

## 4

### Nós legendreanos

Nós legendreanos em estrutura de contato são objetos naturais, nascidos há dois séculos atrás no trabalho de Huygens, Hamilton e Jacobi em óptica geométrica e no trabalho de Lie em equações diferenciais parciais. Os nós legendreanos foram aplicados em diversas áreas da Matemática e da Física e têm profunda ligação com topologia e dinâmica em baixa dimensão. O estudo dos nós legendreanos tem se tornado popular em geometria de contato desde o trabalho de Bennequin (1), publicado em 1983. Atualmente o estudo de nós legendreanos é uma bonita e rica teoria com muitas aplicações.

Essa dissertação se concentra em nós legendreanos no espaço  $\mathbb{R}^3$  com a estrutura de contato canônica deste espaço, onde sua teoria é mais fortemente desenvolvida e intimamente ligada a topologia.

Com o objetivo de apresentarmos a teoria de nós legendreanos, omitimos alguns conceitos de topologia diferencial utilizados durante o capítulo.

#### 4.1

##### Estrutura de contato

Em 1971, Martinet (26) mostrou que toda variedade orientável de dimensão 3 admite uma estrutura de contato. Como consequência, Bennequin (1) e Eliashberg (10) mostraram a existência de dois tipos de estrutura de contato em  $\mathbb{R}^3$ , são elas classificadas em estruturas tensas e super torcidas.

**Definição 4.1.1** *Uma estrutura de contato em uma variedade  $M$ , de dimensão 3, é um campo de 2-planos tangentes completamente não integrável.*

Considerando  $\xi$  um campo de planos, para cada  $x \in M$ ,  $\xi_x$  é um subespaço 2-dimensional de  $T_x M$ . Para cada ponto  $x$  de  $M$  podemos considerar localmente o campo de planos  $\xi_x$  como o núcleo de uma 1-forma (localmente definida), isto é, existe uma 1-forma  $\alpha$  tal que  $\xi_x = \text{Ker}(\alpha_x)$ ,  $\alpha$  é dito uma *forma de contato* e  $(M, \xi)$  é uma *variedade de contato*. O campo de planos  $\xi$  é completamente não integrável se a forma de contato  $\alpha$  satisfaz  $\alpha \wedge d\alpha \neq 0$  em todo ponto.

A condição  $\alpha \wedge d\alpha \neq 0$ , implica que a estrutura de contato não é, nem mesmo localmente, tangente a nenhuma superfície na variedade. Podemos ver isso na Figura 4.1, onde o campo de planos rotaciona ao longo da direção do eixo  $y$ . Essa rotação impede que os planos de contato sejam tangentes a uma superfície.

**Teorema 4.1.2** *Uma variedade de dimensão 3 admite uma estrutura de contato se, e somente se, é orientável.*

Uma implicação é evidente, desde que dada uma variedade  $M$  e uma 1-forma  $\alpha$ , o produto exterior  $\alpha \wedge d\alpha$  (observe que  $-\alpha \wedge d(-\alpha) = \alpha \wedge d\alpha$ ) define uma orientação em  $M$ , ou seja, uma estrutura de contato em uma variedade  $M$  determina uma orientação em  $M$ . A implicação inversa é um dos primeiros teoremas de estrutura de contato, demonstrado por Martinet, e sua demonstração não é de fácil entendimento, e não sendo relevante nesta dissertação, a omitiremos.

Vejamos alguns exemplos de estruturas de contato.

**Exemplo 4.1.3** *Estrutura de contato canônica em  $\mathbb{R}^3$ , denotada por  $\xi_{can}$ .*

Considere a variedade  $\mathbb{R}^3$  com coordenadas cartesianas  $(x, y, z)$  e a 1-forma  $\alpha = dz - ydx$ . Note que,

$$\alpha \wedge d\alpha = (dz - ydx) \wedge (dx \wedge dy) = dz \wedge dx \wedge dy \neq 0.$$

Assim  $\xi_{can} = \text{Ker } \alpha$  é uma estrutura de contato.

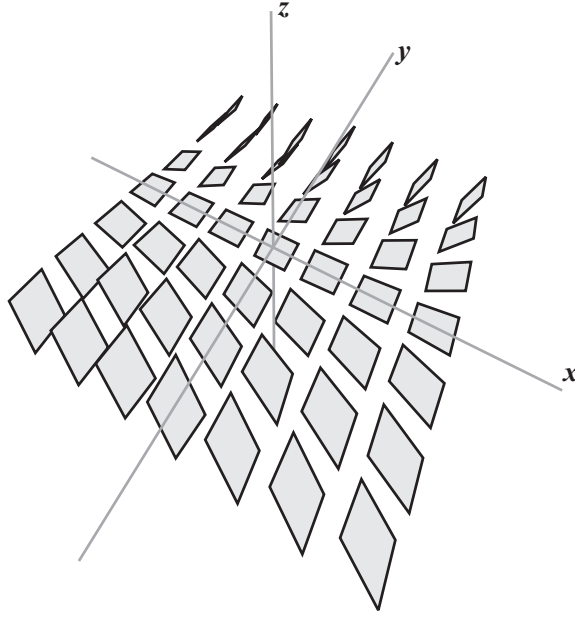
Para um ponto  $(x, y, z)$  o plano de contato  $\xi_{can}$  é gerado por  $\left\{ \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial z} \right\}$ . O campo de planos está indicado na figura 4.1.

Observe que, para qualquer ponto no plano  $xz$ , o campo de planos  $\xi$  é horizontal, isto é, paralelo ao plano  $xy$  e observe também que, ao longo do eixo  $y$  positivo, da origem para o infinito, os planos começam horizontais e rotacionam no sentido anti-horário em torno deste eixo. Nesta direção, e, em qualquer reta paralela ao eixo  $y$ , os planos rotacionam  $90^\circ$ .

**Exemplo 4.1.4** *Versão simétrica da estrutura de contato  $\xi_{can}$  em  $\mathbb{R}^3$ , denotada por  $\xi_{sim}$ .*

Considere a variedade  $\mathbb{R}^3$  e a forma diferencial  $\alpha = dz + xdy - ydx$  ou em coordenadas cilíndricas  $(r, \theta, z)$ ,  $\alpha = dz + r^2 d\theta$ . Note que, para  $r \neq 0$ ,

$$\alpha \wedge d\alpha = 2rdz \wedge (dr \wedge d\theta) \neq 0.$$

Figura 4.1: Estrutura de contato canônica -  $\xi_{can}$ 

Assim,  $\xi_{sim} = \text{Ker } \alpha$  é uma estrutura de contato.

Para um ponto  $(r, \theta, z)$  o plano de contato  $\xi_{sim}$  é gerado por  $\{\frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial \theta} - r^2 \frac{\partial}{\partial z}\}$ . O campo de planos está indicado na Figura 4.2.

Considere o difeomorfismo  $(x, y, z) \mapsto (x, 2y, z + xy)$ . Vemos que  $d(z + xy) - (2y)dx = dz + xdy - ydx = dz + r^2 d\theta$ . Assim a estrutura de contato canônica em  $\mathbb{R}^3$ ,  $\xi_{can}$ , é isomorfa a sua versão simétrica  $\xi_{sim}$ .

**Exemplo 4.1.5** *Estrutura de contato super torcida em  $\mathbb{R}^3$ , denotada por  $\xi_{stor}$ .*

Considere a variedade  $\mathbb{R}^3$  com coordenadas cilíndricas e a 1-forma  $\alpha = \cos r dz + r \sin r d\theta$ . Note que para  $r \neq 0$

$$\alpha \wedge d\alpha = \left(1 + \frac{\sin r \cos r}{r}\right) dr \wedge d\theta \wedge dz.$$

Com um pequeno cálculo, verificamos que

$$\left(1 + \frac{\sin r \cos r}{r}\right) > 0.$$

Assim,  $\xi_{stor} = \text{Ker } \alpha$  é uma estrutura de contato. A estrutura de contato  $\xi_{stor}$  é mostrada na Figura 4.3.

Observe que os campos de planos de contato de  $\xi_{stor}$  são similares aos da estrutura de contato  $\xi_{sim}$ , mas percorrendo um raio perpendicular ao eixo  $z$ , os planos rotacionam muitas vezes (infinitas vezes), enquanto na estrutura de contato  $\xi_{sim}$ , eles rotacionam somente  $90^\circ$ . Note também que o disco  $D = \{(r, \theta, z) / z = 0, r \leq \pi\}$  é tangente aos planos de contato ao longo de sua borda. Esse disco é chamado *disco torcido*.

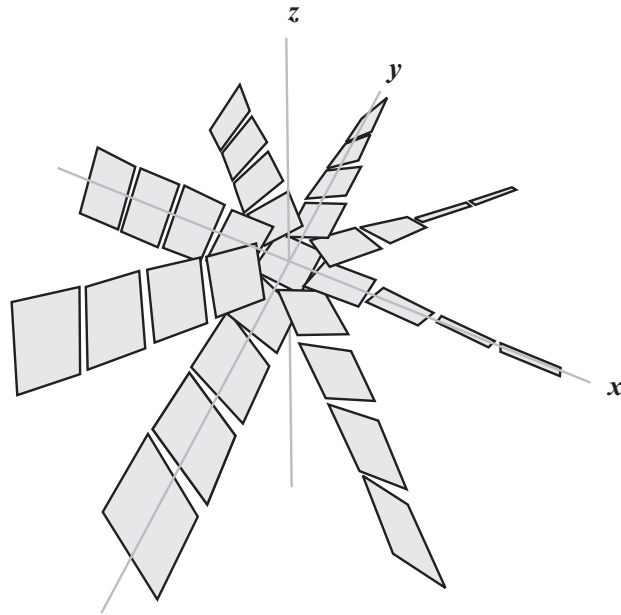


Figura 4.2: Estrutura de contato simétrica -  $\xi_{sim}$

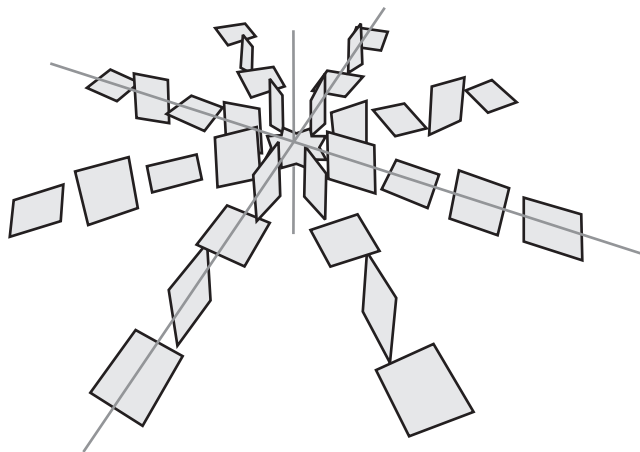


Figura 4.3: Estrutura de contato super torcida -  $\xi_{stor}$ .

Uma estrutura de contato é chamada *super torcida* se existe um mergulho de um disco torcido em  $\mathbb{R}^3$ ; caso contrário, as estruturas de contato são ditas *tensas*.

Para um campo de planos ser uma estrutura de contato, deve rotacionar, evitando assim a tangência a uma variedade, mas  $\xi_{stor}$  rotaciona muito mais do que o necessário, então o nome “super torcida”. Vemos claramente na Figura 4.3, que  $\xi_{stor}$  é super torcida.

Veremos na próxima seção que as estruturas de contato tensas nos fornecem interessantes informações quando estudadas juntamente com os nós. Para uma maior abordagem sobre as estruturas de contato super torcidas e tensas, ver (9, 11).

**Definição 4.1.6** *Duas variedades de contato  $(M_1, \xi_1)$  e  $(M_2, \xi_2)$  são ditas contactomorfas se existe um difeomorfismo  $f : M_1 \longrightarrow M_2$  com  $Tf(\xi_1) = (\xi_2)$  onde  $Tf : TM_1 \longrightarrow TM_2$  denota a aplicação derivada de  $f$ . Neste caso  $f$  é chamado um contactomorfismo.*

*Se existem formas de contato  $\alpha_i$ ,  $i = 1, 2$  tais que  $\xi_i = \text{Ker}\alpha_i$ , equivalentemente dizemos que duas variedades  $(M_1, \xi_1)$  e  $(M_2, \xi_2)$  são contactomorfas se existe um difeomorfismo  $f : M_1 \longrightarrow M_2$  e uma aplicação não nula  $g : M_1 \longrightarrow \mathbb{R}$  tais que  $f^*\alpha_2 = g\alpha_1$ .*

**Exemplo 4.1.7** *As estruturas  $\xi_{can}$  e  $\xi_{sim}$  são contactomorfas, como pode ser visto no Exemplo 4.1.4, ou seja, o difeomorfismo  $\phi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$  definido por  $\phi(x, y, z) = (x, 2y, x + yz)$  é um contactomorfismo entre  $\xi_{can}$  e  $\xi_{sim}$ .*

**Teorema 4.1.8 (Darboux)** *Seja  $\alpha$  uma forma de contato em uma variedade  $M$  de dimensão  $(2n + 1)$  e  $p$  um ponto em  $M$ . Então existem coordenadas  $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n, z$  em uma vizinhança  $U \subset M$  de  $p$  tal que*

$$\alpha|_U = dz + \sum_{j=1}^n x_j dy_j.$$

Este teorema nos diz que todo ponto em uma variedade tem uma vizinhança contactomorfa a  $\xi_{can}$  em  $\mathbb{R}^3$ . A demonstração deste teorema pode ser encontrada em (16).

**Definição 4.1.9** *Dizemos que duas estruturas de contato  $\xi_0$  e  $\xi_1$  são isotópicas se existe uma família suave de estruturas de contato  $\{\xi_t, t \in [0, 1]\}$ .*

Daremos uma breve idéia de como mostrar que em  $\mathbb{R}^3$  todas as estruturas de contato são isotópicas.

Considere  $\zeta$  uma estrutura de contato em  $\mathbb{R}^3$ . Pelo teorema de Darboux e uma isotopia apropriada, existe  $B = B_\epsilon(0)$ , bola de centro em 0 e raio  $\epsilon > 0$ , tal que  $\zeta|_B$  é isomorfa a estrutura de contato canônica em  $\mathbb{R}^3$ ,  $\xi_{can}$ . Então a família de pull-backs de  $\zeta$  por funções  $f_t$ , que levam  $\mathbb{R}^3$  na bola  $B$  nos dá uma isotopia entre  $\zeta$  e  $\xi_{can}$ , definida por:

$$f_t : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

$$x \longmapsto \left( \frac{\epsilon}{t\|x\| + \epsilon} \right) x$$

e  $\zeta_t = f_t^*(\zeta)$  com  $f_0 = id$ , tal que  $\zeta_0 = \zeta$  e  $f_1(\mathbb{R}^3) = B$ . Além disso  $\zeta_1$  é isomorfa a  $\xi_{can}$ .

**Teorema 4.1.10 (Gray)** *Dada uma família a um parâmetro  $\{\xi_t, t \in [0, 1]\}$  de estruturas de contato em uma variedade fechada  $M$  e um ponto  $t_0 \in [0, 1]$ , então existe uma família a um parâmetro  $\{\phi_t, t \in [0, 1]\}$  de difeomorfismos  $\phi_t : M \rightarrow M$  tal que para todo  $t$ ,  $\phi^*(\xi_t) = \xi_{t_0}$ .*

**Proposição 4.1.11** *Dado  $p \in S^3$  a variedade de contato  $(S^3 \setminus \{p\}, \xi_{can})$  é contactomorfa à  $(\mathbb{R}^3, \xi_{can})$ .*

A demonstração desta proposição pode ser encontrada em (16), 2.20 .

**Teorema 4.1.12 (Bennequin)** *A estrutura de contato canônica em  $S^3$  é tensa.*

Do Teorema 4.1.12 e da Proposição 4.1.11 segue que a estrutura de contato canônica em  $\mathbb{R}^3$  é tensa.

**Teorema 4.1.13 (Eliashberg (10))** *Toda estrutura de contato tensa em  $S^3$  é contactomorfa a  $\xi_{can}$ .*

O Teorema 4.1.13 nos diz que a menos de contactomorfismo, existe uma única estrutura de contato tensa em  $S^3$ .

Nos preocupamos com o estudo de nós em estruturas de contato tensas. Para o restante desse capítulo nos restringiremos a estrutura de contato canônica,  $\xi_{can}$ , em  $\mathbb{R}^3$ , salvo em caso mencionado, pois de acordo com o teorema de Darboux, estamos estudando a “teoria local” de nós legendreanos em qualquer variedade de contato. Além disso, essa estrutura de contato facilita o estudo dos nós legendreanos através de suas projeções.

## 4.2

### Nós legendreanos e transversais

Uma estrutura de contato de dimensão 3 admite duas classes de nós, os legendreanos e os transversais. Embora nosso interesse seja em nós legendreanos definiremos também nesta seção nós transversais, uma vez que usaremos sua definição no próximo capítulo.

**Definição 4.2.1** *Seja  $K$  um nó em  $M^3$ . Dizemos que  $K$  é um nó legendreano na variedade de contato  $(M^3, \xi_{can})$  se ele é tangente aos planos da estrutura de contato, isto é,*

$$T_x K \subset \xi_x, \forall x \in K.$$

**Definição 4.2.2** *Seja  $T$  um nó em  $\mathbb{R}^3$ . Dizemos que  $T$  é um nó transversal na variedade de contato  $(M^3, \xi_{can})$  se ele é transversal aos planos da estrutura de contato, isto é,*

$$T_x T \oplus \xi_x = T_x M, \forall x \in T.$$

A partir de agora trabalharemos com a estrutura de contato canônica,  $\xi_{can}$ , em  $\mathbb{R}^3$ . Quando não houver ambiguidade denotaremos  $\xi_{can}$  simplesmente por  $\xi$ .

Lembremos que  $K$  é imagem do nó  $k$ . Considere a parametrização do nó legendreano  $K$ ,  $k : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$ , definida por  $k(t) = (x(t), y(t), z(t))$ , que é uma imersão de classe  $C^1$ . Por definição, o nó legendreano  $K$  é tangente aos planos da estrutura de contato  $\xi$ . Assim,  $k'(t) \in \xi_{k(t)}$  ou ainda  $\xi = \text{Ker}(dz - ydx)$ , e portanto,

$$z'(t) - y(t)x'(t) = 0. \quad (4-1)$$

## 4.3

### Projeções frontal e lagrangeana

A seção anterior nos diz que um nó legendreano é um nó topológico tangente a uma estrutura de contato. Então, é natural perguntarmos se todo nó topológico é isotópico a um nó legendreano, e quais são as propriedades que caracterizam esta rica classe de nós.

Assim como os nós topológicos, o estudo dos nós legendreanos é realizado através de sua projeção em um plano. Porém, para este último, a projeção frontal é a mais indicada, como veremos no decorrer desta seção. Através de propriedades em uma projeção seremos capazes de analisar se tal projeção corresponde, ou não, a de um nó legendreano e ainda recuperar o nó a partir desta projeção.

## 4.3.1

**Projeção frontal**

Seja  $K$  um nó legendreano na variedade de contato  $(\mathbb{R}^3, \xi_{can})$ . Considere a aplicação

$$\begin{aligned}\pi_F : \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) &\longmapsto (x, z).\end{aligned}$$

A imagem  $\pi_F(K)$ , é a projeção frontal de  $K$ . A projeção frontal de um nó é também dito um *diagrama frontal*. Considere  $k_{\pi_F} = \pi_F \circ k$  definida por

$$\begin{aligned}k_{\pi_F} : [0, 1] &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\longmapsto (x(t), z(t)),\end{aligned}$$

então  $k_{\pi_F}$  parametriza  $\pi_F(K)$ .

Temos que  $k$  é imersão (de fato, um mergulho), porém não podemos garantir que  $k_{\pi_F}$  seja, e de fato não será. Note que a Equação 4-1 implica que  $z'(t) = y(t)x'(t)$ ; então se  $x'(t_0) = 0$  para algum  $t_0 \in [0, 1]$ , tem-se  $z'(t_0) = 0$ , o que não é permitido numa imersão no plano  $xz$ . Note ainda que se  $k_{\pi_F}$  é uma imersão então  $x'(t) \neq 0$  para todo  $t \in [0, 1]$ . Então, se  $k_{\pi_F}$  é uma imersão, implica que  $\pi_F(K)$  não possui tangentes verticais. Assim obtemos a primeira propriedade:

**P1-***Projeções frontais não possuem tangentes verticais.*

**Definição 4.3.1** *Um nó legendreano  $K$ ,  $K \subset \mathbb{R}^3$ , é dito ser genérico se todas as autointerseções da curva na projeção frontal,  $\pi_F(K)$ , são pontos duplos transversais.*

Veremos que, por uma pequena perturbação  $C^0$  de um nó topológico  $k$ , podemos obter um nó legendreano  $\tilde{k}$  isotópico a  $k$  e, por uma pequena perturbação  $C^2$ , podemos fazer com que a projeção frontal de  $k$  tenha somente cúspides semicúbicas singulares, isto é, ao redor de um ponto cúspide para  $t = 0$  a curva é vista como

$$\tilde{k}(t) = (\lambda t^2 + b, t + a, -\lambda(2t^3 + at^2) + c) \text{ com } \lambda \neq 0,$$

como na Figura 4.4.



Figura 4.4: Cúspide

Genericamente, as cúspides têm forma de uma parábola semicúbica, por exemplo, a curva  $(t^2, \frac{3t}{2}, t^3)$  tem cúspide em  $(0,0,0)$  e a curva  $t \mapsto (0, t, 0)$  é um exemplo de uma curva legendreana cuja projeção frontal é um único ponto.

Estudamos as propriedades de um nó legendreano através de sua projeção frontal, facilmente obtida pela aplicação  $\pi_F$ . Agora o que queremos é recuperar o nó legendreano a partir dessa projeção, ou seja, recuperar a coordenada  $y$  de  $k$  através de  $k_{\pi_F}$ . A partir da projeção frontal de um nó suave genérico (exceto nos pontos cúspides) podemos recuperar o nó legendreano em  $\mathbb{R}^3$  através de  $y = \frac{dz}{dx}$ . Utilizando as equações,

$$y(t) = \frac{z'(t)}{x'(t)} \text{ se } x'(t) \neq 0$$

e

$$y(t_0) = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{z'(t)}{x'(t)} \text{ se } x'(t_0) = 0 \text{ para algum } t_0,$$

obtemos o valor de  $y$ .

Concluimos que a partir de qualquer curva regular no plano  $xz$  com cúspides semicúbica e sem tangentes verticais podemos obter um único nó legendreano em  $\mathbb{R}^3$ .

Vale a pena mencionar que as interseções transversais definem unicamente a estrutura de um cruzamento do nó e ainda que, em um cruzamento na projeção, o segmento de menor inclinação “passa por cima” do de maior inclinação e portanto, em  $\mathbb{R}^3$  o segmento está a frente do de maior inclinação. Assim, o nó é bem determinado. Sem perda de formalidade matemática, podemos imaginar que o eixo  $y$  entra na página.

É importante observar que em uma projeção frontal de um nó genérico, o conjunto  $\{t \in [0, 1]; x'(t) = 0\}$  é discreto. Vejamos: existem nós legendreanos tais que  $x'(t) = 0$  em intervalos abertos. Podemos então, de acordo com o intervalo, criar cúspides mais pontiagudas (Figura 4.6). Isso pode ser feito através de uma isotopia legendreana (Definição 4.4.1) em apenas um ponto no arco do nó onde  $x'(t) = 0$ .

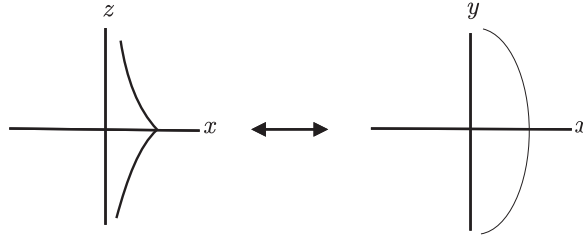


Figura 4.5: Projeção com  $x'(t)=0$  em um ponto.

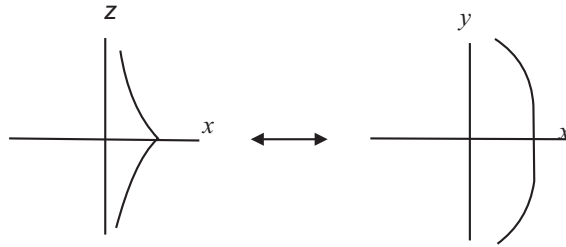


Figura 4.6: Projeção com  $x'(t)=0$  em um intervalo.

Assim, em um mergulho suave em  $\mathbb{R}^3$ , que é uma imersão genérica de classe  $C^1$ ,  $x'(t)$  anula-se somente em pontos isolados. Desse fato, concluímos que pontos cúspides são pontos isolados. Além disso, para estes pontos isolados existe uma reta tangente bem definida na projeção frontal. O que nos dá uma nova propriedade:

**P2** - *Projeções frontais de nós legendreanos genéricos podem ser parametrizadas por uma aplicação, que é uma imersão exceto em um número finito de pontos bem definidos por retas tangentes. Tais pontos são ditos cúspides generalizadas.*

Da discussão anterior concluímos que P1 e P2 caracterizam projeções frontais de um nó legendreano genérico. Em particular, qualquer aplicação

$$f : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

$$t \longmapsto (x_f(t), y_f(t), z_f(t)),$$

tal que

$$f_{\pi_F} : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

$$t \longmapsto (x_f(t), z_f(t))$$

satisfaz P1 e P2, e não possui pontos duplos com tangência, representa um nó legendreano, desde que estas condições definam  $y_f(t)$  pela Equação 4-1. As-

sim a imagem da aplicação  $f(t) = (x_f(t), y_f(t), z_f(t))$  será um nó legendreano .

Resumindo as propriedades P1 e P2 em termos de diagramas de nós, dizemos que um diagrama de nó que:

- (1) não tem tangentes verticais,
- (2) os únicos pontos não suaves são cúspides generalizadas,
- (3) só possui pontos duplos transversais,

representa a projeção frontal de um nó legendreano.

Para que a condição (3) se torne clara, lembremos que assumimos anteriormente que o eixo  $y$  positivo “entra” na página.

**Exemplo 4.3.2** Nas Figuras 4.7, 4.8 e 4.9, mostramos diagramas frontais de nós legendreanos.

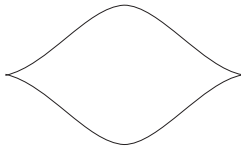


Figura 4.7: Nó trivial

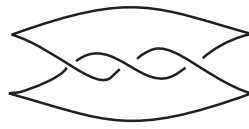


Figura 4.8: Nó trevo

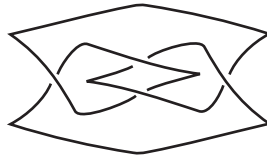
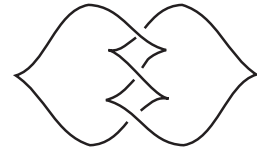


Figura 4.9: Nó figura oito

As informações obtidas até o momento são suficientes para responder algumas das indagações do início do capítulo. Somos capazes agora de fazer a seguinte afirmação.

**Proposição 4.3.3** *Para todo nó topológico existe um nó legendreano  $C^0$  próximo a ele. Em particular, existem nós legendreanos representando qualquer tipo de nó topológico.*

Antes de provarmos esta proposição, esclarecemos que, dizer que um nó  $L$  é  $C^0$  próximo a um nó  $M$  significa dizer que o nó  $L$  pode ser aproximado de forma contínua ao nó  $M$ , de forma que, dado  $\epsilon > 0$ , tem-se que

$\sup|L(t) - M(t)| < \epsilon$ , para todo  $t \in [0, 1]$ .

Provemos agora a Proposição 4.3.3.

*Prova.* Considere a estrutura de contato canônica em  $\mathbb{R}^3$ . Seja  $K$  um nó topológico orientado em  $\mathbb{R}^3$  e  $\pi_F(K)$  sua projeção frontal. Agora considere  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  a curva que descreve  $\pi_F(K)$  e  $P$  partição de  $[a, b]$ . Para cada arco,  $\gamma([a_i, b_i])$ , da curva  $\gamma$ , identificamos os cruzamentos e as tangentes verticais, e então, fazemos as modificações conforme as Figuras 4.11, 4.12 e 4.13.

Com o intuito de evitar grande variação na coordenada  $y$  dos nós, determinada pelas projeções, a aproximação em cada arco pode ser feita de tal forma que o coeficiente angular seja próximo a  $y(t) = \frac{z'(t)}{x'(t)}$ ,  $t \in [a_i, b_i]$  do nó  $K$ . Para isso basta procedermos conforme a Figura 4.14, e pela discussão anterior recuperamos o nó legendreano através da sua projeção frontal.

Pelo teorema de Darboux a proposição se estende a qualquer variedade  $M^3$ . ■

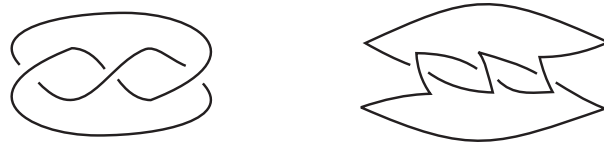


Figura 4.10: Conversão de um diagrama de nó topológico (esquerda) em diagrama frontal de nó legendreano (direita).



Figura 4.11: Conversão em nó legendreano.

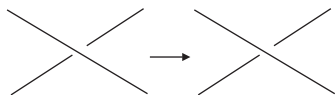


Figura 4.12: Conversão em nó legendreano.

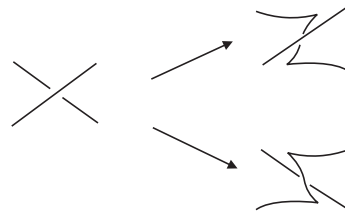


Figura 4.13: Conversão em nó legendreano.

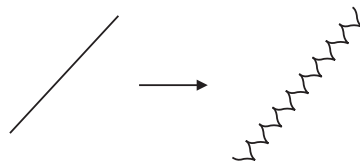


Figura 4.14: Aproximação a um arco legendreano em uma projeção frontal.

Diante da necessidade de deformações contínuas entre nós legendreanos, podemos pensar sobre os movimentos em sua projeção frontal. Para isso, temos um conjunto de movimentos. Assim como os movimentos de Reidemester para nós topológicos, existe um conjunto de movimentos de Reidemester para nós legendreanos. Os movimentos se encontram na Figura 4.15, e incluem os movimentos obtidos pela imagem por reflexão.

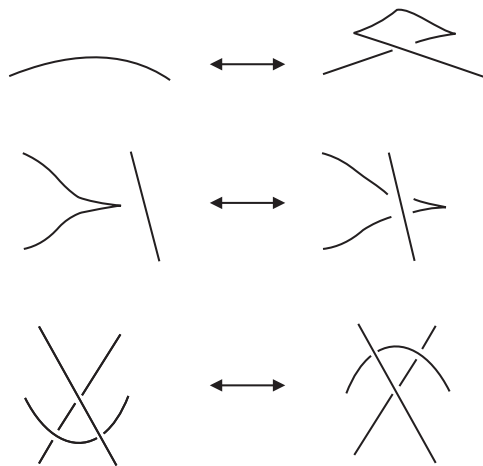


Figura 4.15: Movimentos de Reidemester para projeções frontais de nós legendreanos (incluem as imagens por reflexão).



Figura 4.16: Várias projeções frontal do mesmo nó legendreano.

Uma outra forma de estudar um nó legendreano é através de sua projeção lagrangeana, ou seja, no plano  $xy$ . O estudo através dessa projeção nem sempre é o mais indicado, pois na maioria dos casos as propriedades de um nó legendreano são mais facilmente identificadas em projeções frontais. Contudo sua definição e propriedades seguem na próxima subseção.

## 4.3.2

**Projeção lagrangeana**

Seja  $K$  um nó legendreano na variedade de contato  $(\mathbb{R}^3, \xi_{can})$ . Considere a aplicação

$$\begin{aligned}\pi_L : \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) &\longmapsto (x, y).\end{aligned}$$

A imagem  $\pi_L(K)$  é a projeção lagrangeana de  $K$ . A projeção lagrangeana de um nó é também dito um *diagrama lagrangeano*. Considere  $k_{\pi_L} = \pi_L \circ k$  definida por

$$\begin{aligned}k_{\pi_L} : [0, 1] &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\longmapsto (x(t), y(t)),\end{aligned}$$

então  $k_{\pi_L}$  parametriza  $\pi(K)$ .

Ao contrário da projeção frontal, a projeção lagrangeana é sempre parametrizada por uma imersão. De fato, se  $x'(t_0) = y'(t_0) = 0$  para algum  $t_0 \in [0, 1]$  então  $z'(t_0) \neq 0$ , pois o vetor tangente a  $K$  está na direção  $\frac{\partial}{\partial z}$ , o qual não pode pertencer aos planos da estrutura de contato. Assim qualquer parametrização de  $K$  é uma imersão.

No caso normal, a projeção lagrangeana é suave (não tem cúspides ou outras singularidades diferentes da projeção frontal).

**Definição 4.3.4** *Um nó legendreano  $K$ ,  $K \subset \mathbb{R}^3$ , é dito ser genérico se todas as auto interseções da imersão da curva  $\pi_L(K)$  são pontos duplos transversais.*

Como na projeção frontal, a projeção lagrangeana permite-nos recuperar a estrutura do cruzamento, isto é, recuperar a coordenada  $z$  de  $k$ . Com este objetivo procedemos da seguinte forma.

- 1) Escolha um número  $z_0$  e faça  $z(0) = z_0$ . Então defina:

$$z(t) = z_0 + \int_0^t y(t)x'(t)dt. \quad (4-2)$$

Como o nó legendreano satisfaz a equação 4-1, obtemos

$$z(t) = z_0 + \int_0^t z'(t)dt,$$

o que é uma tautologia. Assim, a única ambiguidade em recuperar o nó  $K$  é a escolha de  $z_0$ .

2) Considere o nó  $G$  dado por

$$g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$t \mapsto (x(t), y(t), z(t)),$$

e a imersão

$$g_{\pi_L} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$g_{\pi_L} = \pi_L \circ g.$$

Devemos fazer algumas observações para que a imersão  $g_{\pi_L}$  seja projeção lagrangeana de um nó legendreano. Se tentarmos definir  $z(t)$  pela Equação 4-2 teremos um problema, pois para  $t \in [0, 1]$ ,  $z(t)$  será uma aplicação bem definida em  $[0, 1]$  somente se,  $z(0) = z(1)$ . Assim, podemos escrever,

$$\int_0^1 y(t)x'(t)dt = 0,$$

e é claro que esta condição não é satisfeita para toda imersão  $g$ . Este é o único impedimento para “levantar”<sup>1</sup> a curva  $g_{\pi_L}$  ao nó  $g$ , cuja imagem  $G$ , é tangente a  $\xi$ .

A condição de integração significa dizer que, se  $G$  é um nó legendreano,  $g_{\pi_L}$  é uma curva fechada no plano  $xy$  e a integral  $\oint_{g_{\pi_L}} ydx$  é a área da curva orientada dada por  $g_{\pi_L}$ . Então, pelo teorema de Stokes, a área deve ser nula, ou ainda, significa dizer que ao “levantar” a curva, ela tem que se fechar.

Afirmamos que a imagem  $G$  será um nó legendreano se  $g$  é um mergulho, e ainda, a única forma desta afirmação não ser válida (e então o mergulho não ser um nó legendreano) é se pontos duplos transversais na imagem de  $g_{\pi_L}$  tiverem a mesma coordenada  $z$  em  $\mathbb{R}^3$ .

Resumindo as conclusões obtidas, fazemos a seguinte afirmação. Recuperamos o nó legendreano  $G$  (bem definido por uma isotopia), a partir da imersão  $g_{\pi_L}$  se,

$$(1) \int_0^1 y(t)x'(t)dt = 0,$$

<sup>1</sup>Entende-se por levantar uma curva no plano  $xy$  a um nó em  $\mathbb{R}^3$ , por obter coordenadas do nó em  $\mathbb{R}^3$ , a partir das coordenadas da curva no plano  $xy$ .

$$(2) \int_{t_0}^{t_1} y(t)x'(t)dt \neq 0, \text{ para todo } t_0 \neq t_1 \text{ tal que } g(t_0) = g(t_1).$$

Infelizmente, essas condições não são fáceis de se interpretar diagramaticamente. Esse é um dos motivos de se trabalhar com projeções frontais ao se estudar nós legendreanos.

A Figura 4.17 mostra os movimentos de Reidemeister para projeção lagrangeana.

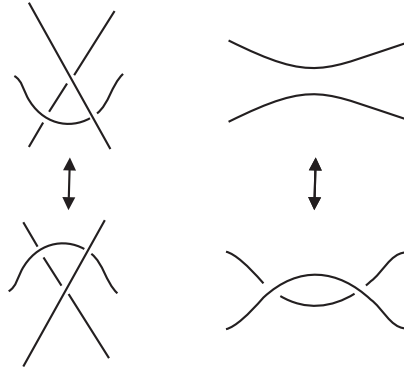


Figura 4.17: Movimentos de Reidemeister para projeções lagrangeanas de nós legendreanos (incluem as imagens por reflexão).

**Observação 4.3.5** *O Proposição 4.3.3 pode ser demonstrado através da projeção lagrangeana. Consideremos  $\gamma : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^2$  a curva que descreve  $\pi_L(K)$ ,  $K$  nó topológico orientado em  $\mathbb{R}^3$  e  $P$  partição de  $[a, b]$ . A aproximação em cada arco,  $\gamma([a_i, b_i])$ , pode ser feita conforme Figura 4.18 e pela discussão anterior recuperamos o nó legendreano através da sua projeção lagrangeana.*



Figura 4.18: Aproximação de um arco topológico a um legendreano pela projeção lagrangeana.

#### 4.4

##### Isotopia legendreana

Ao considerarmos as seções anteriores, somos levados a pensar sobre isotopias entre diagramas de nós legendreanos e, conseqüentemente, entre nós legendreanos.

Na tentativa de classificar nós legendreanos isotópicos podemos fazer diferentes afirmações, as quais serão vistas nesta seção. Apresentamos

aqui duas classificações para nós legendreanos isotópicos e mostramos sua equivalência. No entanto, para um melhor entendimento e facilidade de nosso estudo trabalharemos apenas com uma delas.

Por diferir da isotopia de nós topológicos nos referimos a uma isotopia entre nós legendreanos por *isotopia legendreana* e ainda, por dois nós legendreanos isotópicos por esta isotopia, dizemos que os mesmos são *isotópicos por isotopia legendreana*. Essas definições assim como outros resultados são o motivo de estudo desta seção.

**Definição 4.4.1** *Dois nós legendreanos  $K_0$  e  $K_1$  são isotópicos por isotopia legendreana se existe uma família  $\{K_t, t \in [0, 1]\}$  de nós legendreanos, cujo campo de vetores varia continuamente e nunca se anula, com  $K_0$  sendo o nó inicial e  $K_1$  o nó final.*

Podemos também classificar nós legendreanos isotópicos por isotopia de contato, como na definição seguinte.

**Definição 4.4.2** *Dois nós legendreanos  $K_0$  e  $K_1$  em  $(M, \xi)$  são isotópicos por isotopia de contato se existe uma família a um parâmetro  $\phi_t : M \rightarrow M, t \in [0, 1]$ , de contactomorfismos de  $M$  tal que  $\phi_0 = id$  e  $\phi_1(K_0) = K_1$ .*

**Teorema 4.4.3** *A classificação de nós legendreanos isotópicos por isotopia legendreana é equivalente a classificação por isotopia de contato.*

*Prova.* É clara a implicação que isotopia de contato leva a uma isotopia legendreana. Provemos a outra implicação. Seja  $K_t, t \in [0, 1]$  uma isotopia entre nós legendreanos na variedade de contato  $(M, \xi)$ . Existe uma família de difeomorfismos  $\phi_t : M \rightarrow M, t \in [0, 1]$ , tal que  $\phi_t(K_0) = K_t$ . Além disso, é fácil ver que  $\phi_t^*(\xi|_{K_t}) = \xi|_{K_0}$ . Seja  $\xi_t = \phi_t^*(\xi)$ . Esta é uma família a um parâmetro de estruturas de contato com  $\xi_t = \xi_0$  ao longo de  $K_0$ . Pelo teorema de Gray (4.1), segue que existe uma família de difeomorfismos  $\psi_t$  tal que  $\psi_t^*(\xi_t) = \xi_0$  e  $\psi_t$  é identidade em  $K_0$ . Considere  $f_t = \phi_t \circ \psi_t$ . Notemos que

$$f_t^*(\xi_0) = \psi_t^*(\xi_t) = \xi_0.$$

Assim,  $f_t$  para todo  $t \in [0, 1]$  é um contactomorfismo de  $\xi_0 = \xi$ . Além disso,  $f_t(K_0) = \phi_t(K_0) = K_t$ . ■

De acordo com a Definição 4.4.1, uma isotopia legendreana é uma isotopia através de nós legendreanos. Assim, dois nós legendreanos são ditos isotópicos por esta isotopia se eles são isotópicos através de nós legendreanos.

Podemos ainda dizer que, durante a isotopia quaisquer diagramas do nó (genérico) será um diagrama de um nó legendreano .

A partir deste momento trabalharemos somente com a Definição 4.4.1.

**Teorema 4.4.4** *Dois diagramas frontais representam nós legendreanos isotópicos por isotopia legendreana se, e somente se, eles são relacionados pela sequência de movimentos de Reidemester (Figura 4.15) e isotopia planar.*

Para demonstração ver (38).

**Teorema 4.4.5** *Dois diagramas lagrangeanos representam nós legendreanos isotópicos por isotopia legendreana se seus diagramas são relacionados pela sequência de movimentos de Reidemester (Figura 4.17) e isotopia planar.*

Infelizmente esses movimentos não são suficientes para garantir uma isotopia legendreana, devido a condição da integração discutida na Seção 4.3.2. Então, não basta que a isotopia seja realizada através dos dois movimentos de Reidemester, é necessário que as condições 1) e 2) da Subseção 4.3.2 sejam satisfeitas.

Para estudos de isotopia legendreana, a projeção frontal é mais conveniente, porque nós sabemos precisamente quais diagramas representam projeções frontais de nós legendreanos.