

Referências Bibliográficas

- [1] D. Bennequin, *Entrelacements et equations de Pfaff*, Asterisque 107-108 (1983), 87-161. 1, 4, 4.1, 5.3, 6
- [2] G. Burde, H. Zieschang, *Knots*, Walter de Gruyter (1985). 2.7
- [3] E. J. Brody, *The topological Classification of the Lens Spaces*, Ann. of Math. vol.71 (1960), 163-184, $\langle K21, M \rangle$. 3.2
- [4] Yu. Chekanov, *New invariants of Legendrian Knots*, European Congress of Mathematics, vol. 2, Barcelona (2000), 525-534. 5.1.2
- [5] L. Conlon, *Differentiable Manifolds, a first course*, Birkhäuser, Boston, Berlin (1993).
- [6] J. H. Conway, *An enumeration of knots and links and some of their related properties*, 1970, 1967, 329-358, proc. conf. oxford. 3, 3.1.1
- [7] R. H. Cromwell, R. H. Fox, *Introduction to Knot Theory*, Graduate Texts in Mathematics, 57 Springer Verlag (1963). 2.2.8
- [8] K. Dymara, *Legendrian knots in Overtwisted Contact Structures*, arXiv:math.GT/0410122, vol.2, 18 Jan. 2005.
- [9] Y. Eliashberg, *Classification of overtwisted contact structures on 3-manifolds*, Invent. Math. 98 (1989), 623-637. 4.1
- [10] Y. Eliashberg, *Contact 3-manifolds twenty years since J. Martinet's work*, Ann. Inst. Fourier 42 (1992), 165-192. 4.1, 4.1.13
- [11] J. B. Etnyre, *Introductory Lectures on Contact Geometry*, arXiv:math.SG/0111118, vol.2, 11 Nov. 2002. 4.1
- [12] J. B. Etnyre, *Lectures on open book decompositions and contact Structures*, arXiv:math.SG/0409402, vol.3, 2 May. 2005.
- [13] J. B. Etnyre, *Legendrian and transversal knots*, arXiv:math.SG/0306256, vol.2, 22 Nov. 2004. 5.3.5

- [14] J. B. Etnyre, K. Honda, *Knots and contact Geometry*, arXiv:math.GT/0006112, vol.1, 15 Jun. 2000.
- [15] E. Ferrand, *On Legendrian Knots and polynomial invariants*, arXiv:math.GT/0002250, vol.3, 21 Jul.2000. 2.8, 6
- [16] H. Geiges, *Contact Geometry*, arXiv:math.SG/0307242, vol.2, 24 Jan. 2004. 4.1, 4.1
- [17] D. Hacon, *Introdução à teoria dos nós em $\mathbb{R}^3$* , 15º colóquio Brasileiro de Matemática, 1995.
- [18] M. T. Imízcoz, *Nudos y Variedades Tridimensionais*, Academia de ciencias exacts de Zaragoza (1998). 2.8
- [19] L. H. Kauffman, *New Invariants in the Theory on Knots*, American Mathematical Monthly. vol. 95, Issue 3 Mar., (1988), 195-242. 2.8
- [20] L. H. Kauffman, *On Knots*, Princeton University Press (1987). 2.8
- [21] L. H. Kauffman, J. R. Goldman, *Rational Tangles*, Princeton University Press (1987). 3, 3.1.1
- [22] L. H. Kauffman e S. Lambropoulou, *On the classification of rational tangles* arXiv:math.GT0311499, 57M25, Nov.2003. 3.1.15, 3.1.1
- [23] W. B. R. Lickorish, *Linear skein theory and link polynomials*, Topology Appl. 27 (1987) 265-274. 3.3, 3.3
- [24] X. S. Lin, *An Introduction to 3-dimensional contact topology*, paper. 5.3.1
- [25] V. Manturov, *Knot Theory*, Chapman & Hall/CRC (2004). 2.5
- [26] J. Martinet, *Formes de contact sur les variétés de dimension 3*, Springer Lecture Notes in Math 209, 142-163. 4.1
- [27] W. S. Massey, *Algebraic Topology: an Introduction*, Graduate Texts, Math. 5c, Springer - Verlag (1977). 2.6.1
- [28] J. Milnor, *Differential Topology*, Princeton University, (notes by J. Munkres), 1958 .
- [29] J. L. C Molina, *Introducción a la Teoria de Nudos*, Instituto de Matemáticas, Unidade Cuernavaca (2000).
- [30] K. Murasugi, *Knot Theory and its applications*, Birkhäuser (1996). 1, 3.1

- [31] L. Ng, *Legendrian Mirrors and Legendrian Isotopy*, arXiv:math.GT/0008210, vol.1, 28 Aug. 2000.
- [32] L. Ng, *Maximal Thurston-Bennequin number of two-bridge links*. *Algebr. Geom. Topol.* vol.1 (2001), 427-434. 1
- [33] A. M. Rockett, P. Szűsz, *Continued Fractions*, World Scientific, 1992. A.2, A.2.3
- [34] L. Rudolph, *A congruence between link polynomials*, *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.* 107 (1990) 319-327. 6.2
- [35] D. Rolfsen, *Knot and Links*, Mathematics Lecture series 7 (1976), Publish or Perish Inc. 2
- [36] H. Seifert, *Über das Geschlecht von Knoten*, *Math. Ann*, 110 (1934), 571-592, $< K_{15}, K_{25} >$. 2.6.1
- [37] H. Schubert, *Knoten mit zwei Brücken*, *Math. Zeit.* 65 (1956), 133-170. 3.2, 3.2.4, 3.2.5
- [38] J. Swiatkowski, *On the isotopy of Legendrian knots*, *Ann. Glob. Geom.* 10 (1992), 195-207. 4.4
- [39] D. Fuchs, S. Tabachnikov, *Invariants of Legendrian and transverse knots in the standard contact space*, *Topology* vol.36 (1997), 1025-1054. 1, 5.2.1, 5.3, 6.2.1, 6.2
- [40] S. Tabachnikov, *Estimates for the Bennequin number of Legendrian links from state models for knot polynomials*, *Math. Res. Lett* 4 (1997), 143-156.
- [41] T. Tanaka, *Maximal Bennequin numbers and Kauffman polynomials of positive links*, *Proc. Amer. Math. Soc.* 127(1999) 3427-3432.

Índice Remissivo

- Δ -movimento, 20
- Cúspide, 67
 - generalizada, 69
- Circunferência de Seifert, 22
- Composição de nós, 27
- Contactomorfismo, 64
- Convergentes, 99
- Cruzamento, 17
 - negativo, 17
 - positivo, 17
- Denominador, 37
- Desestabilização, 85
- Diagrama
 - alternado, 40
 - do nó, 17
 - em forma racional, 40
 - frontal, 67
 - lagrangeano, 73
- Diagrama regular
 - do tangle, 36
- Disco
 - torcido, 62
- Enlace, 12
 - poligonal, 14
- Enlaces
 - equivalentes, 14
- Estabilização, 84
 - negativa, 84
 - positiva, 84
- Estrutura de contato, 60
 - canônica, 61
 - simétrica, 61
 - super torcida, 62
 - tensa, 63
- Estruturas de contato
 - contactomorfas, 64
 - isotópicas, 64
- Forma
 - de contato, 60
 - racional legendreana, 90
- Fração
 - contínua, 99
 - contínua simples, 99
- Fração contínua
 - em forma canônica, 42
- Gênero
 - de uma superfície , 24
 - do nó, 25
- Imagem por reflexão, 14
- Independência dos movimentos
 - de Reidemeister, 22
- Invariante, 18
 - completo, 18
 - de Maslov, 81
 - de Thurston-Bennequin, 79
- Isotopia
 - ambiente, 13
 - de contato, 76
 - legendreana, 76
 - planar, 17, 18
 - regular, 26
- Movimento

- elementar, 20
- Movimentos
 - de Reidemeister, 19
- Nó, 11
 - composto, 28
 - dócil, 14
 - de m -pontes, 28
 - de 2-pontes, 44
 - genérico, 67, 73
 - legendreano, 66
 - poligonal, 14
 - primo, 28
 - racional, 48
 - selvagem, 14
 - transversal, 66
 - trivial, 13
- Nós
 - equivalentes, 13
 - isotópicos, 13
- Nós isotópicos
 - por isotopia de contato, 76
 - por isotopia legendreana, 76
- Número
 - de enlaçamento, 26
 - de m pontes, 28
 - de Maslov, 82
 - de Thurston-Bennequin, 79, 80
 - de torção, 26
 - máximo de Thurston-Bennequin, 87
- Numerador, 37
- Polinômio
 - de Alexander, 29
 - de Conway, 30
 - de HOMFLY, 32
 - de Jones, 31
 - de Kauffman, 32, 33
- Ponto
 - duplo, 16
 - múltiplo, 16
 - regular, 16
 - transversal, 16
- Projeção, 16, 17
 - frontal, 67
 - Lagrangeana, 73
 - regular, 16
- Projeções
 - equivalentes, 17
- Quocientes parciais, 99
- Referencial, 78
 - de Thurston Bennequin, 78
- Reflexão, 14
 - legendreana, 83
- Rotação
 - horizontal, 45
 - vertical, 47
- Soma conexa de nós, 27
- Superfície de Seifert, 22
- Tangle, 36
 - alternado, 40
 - em forma canônica, 42
 - equivalentes, 38
 - racional, 38
 - trivial, 38
- Teorema
 - de Darboux, 64
 - de Eliashberg, 65
 - de Gray, 65
- Tipo de nó, 13
- Torção
 - horizontal, 39
 - negativa, 39
 - positiva, 39
 - vertical, 39

Trivialização, 78

Variedade

de contato, 60

Variedades

contactomorfias, 64

A Apêndice

A.1 Independência dos movimentos de Reidemeister

Verificaremos, através de contra exemplos, a independência dos movimentos de Reidemeister, ou seja, para cada movimento mostraremos a existência de dois diagramas de nós, da mesma classe de isotopia, que não pode ser transformado um no outro usando apenas os outros dois movimentos.

Analisaremos cada movimento separadamente.

Movimento Ω_1 - Considere dois diagramas isotópicos ao nó trivial.

O primeiro movimento de Reidemeister é o único movimento que altera a paridade do número de cruzamentos. Assim, cada diagrama de nó da mesma classe de isotopia dos nós triviais com um número ímpar de cruzamentos não pode ser transformado num diagrama sem cruzamentos usando apenas os movimentos Ω_2 e Ω_3 .

Considerando a definição de nó primo, analisamos o segundo movimento.

Movimento Ω_2 - Sejam D_1, D_2, D_3, D_4 diagramas de diferentes nós primos (não triviais) K_1, K_2, K_3, K_4 . Considere os diagramas $L = D_1 \# D_2 \# D_3 \# D_4$, e $M = D_1 \# D_3 \# D_2 \# D_4$, conforme figura A.1.

Cada subdiagrama dos nós K_i , $i = 1, 2, 3, 4$ é representado pelas respectivas “caixas”. Podemos observar que os diagramas L e M são equivalentes. De fato, K_3 e K_2 podem trocar de posição e assim os diagramas L e M tornam-se iguais. Para ver isto, note que K_3 , por exemplo, pode se tornar tão pequeno (mas nunca desaparecer), de modo a passar por entre K_2 e tomar sua posição.

Mostraremos que não existe uma isotopia que transforma L em M , envolvendo apenas os movimentos de Reidemeister, Ω_1 e Ω_3 .

Considere os subdiagramas D_i , $i=1,2,3,4$ em L . Esta ordem é tal que entre os nós K_1 e K_3 não existem nós triviais em ambos os lados.

Os movimentos realizados nos subdiagramas ocorrem em suas “caixas”, assim durante a isotopia suas ordens permanecem a mesma, desse modo diferentes D_i não se encontram. Contudo, D_1 e D_3 são adjacentes em M , o que nos dá que L não pode ser transformado em M usando apenas os movimentos Ω_1 e Ω_3 e isotopia planar.

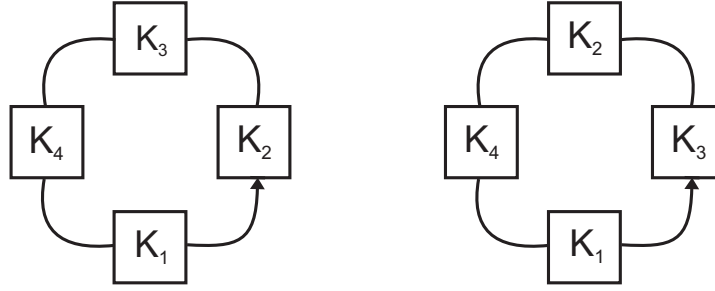


Figura A.1: Contra exemplo para $\Omega_1, \Omega_3 \Rightarrow \Omega_2$.

Movimento Ω_3 - Considere o diagrama do anel de Borromean e construa um enlace como mostra a Figura A.2(a), denotamos o diagrama por L_1 .

As componentes do enlace L_1 , são nós triviais, então L_1 é isotópico ao diagrama L_2 , como mostra a Figura A.2 (b).

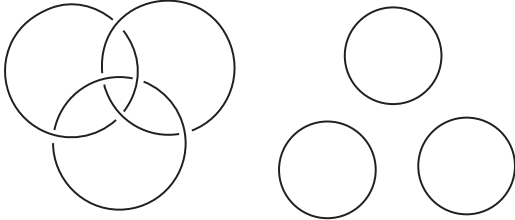


Figura A.2: Contra exemplo para $\Omega_1, \Omega_2 \Rightarrow \Omega_3$.

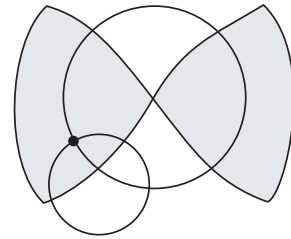


Figura A.3:

Mostraremos que o diagrama L_1 , não pode ser transformado no diagrama L_2 , usando apenas as sequências de movimentos Ω_1 e Ω_2 .

Considere um diagrama planar arbitrário de três componentes triviais, tal que, para cada componente, associamos um elemento de $\mathbb{Z}_2$, da seguinte maneira. Fixe uma componente l do diagrama L_1 . No interior desta componente considere os cruzamentos provenientes das outras duas componentes, como por exemplo na Figura A.3, e então calculamos sua paridade.

Procedemos da mesma forma para as outras duas componentes, e assim temos três elementos de $\mathbb{Z}_2$.

Facilmente vemos que para o diagrama L_1 , todos esses três números são iguais a um e para L_2 todos são iguais a zero. Então, essa 3-upla de números é um invariante para Ω_1 e Ω_2 .

Note que, para o movimento Ω_1 esta afirmação é evidente. E o movimento Ω_2 é aplicado a arcos de diferentes circunferências. Basta então, observar que ambos os cruzamentos estão dentro ou fora da componente l .

Mas L_1 e L_2 são isotópicos e, no entanto, possuem elementos de $\mathbb{Z}_2$ diferentes. Assim L_1 não pode ser transformado em L_2 usando apenas Ω_1 e Ω_2 .

Verificamos, a partir dos três exemplos acima, a independência dos movimentos de Reidemeister.

A.2

Frações contínuas

As frações contínuas foram estudadas por grandes matemáticos dos séculos XVII e XVIII e, até hoje, são objeto de estudos em várias áreas da matemática, principalmente em teoria dos números.

A aproximação de números reais por racionais é uma questão de grande importância em diversas situações. No entanto, a aproximação que se obtém simplesmente ao truncar o real em um número finito de casas decimais, por exemplo, $\pi \approx 3,141 = \frac{3141}{1000}$, nem sempre é a mais adequada pois, em certas situações, pode ser necessário limitar os valores do numerador e do denominador da aproximação racional.

Definição A.2.1 *Uma expressão da forma*

$$x = a_0 + \frac{b_1}{a_1 + \frac{b_2}{a_2 + \frac{b_3}{a_3 + \frac{b_4}{\ddots}}}} \quad (\text{A-1})$$

é dita a expansão em frações contínuas do número x , onde, para todo número i natural, os números a_i e b_i são reais ou complexos, e o número de termos pode ser finito ou infinito. Representamos uma fração contínua por $[a_1, a_2, \dots, a_n, \dots]$.

Se os termos b_i são iguais a 1, para todo número i natural, a fração é dita *fração contínua simples*, onde a_i é sempre positivo para $i > 1$.

Os termos $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ são chamados *quocientes parciais* da fração contínua.

A expansão em frações contínuas do número x significa que ele é o limite da sequência

$$\frac{p_k}{q_k} = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \ddots + \frac{1}{a_{k-1} + \frac{1}{a_k}}}}}$$

onde as frações p_k/q_k são os *convergentes*.

Não abordaremos aqui a expansão de frações contínuas de números irracionais, a qual pode ser obtida a partir da transformação de Gauss, ou seja, as imagens de um número irracional x pela transformação de Gauss determinam os quocientes de x . Para o leitor interessado sugerimos (33).

Teorema A.2.2 (Algoritmo da divisão) *Dados dois inteiros a e b , $b > 0$, existe um único par de inteiros q e r tais que*

$$a = qb + r, \text{ com } 0 \leq r < b,$$

onde q é chamado o quociente e r de resto da divisão de a por b .

Teorema A.2.3 (Ver (33)) *Um número $x \in \mathbb{R}$ é racional se, e somente se, sua expansão em frações contínuas é finita.*

Exemplo A.2.4 *Vamos expressar o número $-37/5$ como uma fração contínua. É fácil verificar que,*

$$-37 = -8 \times 5 + 3$$

$$5 = 1 \times 3 + 2$$

$$3 = 1 \times 2 + 1$$

$$2 = 2 \times 1 + 0$$

$$\frac{-37}{5} = -8 + \frac{1}{1 + \frac{2}{3}} = -8 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2}} = -8 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2}}}.$$

Como se pode ver, no processo de divisões sucessivas, somente o primeiro quociente pode ser negativo. Disto concluímos que na fração contínua simples $[a_1, a_2, a_3, \dots]$, todos os a_i 's são inteiros positivos, com a possível exceção de a_1 .

Exemplo A.2.5 *Considere o número $\pi = 3,141592654\dots$*

$$\begin{aligned} \pi &\approx 3 + 0,141592654 \approx 3 + \frac{1}{7,062513285} \approx 3 + \frac{1}{7 + \frac{1}{15,99659976}} \\ &\approx 3 + \frac{1}{7 + \frac{1}{15 + \frac{1}{1,003411841}}} \approx 3 + \frac{1}{7 + \frac{1}{15 + \frac{1}{1 + \frac{1}{293,096894}}}} \end{aligned}$$

$$\pi \approx [3, 7, 15, 1, 293]$$

Qualquer fração racional p/q pode ser expandida em uma fração contínua simples finita

$$\frac{p}{q} = [a_1, a_2, a_3, \dots, a_{n-1}, a_n].$$

Chamamos a atenção do leitor para o fato de que a unicidade da representação de um número racional em fração contínua simples (a menos da modificação do último termo a_n) é garantida pelo Teorema A.2.2. Na realidade temos em geral, que se a representação em fração contínua do racional $\frac{p}{q}$ ($p > q$) é dada por $[a_1, a_2, \dots, a_n]$, então a representação de $\frac{q}{p}$ é dada por $[0, a_1, a_2, \dots, a_n]$. Isto é consequência imediata do fato de

$$\frac{q}{p} = 0 + \frac{1}{\frac{p}{q}}$$

Considere os convergentes

$$\frac{p_1}{q_1} = \frac{a_1}{1}, \quad \frac{p_2}{q_2} = a_1 + \frac{1}{a_2}, \quad \frac{p_3}{q_3} = a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3}}, \dots$$

obtidos pelas expansões das frações contínuas

$$[a_1], [a_1, a_2], [a_1, a_2, a_3], \dots$$

Então temos $p_1 = a_1$, $p_2 = a_1 a_2 + 1$ e $q_2 = a_2$, calculando os demais convergentes, obtemos,

$$\begin{aligned} \frac{p_3}{q_3} &= \frac{a_3 p_2 + p_1}{a_3 q_2 + q_1} \\ \frac{p_4}{q_4} &= \frac{a_4 p_3 + p_2}{a_4 q_3 + q_2} \\ \frac{p_5}{q_5} &= \frac{a_5 p_4 + p_3}{a_5 q_4 + q_3}. \end{aligned}$$

Observando estes resultados podemos conjecturar que os numeradores e os denominadores dos convergentes $\frac{p_k}{q_k}$ satisfazem as seguintes relações:

$$\begin{aligned} p_i &= a_i p_{i-1} + p_{i-2} \\ q_i &= a_i q_{i-1} + q_{i-2}. \end{aligned} \tag{A-2}$$

Por indução podemos verificar que as igualdades são válidas para $i = 3, 4, 5, \dots, n$, porém não faremos a verificação aqui.

Teorema A.2.6 *A relação*

$$p_i q_{i-1} - p_{i-1} q_i = (-1)^i \tag{A-3}$$

se verifica para todo $i \geq 0$, onde p_i e q_i são, respectivamente, o numerador, e o denominador do i -ésimo convergente.

Prova. Para $i=0$ temos $p_0q_{-1} - p_{-1}q_0 = 1 = (-1)^0$ uma vez que $p_0 = q_{-1} = 1$ e $p_{-1} = q_0 = 0$.

Vamos assumir, como hipótese de indução, a validade de A-3 e mostrar que a mesma relação também se verifica quando substituímos i por $i+1$. Sabemos, da Equação A-2, que

$$p_{i+1} = a_{i+1}p_i + p_{i-1} \text{ e } q_{i+1} = a_{i+1}q_i + q_{i-1}.$$

Logo,

$$\begin{aligned} p_{i+1}q_i - p_iq_{i+1} &= (a_{i+1}p_i + p_{i-1})q_i - p_i(a_{i+1}q_i + q_{i-1}) \\ &= a_{i+1}p_iq_i + p_{i-1}q_i - a_{i+1}p_iq_i - p_iq_{i-1} - 1 \\ &= (-1)(p_iq_{i-1} - p_{i-1}q_i). \end{aligned}$$

Utilizando, a hipótese de indução, obtemos

$$p_{i+1}q_i - p_iq_{i+1} = (-1)(-1)^i = (-1)^{i+1},$$

o que conclui a demonstração. ■

Corolário A.2.7 Para todo convergente $\frac{p_k}{q_k}$ temos que $\text{mdc}(p_k, q_k) = 1$.

Prova. Pelo Teorema A.2.6 temos que $p_iq_{i-1} - p_{i-1}q_i = (-1)^i$. Isto nos diz que qualquer divisor comum de p_i e q_i deve ser um divisor de 1 ou -1. Logo o máximo divisor comum de p_i e q_i deve ser igual a 1. ■