-30) a (3-40) para o perfil de aversão a risco, definido pela função utilidade acima Figura 3-7 (primeira linha da tabela). Além deste resultado, uma segunda linha foi inserida à tabela de forma a contrastar esta solução com a solução neutra a risco. Desse modo, o equivalente certo baseado no perfil de aversão a risco (referente à FU da Figura 3-7) foi calculado para ambas as soluções.



Tabela 3-1 – Comparação da solução obtida pelos perfis de aversão e neutralidade a risco (resultados para todo o período – 2010 a 2014)

Solução	Contratação (% $E^{max}$ )	VPL(10%,5 anos) de $E(R_t)$	VPL(10%,5 anos) de $EC(R_t)$	Prêmio de Risco
Perfil de Aversão	82%	402 MMR\$	387 MMR\$	3.8%
Perfil de neutralidade	100%	406 MMR\$	354 MMR\$	12.8%

Na Tabela 3-1 pode-se ver que o perfil de aversão a risco, selecionou uma contratação de 82%, de forma a se proteger dos cenários onde a geração é baixa e o preço alto. Assim, os cenários de renda inferiores a 80 MMR\$, exibidos na Figura 3-6 para uma contratação de 100%, foram mitigados conforme mostra a Figura 3-8. Além disso, fica evidente a troca realizada entre as duas soluções. Na solução de neutralidade a risco, onde o valor esperado do VPL é maximizado, a solução apresenta um valor esperado para o VPL igual 406 MMR\$, aproximadamente 1% superior (4 MMR\$) ao obtido na solução com perfil de aversão a risco. Entretanto, para este perfil, onde o equivalente certo é maximizado, o valor presente dos equivalentes certos de cada período resultou em 387 MMR\$, 33 MMR\$ (9%) acima da mesma medida (EC) aplicada aos fluxos resultantes da solução obtida pelo perfil neutro a risco. Isso nos indica que para um agente com perfil de aversão a risco, contratar 82 MW médios ao invés dos 100 disponíveis implica em uma “troca” onde perde-se 4 MMR\$ em termos de valor esperado, para se obter 33 MMR\$ em termos de equivalente certo.

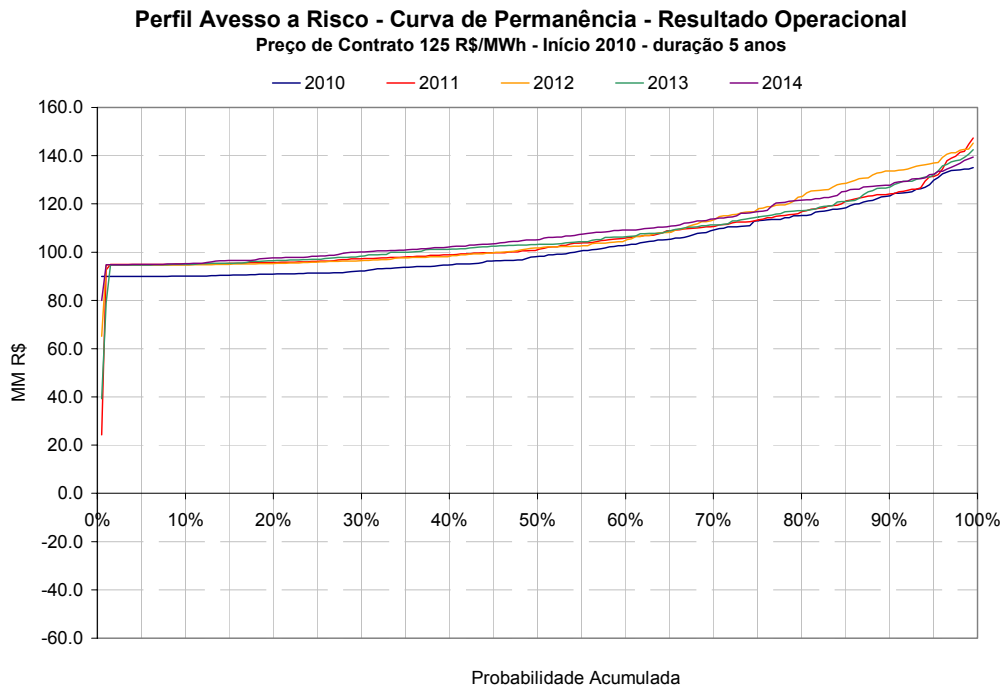


Figura 3-8 – Distribuição de Probabilidade da renda líquida, ou resultado operacional do contrato, de cada período (2010 a 2014), para a solução de contratação com perfil de aversão a risco.

Esta troca pode ser representada graficamente pela “melhoria” (em termos dos 10% piores cenários) da distribuição do valor presente líquido resultante da solução baseada no perfil de aversão a risco com relação ao obtido pelo perfil de neutralidade. Para isto, pode-se comparar diretamente na Figura 3-9 (a seguir) as distribuições dos VPL’s de ambas as soluções.

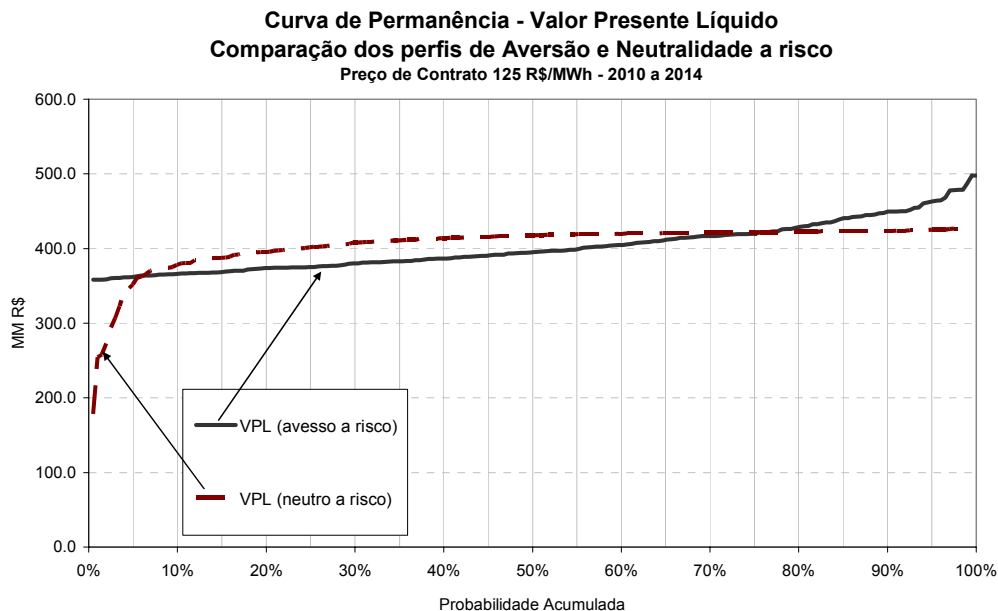


Figura 3-9 – Distribuição de Probabilidade do valor presente líquido do resultado no período (2010 a 2014), para a solução de contratação. Comparação entre as soluções obtidas para os perfis de aversão e neutralidade a risco.

Finalmente, podemos comparar a solução obtida como o funcional proposto neste capítulo, o qual chamaremos de MaxEC, com a solução gerada pelo funcional clássico de maximização de utilidade esperada (MaxEU). Para fins de comparação, utilizaremos como fator de impaciência previsto no modelo MaxEU, o mesmo valor do custo de capital livre de risco exigido pelo agente e utilizado no modelo MaxEC.

Na tabela a seguir, a solução gerada pelo modelo proposto denominada “Perfil de Aversão a Risco” na Tabela 3-1 (acima), foi repetida e referenciada ao seu modelo originário (MaxEC). Em seguida, a solução obtida pelo modelo clássico (MaxEU) foi inserida na linha abaixo e para esta, o valor do funcional proposto foi calculado e exibido na coluna “VPL(10%, 5 anos) de EC( $R_t$ )”.

Tabela 3-2 – Comparação da solução obtida pelos perfis de aversão a risco proposto (MaxEC) e clássico (MaxEU). Resultados para todo o período – 2010 a 2014.

Solução	Contratação (% $E^{\max}$ )	VPL(10%,5 anos) de $E(R_t)$	VPL(10%,5 anos) de $EC(R_t)$	Prêmio de Risco
MaxEC	82%	402.5 MMR\$	387.37 MMR\$	3.8%
MaxEU	85%	403.1 MMR\$	387.35 MMR\$	3.9%

Como pode ser constatado na tabela acima, as soluções obtidas por ambas as abordagens apresentam valores muito parecidos, o que pode ser inclusive percebido na distribuição de probabilidade do VPL da renda nas duas situações (Figura 3-10).

**Curva de Permanência - Valor Presente Líquido**  
**Comparação dos perfis de Aversão a risco (Max EC vs Max EU)**  
 Preço de Contrato 125 R\$/MWh - 2010 a 2014

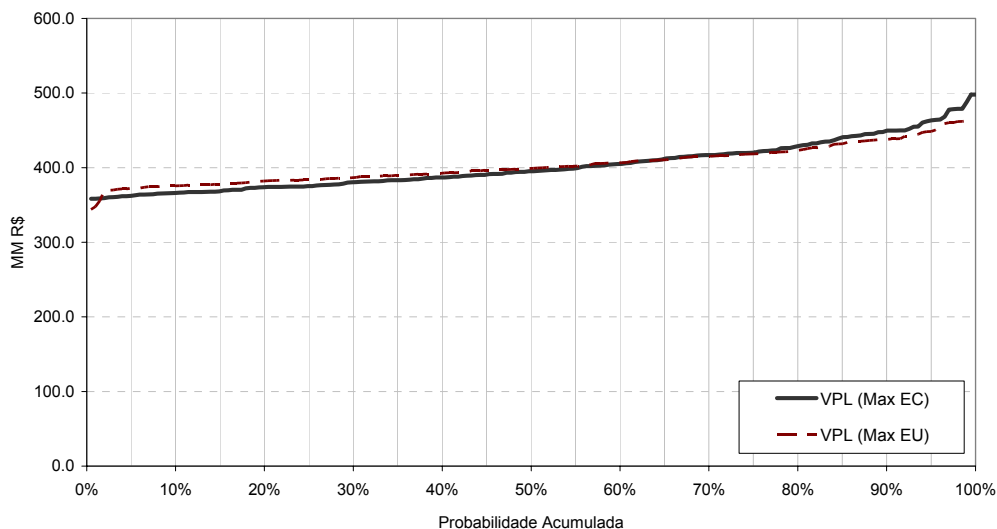


Figura 3-10 – Distribuição de Probabilidade do valor presente líquido do resultado no período (2010 a 2014), para a solução de contratação. Comparação entre as soluções obtidas para os perfis de aversão e neutralidade a risco.

É importante ressaltar que foi realizada uma sensibilidade na função utilidade, deslocando os pontos de quebra para valores nas vizinhanças dos adotados. Para cada nova função utilidade, os dois modelos foram utilizados

gerando soluções mais próximas (em termos de distância entre as distribuições do VPL) que as exibidas, sendo, em sua maioria, iguais entre si (mesma decisão de contratação e, portanto, mesma distribuição). No ponto de vista do autor, esta pequena diferença encontrada entre as soluções não demonstra uma fraqueza para o funcional proposto e sim um ponto alto, pois à medida que os resultados se mantêm bastantes robustos com relação aos obtidos pelos modelos baseados em utilidade esperada, o funcional proposto introduziu todas as virtudes de interpretação e proporcionou uma forma bastante objetiva para a especificação de seus parâmetros.