

3

Tangles e nós de 2-pontes

Durante o final dos anos 60 e começo dos anos 70, o objetivo da teoria dos nós era formar uma tábua ¹ completa de nós até um certo número de cruzamentos maior do que a tábua conhecida. Contudo, os invariantes de nós descobertos não foram suficientes para tal objetivo. Portanto, Conway introduziu o conceito de tangle. Usando esta variação em nós, novas classes de nós foram definidas: os nós racionais. Através desta classe de nós, vários problemas locais foram resolvidos, os quais conduziram a um avanço no nível de problemas da teoria de nós. Contudo, desde que existem nós que não são racionais, a classificação completa de nós não pode ser realizada. A introdução destas novas pesquisas teve um significativo impacto na teoria dos nós. Neste capítulo, estudaremos os nós de 2-pontes, que são um tipo especial de nó racional obtido de nós tangles. Para um aprofundamento em teoria dos tangles, sugerimos (21, 6).

3.1

Tangles

Considere a esfera S^2 em $\mathbb{R}^3$ e a bola limitada por S^2 , B^3 , isto é, a bola de dimensão 3, cuja fronteira é S^2 . Em B^3 considere 2 curvas simples α_i , $i=1,2$, cujos 4 pontos extremos estão na superfície S^2 . Se estas curvas, α_i , intersectam S^2 somente nos 4 pontos extremos, obtemos um tangle.

Definição 3.1.1 *Um tangle é um mergulho próprio de dois arcos não orientados em B^3 , tal que os 4 pontos extremos dos arcos estão no bordo de B^3 .*

Se projetarmos este tangle no plano, por exemplo yz , como no caso de um nó, podemos obter uma projeção regular do tangle, ou *diagrama regular* do tangle, Figura 3.4.

Neste capítulo representaremos um tangle T , por seu diagrama regular.

A definição de tangle pode ser generalizada a m curvas, contudo, nosso interesse está no caso $m = 2$. Alguns exemplos de tangles são dados na Figura 3.2. O caso em que existe uma curva fechada no interior de B^3 , Figura 3.2 (c), não será considerado nessa dissertação.

¹Tábua é uma lista de todos os nós, com seus tipos identificados e sem repetições.



Figura 3.1: Tangle

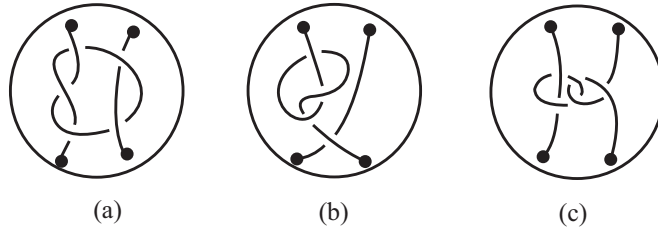


Figura 3.2: Diagramas de tangles.

Agora, fixemos 4 pontos na esfera S^2 , NE, NO, SE, SO, conforme Figura 3.3. Esses pontos podem ser descritos em $\mathbb{R}^3$ pelas coordenadas:

$$\begin{aligned} \text{NE} &= \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \quad \text{NO} = \left(0, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \\ \text{SE} &= \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right), \quad \text{SO} = \left(0, -\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right), \end{aligned}$$

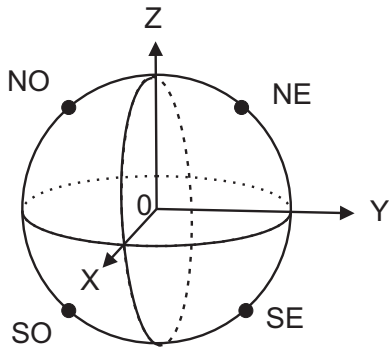


Figura 3.3: Esfera com 4 pontos fixos.

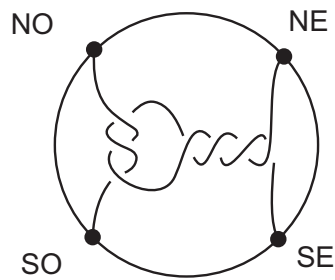


Figura 3.4: Projeção de um tangle.

O nó obtido pela conexão dos pontos NO e NE, SO e SE por curvas simples no complemento de B^3 é chamado de *numerador* e denotado por $N(T)$. Similarmente, o nó obtido da conexão dos pontos NO e SO, NE e SE por curvas simples no complemento de B^3 é chamado de *denominador* e é denotado por $D(T)$, veja a Figura 3.5. A razão para esta terminologia pode

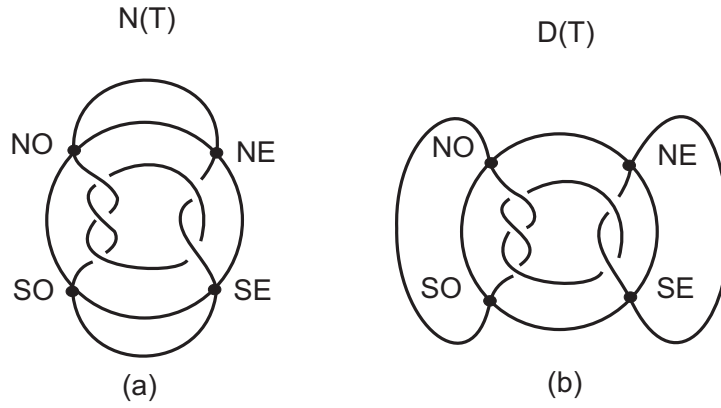


Figura 3.5: Numerador (a) e denominador (b) do tangle T .

ser encontrada em (30) e está relacionada com o conceito de determinante de nós, o qual não abordaremos aqui.

Definição 3.1.2 *Sejam T_1 e T_2 dois tangles em B^3 . Se podemos transformar T_1 em T_2 através dos movimentos de Reidemeister em B^3 , mantendo os pontos (NE, NO, SE, SO) fixos, então T_1 e T_2 são ditos equivalentes.*

3.1.1

Tangles racionais

Considere os tangles mostrados na Figura 3.6; estes tangles são chamados $T(0)$, $T(\infty)$, $T(-1)$ e $T(1)$ respectivamente. Os tangles $T(0)$ e $T(\infty)$ são chamados *tangles triviais*.

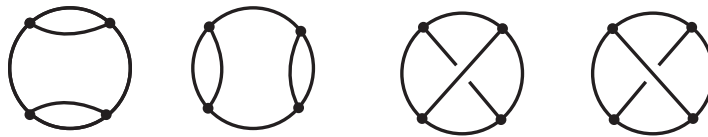


Figura 3.6: Tangles: $T(0)$, $T(\infty)$, $T(-1)$ e $T(1)$, respectivamente.

Definição 3.1.3 *Um tangle racional é um tangle que é a imagem do tangle $T(\infty)$ (ou $T(0)$) por um homeomorfismo que leva B^3 em B^3 e o conjunto $\{NO, NE, SO, SE\}$ no mesmo conjunto.*

Exemplo 3.1.4 *Uma rotação de $\mathbb{R}^3$ sobre o eixo x de um ângulo de $\frac{\pi}{2}$, envia o tangle $T(\infty)$, no tangle $T(0)$. Além disso, $T(0)$ é um tangle trivial. Veja Figura 3.7.*

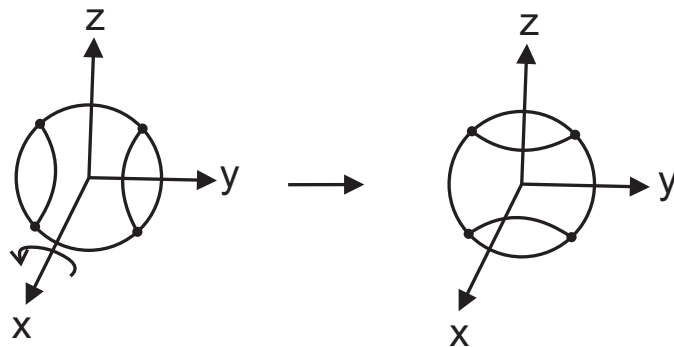


Figura 3.7: Rotação do tangle $T(\infty)$.

Considere a rotação da esfera sobre o eixo z de um ângulo π , mantendo o hemisfério norte e o polo sul fixos. Então, é realizada uma torção tal que SE e SO trocam de posição (Figura 3.8). Tal torção é dita uma *torção vertical*.

Considere a rotação da esfera sobre o eixo y de um ângulo de π , mantendo o hemisfério oeste e ponto $L(0,1,0)$ no equador fixos. Então, é realizada uma torção tal que NE e SE trocam de posição (Figura 3.8). Tal torção é dita uma *torção horizontal*.

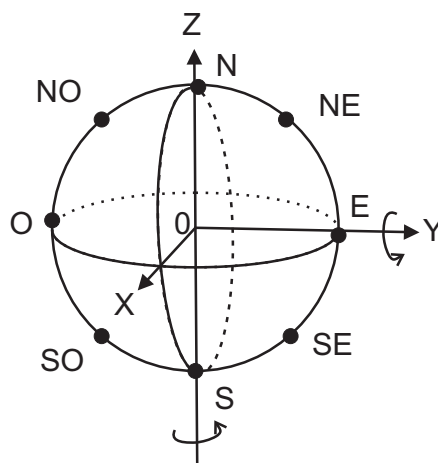


Figura 3.8: Rotação da esfera sobre os eixos z e y .

Atribuímos uma orientação às torções descritas. Os sinais das torções se encontram nas Figuras 3.9 e 3.10.



Figura 3.9: Torção horizontal positiva e negativa, respectivamente.

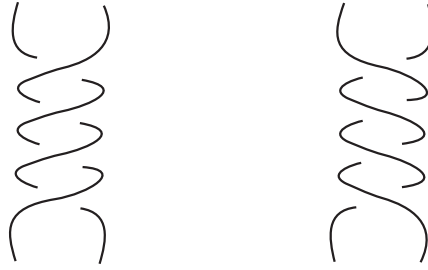


Figura 3.10: Torção vertical negativa e positiva, respectivamente.

Proposição 3.1.5 *Um tangle racional pode ser obtido por uma sequência de torções verticais e horizontais em $T(0)$ ou $T(\infty)$.*

Segue desta proposição que tangles racionais podem ser completamente determinados por movimentos que alternam em torções horizontais e verticais. Expressaremos o nó racional obtido por esta sequência de torções por $T(a_1, a_2, \dots, a_n)$, onde a_i é torção do tangle; e seu *diagrama* é dito estar *em forma racional*. Explicaremos com poucos detalhes como ocorre esta sequência.

Se n é ímpar, obtemos a expressão $T(a_1, a_2, \dots, a_n)$, onde a_1 é torção horizontal em $T(0)$, a_2 é torção vertical, a_3 é torção horizontal e assim alternadamente até a_n torção horizontal.

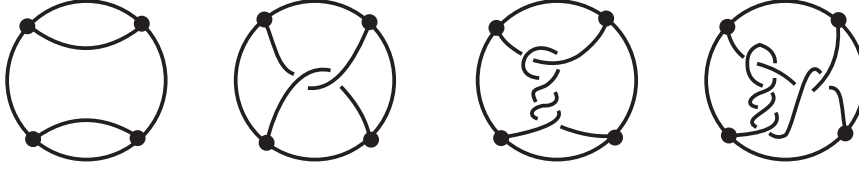
Se n é par, obtemos a expressão $T(a_1, a_2, \dots, a_n)$ onde a_1 é torção vertical em $T(\infty)$, a_2 é torção horizontal, a_3 é torção vertical e assim alternadamente até a_n torção horizontal.

Se um tangle $T(a_1, a_2, \dots, a_n)$ tem todos os a_i 's com o mesmo sinal, então dizemos que o *tangle* T é *alternado* e o diagrama regular obtido é um *diagrama alternado*.

Exemplo 3.1.6 *Considere o tangle $T(\infty)$. Fazendo 3 torções verticais e depois -4 torções horizontais, obtemos o tangle $T(3, -4)$ (Figura 3.4). Note que n é par e, portanto, a primeira torção é vertical.*

Exemplo 3.1.7 *O nó racional $T(-2, -3, -2)$ é obtido do tangle $T(0)$ pela sequência de -2 torções horizontais, -3 torções verticais e -2 torções horizontais, como mostra a Figura 3.11.*

Exemplo 3.1.8 *Um outro exemplo pode ser visto na Figura 3.12, onde temos dois tangles racionais com n par e n ímpar respectivamente.*

Figura 3.11: Construção do tangle $T(-2, -3, -2)$.**Proposição 3.1.9** *A fração contínua*

$$[a_1, a_2, a_3, \dots, a_n] = a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \frac{1}{a_4 + \dots + \frac{1}{a_{n-1} + \frac{1}{a_n}}}}}$$

com os a_i 's $\neq 0$, determina um tangle racional $T(a_1, a_2, \dots, a_n)$ e um número racional $\frac{p}{q}$, chamado fração do tangle.

Seja o número racional $\frac{p}{q}$. Façamos $r_0 = p$, $r_1 = q$ e consideremos:

$$\begin{aligned} r_0 &= a_1 r_1 + r_2 \\ r_1 &= a_2 r_2 + r_3 \\ &\vdots \\ r_{n-1} &= a_n r_n + 0, \quad |r_n| = 1. \end{aligned} \tag{3-1}$$

Sendo $0 \leq r_i < r_{i-1}$, a equação 3-1 descreve um algoritmo euclidiano que é unicamente definido por $p = r_0$ e $q = r_1$. Tal algoritmo pode ser expressado por uma fração contínua, descrita na Proposição 3.1.9.

Os inteiros a_i são chamados de quocientes da fração contínua. Da desigualdade $0 < |r_n| < |r_{n-1}|$, segue que $|a_n| \geq 2$. Além disso, para a fração contínua $[a_1, a_2, \dots, a_n]$ podemos sempre considerar n ímpar. De fato, se n é par e $a_n > 1$ então escrevemos

$$[a_1, a_2, \dots, a_n] = [a_1, a_2, \dots, a_n - 1, 1],$$

se $a_n = 1$, escrevemos

$$[a_1, a_2, \dots, a_n] = [a_1, a_2, \dots, a_{n-1} + 1],$$

pois $a_n \pm 1 + \frac{1}{\mp 1} = a_n$.

Proposição 3.1.10 *Seja $\frac{p}{q}$ um número racional. Então*

- (i) *existem $a_1 \in \mathbb{Z}$, $a_2, a_3, \dots, a_n \in \mathbb{Z} - \{0\}$ tais que $\frac{p}{q} = [a_1, a_2, \dots, a_n]$.*
- (i) $\frac{p}{q} \pm 1 = [a_1 \pm 1, a_2, \dots, a_n]$,
- (ii) $\frac{q}{p} = [0, a_1, a_2, \dots, a_n]$.
- (iii) $-\frac{p}{q} = [-a_1, -a_2, \dots, -a_n]$.

Para mais informações sobre frações contínuas, ver Apêndice A.2.

Observação 3.1.11 *O tangle racional $T^*(-a_1, -a_2, \dots, -a_n)$ é imagem por reflexão do nó $T(a_1, a_2, \dots, a_n)$.*

Podemos observar que na imagem por reflexão de um nó (em relação a um plano) a torção muda, e, portanto, verificamos a Observação 3.1.11.

O próximo teorema, enunciado em (6) e demonstrado em detalhes em (21), mostra que existe uma boa correspondência entre números racionais e tangles racionais (incluindo ∞).

Teorema 3.1.12 *Existe uma correspondência bijetora entre o conjunto de todos os números racionais (incluindo ∞) e a classe de tangles racionais. Em outras palavras, se os tangles racionais $T(a_1, a_2, \dots, a_n)$ e $T(b_1, b_2, \dots, b_n)$ têm suas frações contínuas $[a_1, a_2, \dots, a_n]$ e $[b_1, b_2, \dots, b_n]$ representando o mesmo número racional, então os tangles são equivalentes. A afirmação inversa também é verdadeira.*

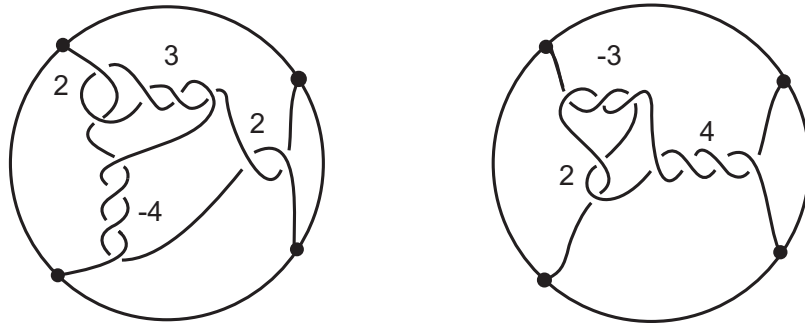


Figura 3.12: Tangles $T(2,3,-4,2)$ e $T(-3,2,4)$ respectivamente.

Em particular a fração do tangle $T(0)$ é $[0]$, e a fração do tangle $T(\infty)$ é $[0,1] = 0 + \frac{1}{0}$, que é denotada por ∞ .

Definição 3.1.13 *Uma fração contínua $[a_1, a_2, \dots, a_n]$ e um tangle racional $T(a_1, a_2, \dots, a_n)$ são ditos estar em forma canônica se todos os a_i 's tem o mesmo sinal (isto é, T é alternado) e n é ímpar.*

Exemplo 3.1.14 *Seja o tangle racional $T(2, -3, 5)$. Sua fração contínua determina o número racional $\frac{23}{14} = [2, -3, 5]$. Mas $\frac{23}{14} = [1, 1, 1, 1, 4]$, assim T é isotópico ao tangle cuja fração contínua é $[1, 1, 1, 1, 4]$, tal tangle é a forma canônica de T . Dizemos ainda que $[1, 1, 1, 1, 4]$ é a fração contínua em forma canônica de T .*

Lema 3.1.15 (Ver (22)) *Todo tangle racional é isotópico a um tangle em forma canônica.*

Lema 3.1.16 *Dada uma fração contínua $[a_1, a_2, \dots, a_n]$ existe uma única fração contínua $[b_1, b_2, \dots, b_m]$ em forma canônica com o mesmo número racional.*

A demonstração em detalhes do Teorema 3.1.12 se encontra em (22). Contudo, daremos aqui uma breve idéia da mesma.

Prova. Primeiramente demonstremos que se dois nós são isotópicos então eles têm as frações contínuas representando o mesmo número racional. Sejam T e S dois tangles racionais isotópicos, e T' e S' sua respectivas formas canônicas, que garantimos existir pelo lema 3.1.15. Isso corresponde a levar as frações contínuas de T e S nas frações contínuas de T' e S' . Agora os tangles T' e S' são alternados e isotópicos, e como demonstrado em (22), eles diferem apenas por rotações horizontais e verticais de um ângulo π . Então se dois nós diferem por rotação, eles têm a mesma fração contínua, portanto a mesma fração. Assim, os nós T e S tem a mesma fração contínua.

Inversamente, mostremos que se dois tangles racionais possuem suas frações contínuas representando números racionais iguais, então eles são isotópicos. De fato, sejam $T(a_1, a_2, \dots, a_n)$ e $S(b_1, b_2, \dots, b_m)$ dois tangles racionais com frações $[a_1, a_2, \dots, a_n] = \frac{p}{q} = [b_1, b_2, \dots, b_m]$ e $T'(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k)$ e $S'(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t)$ suas formas canônicas. Da implicação anterior deste teorema, temos a igualdade das frações contínuas $[\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k] = [a_1, a_2, \dots, a_n] = [b_1, b_2, \dots, b_m] = [\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t] = \frac{p}{q}$. Pelo Lema 3.1.16, a fração $\frac{p}{q}$ tem uma única expansão em fração contínua em forma canônica $[\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_r]$. Isto nos dá um tangle racional Q , que é unicamente determinado pelos inteiros $\{\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_r\}$. Afirmamos que $Q = T'$ (similarmente $Q = S'$). De fato, se Q é diferente de T' temos duas diferentes expansões em frações contínuas em forma canônica dada pelo mesmo número racional, $[\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k] = \frac{p}{q} = [\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_r]$. Mas isso contradiz a unicidade da forma canônica de frações contínuas, Lema 3.1.16. ■

Façamos alguns comentários sobre o Teorema 3.1.12. O Teorema 3.1.12 nos diz que números racionais são representados bijectivamente por tangles

racionais; seus negativos são representados pelas imagens por reflexão dos tangles racionais. O teorema diz também que a forma canônica de um tangle racional é única, desde que a correspondente forma canônica de sua fração contínua seja única. Outra observação, é que levar um tangle racional em sua forma canônica é o mesmo que calcular sua fração contínua e expressar em forma canônica. Essa forma canônica nos dá o tangle em forma canônica, que, pelo Teorema 3.1.12 é isotópico ao inicial.

3.2

Nós de 2-pontes

O conjunto de nós (ou enlases) de 2-pontes, introduzido por Schubert em 1954, é uma família de nós que tem íntima relação com tangles racionais, e como o próprio nome implica, possuem 2 pontes. O conjunto dos nós de 2-pontes tem sido completamente classificado, mas a característica local desses nós é ainda uma importante área de pesquisa.

Nessa dissertação, consideraremos somente nós de 2-pontes com o número de torções ímpar, salvo em caso mencionado.

Entendemos por *nó de 2-pontes*, um nó não trivial que admite um diagrama com quatro tangentes verticais: duas a esquerda e duas a direita (Figura 3.13). Observe que pelo fato de um nó de 2-pontes possuir somente quatro tangentes verticais, o diagrama regular do nó pode ser considerado como o diagrama regular reduzido, como na Figura 3.13 (a). A definição precisa de nós de m -pontes é dada em 2.7.

Nosso objetivo nesta seção é mostrar a relação entre nós de 2-pontes e tangles racionais. Nesta seção consideraremos somente nós não orientados.

Teorema 3.2.1 (1) *Um nó (ou enlace) de 2-pontes é o denominador de algum tangle racional.*

(2) *O denominador de um tangle racional é um nó (ou enlace) 2-pontes.*

Prova. (1) Considere um diagrama regular D , de um nó (ou enlace) de 2-pontes. Sendo D um diagrama regular de 2-pontes, o seu diagrama é equivalente a Figura 3.13 (a).

Nossa intenção é mover os pontos de cruzamento da parte inferior do diagrama (Figura 3.13(a)) para a parte superior ou centro do diagrama. Do fato de que a prova do teorema não depende da orientação, então não nos importaremos com os cruzamentos positivos e negativos, e denotaremos o

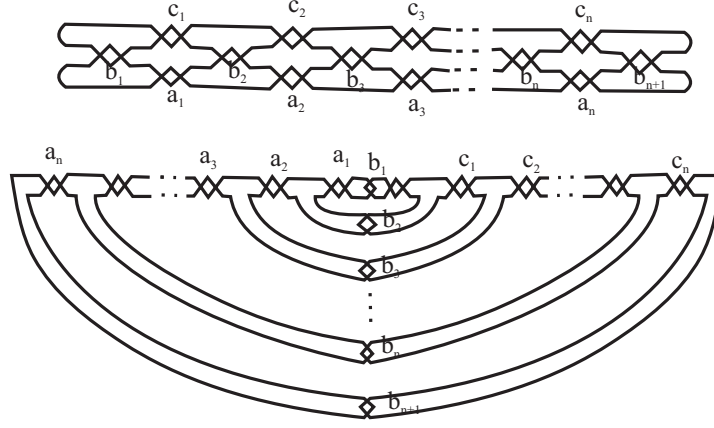


Figura 3.13: (a) - Diagrama regular de um nó de 2-pontes. (figura superior) (b) - Diagrama obtido de (a) por isotopia. (figura inferior)

número de pontos de cruzamentos por a_i , b_j , c_k , incluindo a possibilidade de que algum dos a_i , b_j , c_k seja igual a zero.

Agora fazemos uma modificação no Diagrama 3.13 (a) para que ele se torne o diagrama da Figura 3.13 (b). Por conveniência, denotemos o diagrama D da Figura 3.13 (b) pela seguinte notação:

$$D = (a_1, a_2, \dots, a_n | b_1, b_2, \dots, b_n, b_{n+1} | c_1, c_2, \dots, c_n).$$

Queremos agora mover os pontos de cruzamento $a_1, a_2, \dots, a_n$ da esquerda para a direita. Em outras palavras, queremos mostrar que o diagrama D pode ser transformado no diagrama

$$(0, 0, \dots, 0 | b_1, b_2, \dots, b_n, b_{n+1} | a_1 + c_1, a_2 + c_2, \dots, a_n + c_n).$$

Por simplicidade, façamos $d_i = a_i + c_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$) e chamemos os ramos meio-circular com b_i pontos de cruzamentos de i -ésimo braço de D.

Primeiro movemos os a_n pontos de cruzamento à esquerda para a direita por torções, ou positivas, ou negativas, do $(n+1)^o$ braço, um número apropriado de vezes. Assim, D é transformado em

$$D_1 = (a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, 0 | b_1, b_2, \dots, b_n, b_{n+1} | c_1, c_2, \dots, d_n)$$

Agora, rotacionamos a_{n-1} vezes (em cada direção) a parte interior da linha pontilhada ao redor do eixo horizontal A, mantendo a parte exterior da linha pontilhada fixa (Figura 3.14). Assim, a_{n-1} pontos de cruzamento tem sido movido para a direita. Tal rotação será chamada de *rotação horizontal*.

Há dois casos a considerar:

(i) Se a_{n-1} é par, então o diagrama resultante é

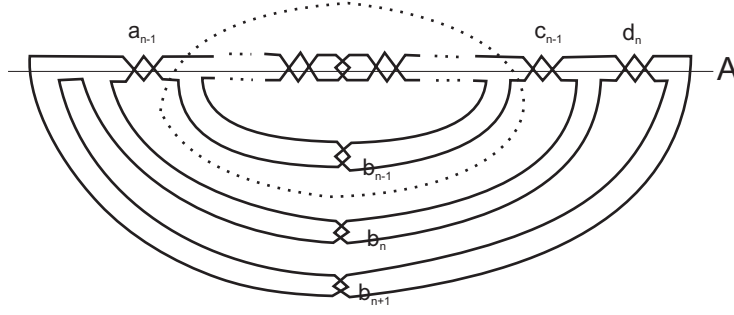


Figura 3.14: Diagrama ilustrando a parte interior da linha pontilhada que será rotacionada ao redor do eixo horizontal A.

$$D_2 = (a_1, a_2, \dots, a_{n-2}, 0, 0 | b_1, b_2, \dots, b_n, b_{n+1} | c_1, c_2, \dots, d_{n-1}, d_n)$$

(ii) Se a_{n-1} é ímpar, então

$$D_2 = (a_1, a_2, \dots, a_{n-2}, 0, 0 | \overline{b_1}, \overline{b_2}, \dots, \overline{b_{n-1}}, b_n, b_{n+1} | c_1, c_2, \dots, c_{n-2}, d_{n-1}, d_n),$$

onde $\overline{b_i}$ significa que o i -ésimo braço com b_i pontos de cruzamentos está acima do eixo horizontal A, como na Figura 3.15.

Agora, para a parte inferior do $(n-1)^{\text{o}}$ braço, formamos um novo braço $(n-1)^{\text{o}}$ horizontal (sem pontos cruzamentos) abaixo de A, veja Figura 3.16.

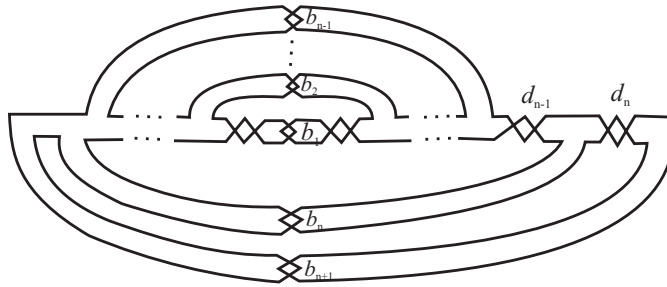


Figura 3.15: Diagrama após rotação horizontal da parte interior da linha pontilhada, Figura 3.14, neste caso a_{n-1} é ímpar.

Rotacionamos b_{n-1} vezes o interior da linha pontilhada, na Figura 3.16, em torno do eixo vertical B, de modo que b_{n-1} cruzamentos acima de A desaparecem, mas b_{n-1} pontos de cruzamentos são criados no braço inferior. Tal rotação será chamada de *rotação vertical*. O diagrama resultante, D_3 é da

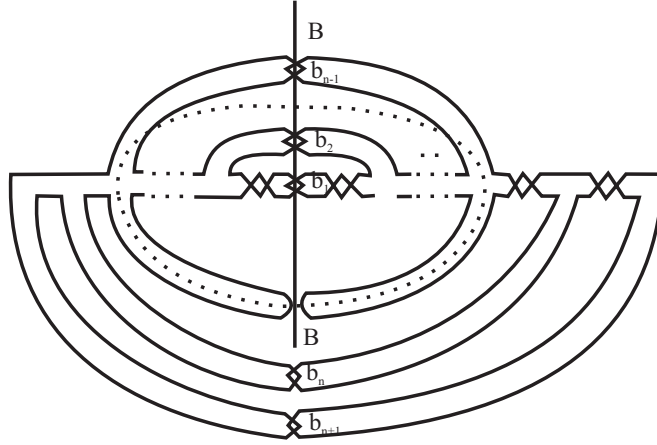


Figura 3.16: Diagrama ilustrando a parte interior da linha pontilhada que será rotacionada ao redor do eixo vertical B.

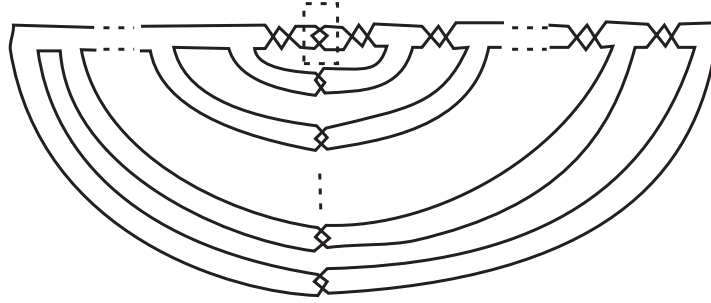


Figura 3.17: Diagrama D_n .

forma:

(i) $D_3 = (a_1, a_2, \dots, a_{n-2}, 0, 0 | b_1, \overline{b_2}, \dots, \overline{b_{n-2}}, b_{n-1}, b_n, b_{n+1} | c_1, c_2, \dots, c_{n-2}, d_{n-1}, d_n)$,
se b_{n-1} é par.

(ii) $D_3 = (c_1, c_2, \dots, c_{n-2}, 0, 0 | b_1, \overline{b_2}, \dots, \overline{b_{n-2}}, b_{n-1}, b_n, b_{n+1} | a_1, a_2, \dots, a_{n-2}, d_{n-1}, d_n)$,
se b_{n-1} é ímpar.

Através de repetidas aplicações de rotações horizontais e verticais um número apropriado de vezes, eventualmente obtemos um novo diagrama (Figura 3.17),

$$D_n = (a_1, 0, \dots, 0 | b_1, b_2, \dots, b_{n+1} | c_1, d_2, \dots, d_n)$$

ou

$$D_n = (c_1, 0, \dots, 0 | b_1, b_2, \dots, b_{n+1} | a_1, d_2, \dots, d_n).$$

É fácil mover os pontos de cruzamento a_1 ou c_1 da esquerda para a direita por uma rotação horizontal no interior do quadrado pontilhado. Assim, o Teorema 3.2, item (1) está provado.

Inversamente, podemos facilmente ver que o denominador de um tangle

racional tem um diagrama regular que é o diagrama regular padrão de um nó 2-pontes, tal como no exemplo, figura 3.18. ■

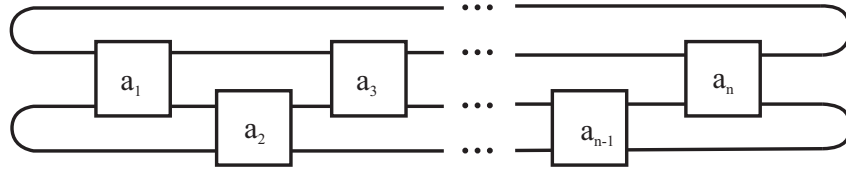


Figura 3.18: n ímpar

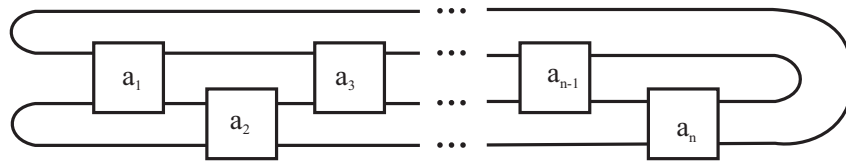


Figura 3.19: n par

De acordo com este teorema, os nós 2-pontes são frequentemente chamados *nós racionais*.

Dizemos que um nó 2-pontes que tem um diagrama regular na forma da Figura 3.18 está em sua *forma racional* e denotaremos este nó por $C(a_1, a_2, \dots, a_n)$. Convencionaremos o diagrama regular, Figura 3.18, como o *diagrama regular padrão* para um nó de 2-pontes.

Um diagrama em forma racional corresponde ou a um nó trivial ou a um nó de 2-pontes. Pela classificação de nós de 2-pontes (37), qualquer enlace de 2-pontes tem um diagrama em forma racional.

Consideremos o diagrama de um nó de 2-pontes e o diagrama equivalente em forma regular padrão, como mostra a Figura 3.20. Observemos que no diagrama regular padrão do nó de 2-pontes, as torções a_k com k ímpar correspondem às torções horizontais e as torções a_k com k par correspondem às torções verticais no diagrama original. Lembremos que estamos considerando n ímpar. Notemos também que no diagrama padrão do nó de 2-pontes obtemos as torções a'_i s com i par, com os sinais de torção opostos ao do diagrama regular inicial; pois para obter o diagrama padrão do nó de 2-pontes rotacionamos as torções verticais para se tornarem horizontais e portanto obtemos sinais opostos. No entanto, faremos a seguinte convenção. Para nós de 2-pontes com diagrama em forma regular padrão, identificaremos os sinais das torções

horizontais (todas são horizontais) e definiremos a fração contínua associada ao nó de 2-pontes como na proposição abaixo.

Proposição 3.2.2 *O nó de 2-pontes $C(a_1, a_2, \dots, a_n)$, com n ímpar, os a_i 's $\neq 0$, e diagrama em forma padrão (Figura 3.18), corresponde a um número racional $\frac{p}{q}$, que tem uma expansão em fração contínua dada por*

$$[a_1, a_2, \dots, a_n] = a_1 + \frac{1}{-a_2 + \frac{1}{a_3 + \frac{1}{-a_4 + \dots + \frac{1}{\dots + \frac{1}{(-1)^{n-1}a_n}}}}}$$

onde $\text{mdc}(p, q) = 1$.

Observe que a alternância de sinais é devido a discussão anterior a Proposição 3.2.2.

Se a_i é um inteiro positivo para todo $i=1\dots n$, então $0 < q < p$. Contudo, se a_i é negativo para todo $i=1 \dots n$, sendo a fração $\frac{p}{q} < -1$, nós podemos assumir que $p > 0$ e $q < 0$. Além disso qualquer nó 2-pontes $C(a_1, a_2, \dots, a_{2k+1})$ corresponde a um número racional $\frac{p}{q}$, onde $-p < q < p$ e $q > 0$.

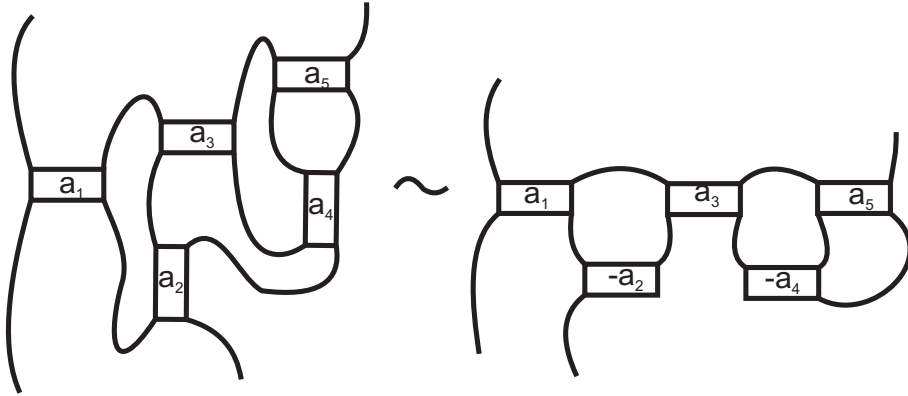


Figura 3.20: Diagrama regular e diagrama regular padrão de um nó de 2-pontes.

Exemplo 3.2.3 *O nó de 2-pontes $C(-2, 3, -2)$, obtido do tangle racional $S(-2, 3, -2)$ (Figura 3.21), possui expansão em fração contínua,*

$$[-2, 3, -2] = -2 + \frac{1}{-3 + \frac{1}{-2}} = -\frac{16}{7},$$

que corresponde a fração racional do tangle racional $T(-2, -3, -2)$, Figura 3.11.



Figura 3.21: Tangle $S(-2, 3, -2)$

Se, de duas diferentes expansões de frações contínuas de $\frac{p}{q}$, nós obtemos diagramas regulares de dois nós de 2-pontes, então eles são diagramas regulares do mesmo nó. Em resumo, dois nós de 2-pontes são completamente classificados por seus números racionais associados, como o seguinte teorema :

Teorema 3.2.4 (Ver (37)) *Sejam K e K' nós de 2-pontes associados aos números racionais $\frac{p}{q}$ e $\frac{p'}{q'}$ respectivamente; então K e K' são equivalentes se, e somente se,*

$$(i) \ p = p', \ q \equiv q' \pmod{p}$$

ou

$$(ii) \ p = p', \ qq' \equiv 1 \pmod{p}.$$

Além disso, a imagem por reflexão K^* de K é um nó 2-pontes associado ao número racional $\frac{p}{-q}$.

A prova deste teorema depende da teoria de espaço de lente, a qual não será abordada nesta dissertação. Para o leitor interessado em teoria de espaço de lente, ver (3). Através deste teorema, Schubert determinou a classificação de nós de 2-pontes, que será de grande importância na demonstração do teorema, capítulo 7.

Teorema 3.2.5 (Ver (37)) (1) *Suponha que invertamos a orientação de uma componente de um enlace de 2-pontes orientado, associado ao número racional $\frac{p}{q}$. Então o enlace 2-pontes orientado resultante está associado aos números racionais:*

$$(i) \ \frac{p}{q-p}, \text{ se } q > 0,$$

$$(ii) \ \frac{p}{q+p}, \text{ se } q < 0.$$

(2) *Dois enlaces de 2-pontes orientados associados aos números racionais $\frac{p}{q}$ e $\frac{p'}{q'}$ são equivalentes com orientação se um dos seguintes caso ocorre.*

- (i) $p = p', q \equiv q' \pmod{2p}$,
- (ii) $p = p', qq' \equiv 1 \pmod{2p}$.

Além disso, essas são condições suficientes para que os nós sejam equivalentes.

3.3

Polinômio de Kauffman para nós 2-pontes

Nosso objetivo nesta seção é encontrar o polinômio de Kauffman para nós de 2-pontes em termos do produto de matrizes. Baseado no trabalho de Lickorish (23), o qual utiliza técnicas elementares de álgebra linear, demonstraremos o seguinte teorema.

Teorema 3.3.1 *Para um nó de 2-pontes, $C(a_1, a_2, \dots, a_n)$, o polinômio R_C de Kauffman é definido por*

$$R_{C(a_1, a_2, \dots, a_n)}(a, x) = av^t M^{a_1-1} S M^{a_2-1} S \dots M^{a_n-1} S w,$$

onde t denota transposta e

$$M = \begin{pmatrix} x & -1 & x \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}, \quad S = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ a & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ e } \omega = \begin{pmatrix} a^{-1} \\ a^{-2} \\ \frac{a^{-2}+1}{x} - a^{-1} \end{pmatrix}.$$

Assim como nas seções anteriores representaremos tangles e nós de 2-pontes por seus diagramas regulares, salvo em caso mencionado. Além disso, consideraremos somente tangles em forma canônica (Definição 3.1.13).

Lembremos que o polinômio de Kauffman de um nó orientado K é definido por $F_K(a, x) = a^{-w(K)} R_K(a, x)$, onde $w(K)$ é o número torção de K e $R_K(a, x)$ é o polinômio de Laurent definido pelas relações dadas na seção 2.8.

Sejam B a bola em $\mathbb{R}^3$ e s tangles com os 4 pontos extremos no bordo, ∂B . Considere $\mathcal{L}(B)$ o módulo livre sobre o anel $\mathbb{Z}[a^{\pm 1}, x^{\pm 1}]$, gerado pelas classes de isotopia regular de tangles racionais não orientados, s , com as condições:

- (i) $s_+ + s_- = x(s_0 + s_\infty)$,
- (ii) $s^+ = as$ e $s^- = a^{-1}s$,

onde s_i e s^i , com $i = +, -, 0, \infty$, tem a projeção idêntica a do tangle original, exceto numa pequena vizinhança do cruzamento do tangle, onde o diagrama

é modificado segundo as Figuras 2.24 e 2.27.

Antes de enunciarmos a próxima proposição, convém lembrar que um nó de 2-pontes é o denominador de algum tangle racional. Esse resultado é importante, pois daqui em diante trabalharemos com o tangle racional, do qual o nó de 2-pontes é obtido.

Proposição 3.3.2 *Seja K um nó de 2-pontes, obtido do tangle racional T . O polinômio, R_K , de Kauffman é invariante pelas relações de $\mathcal{L}(\mathcal{B})$. Portanto, induz uma aplicação $\mathcal{L}(\mathcal{B}) \rightarrow \mathbb{Z}(a^{\pm 1}, x^{\pm 1})$, que leva o tangle não orientado T no polinômio, R_K , de Kauffman, definido em 2.8.*

A demonstração dessa proposição pode ser encontrada em (23).

Denotemos por A_m , $m \in \mathbb{Z}$, o elemento de $\mathcal{L}(\mathcal{B})$ representado pelo tangle não orientado, como mostra a Figura 3.22, com m cruzamentos se m é positivo e com $|m|$ cruzamentos se m é negativo; A_∞ também é mostrado na Figura 3.22. Seja $T(a_1, a_2, \dots, a_n)$ o elemento de $\mathcal{L}(\mathcal{B})$ representado pelo tangle racional, como na Figura 3.22, com n tangles iguais a A_{a_i} , $i=1, \dots, n$, onde a_i é o número de torção contando seus sinais.

Inserindo o tangle T numa bola, como mostra a Figura 3.23, produzimos um nó de 2-pontes, $C(a_1, a_2, \dots, a_n)$, associado ao número racional $\frac{p}{q}$, com expansão em fração contínua

$$[a_1, a_2, \dots, a_n] = a_1 + \frac{1}{-a_2 + \frac{1}{a_3 + \frac{1}{-a_4 + \ddots + \frac{1}{\cdots + \frac{1}{(-1)^{n-1}a_n}}}}}$$

onde $\text{mdc}(p, q) = 1$.

Demonstração do Teorema 3.3.1

Prova. Considere um nó de 2-pontes em forma racional, obtido do tangle racional $T(a_1, a_2, \dots, a_n)$, com n tangles iguais a A_{a_i} , $i=1, \dots, n$, veja Figura 3.22. Aplicando as relações de $\mathcal{L}(\mathcal{B})$ para um dos cruzamentos de A_m com $a_i = m$, fazemos a seguinte afirmação:

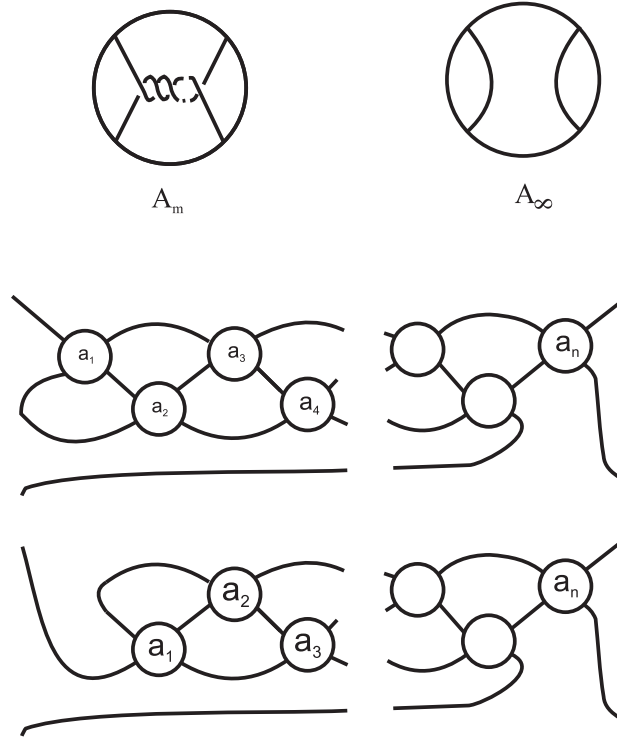


Figura 3.22: Diagramas de tangles A_m , A_∞ e $T(a_1, a_2, \dots, a_n)$ com n ímpar e n par respectivamente.

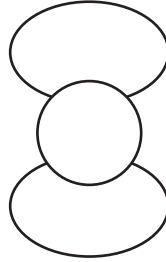


Figura 3.23: Nó racional obtido do tangle T inserido na bola (denominador do T).

Afirmção 3.3.3 Considere o tangle de A_m (Figura 3.22). Então aplicando as relações de $\mathcal{L}(B)$ para um dos cruzamentos do diagrama de A_m , temos

$$A_m + A_{m-2} = x(A_{m-1} + a^{m-1}A_\infty) \quad (3-2)$$

para todo $m \in \mathbb{Z}$.

Prova. Suponha $m > 0$ e p o cruzamento do diagrama de A_m a ser aplicado as relações de $\mathcal{L}(B)$. Suponha p o primeiro cruzamento. Pelas relações de $\mathcal{L}(B)$, temos a relação $(A_m)_+ + (A_m)_- = x((A_m)_0 + (A_m)_\infty)$.

Observe que o diagrama $(A_m)_-$ inverte a posição dos fios do cruzamento p em A_m , assim A_m perde dois cruzamentos e portanto, obtemos A_{m-2} . Agora, note que, $(A_m)_0$ elimina o cruzamento em A_m e portanto, obtemos A_{m-1} . Além disso, para eliminar a torção resultante de $(A_m)_\infty$ produzimos $(m-1)$ torções e,

obtemos $a^{m-1}A_\infty$ (Proposição 2.8.5 (v)). Os diagramas podem ser vistos nas Figuras 3.24, 3.25 e 3.26. Assim, concluímos a relação

$$A_m + A_{m-2} = x(A_{m-1} + a^{m-1}A_\infty).$$

Analogamente verificamos para $m < 0$ e para o caso $m=0$ é imediato. ■

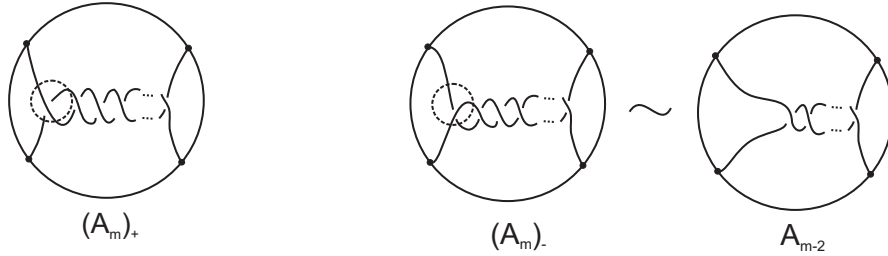


Figura 3.24:

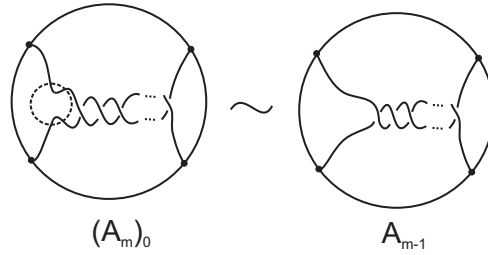


Figura 3.25:

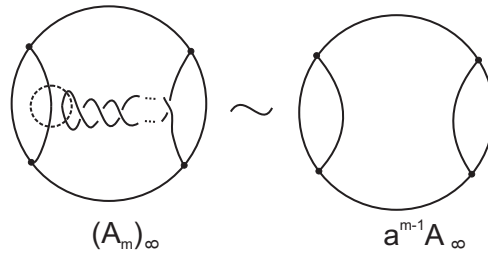


Figura 3.26:

Colocando a Equação 3-2 em forma de matrizes, obtemos:

$$\begin{pmatrix} A_m \\ A_{m-1} \\ a^m A_\infty \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} A_{m-1} \\ A_{m-2} \\ a^{m-1} A_\infty \end{pmatrix}, \quad (3-3)$$

com M definida no Teorema 3.3.1. Façamos,

$$M \begin{pmatrix} A_1 \\ A_0 \\ aA_\infty \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xA_1 - A_0 + axA_\infty \\ A_1 \\ a^2A_\infty \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_2 \\ A_1 \\ a^2A_\infty \end{pmatrix}$$

$$M.M \begin{pmatrix} A_1 \\ A_0 \\ aA_\infty \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} A_2 \\ A_1 \\ a^2A_\infty \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xA_2 - A_1 + a^2xA_\infty \\ A_2 \\ a^3A_\infty \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_3 \\ A_2 \\ a^3A_\infty \end{pmatrix}$$

$$M.M.M \begin{pmatrix} A_1 \\ A_0 \\ aA_\infty \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} A_3 \\ A_2 \\ a^3A_\infty \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xA_3 - A_2 + a^3xA_\infty \\ A_3 \\ a^4A_\infty \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_4 \\ A_3 \\ a^4A_\infty \end{pmatrix}.$$

Procedendo $(m-1)$ vezes, obtemos.:

$$\begin{pmatrix} A_m \\ A_{m-1} \\ a^m A_\infty \end{pmatrix} = M^{m-1} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_0 \\ aA_\infty \end{pmatrix} \quad (3-4)$$

$$\begin{pmatrix} A_m \\ A_{m-1} \\ a^m A_\infty \end{pmatrix} = M^{m-1} S \begin{pmatrix} A_\infty \\ A_1 \\ A_0 \end{pmatrix} \quad (3-5)$$

Agora, nosso intuito é estender a Equação 3-5 para o tangle racional $T(a_1, a_2, \dots, a_n)$.

Afirmção 3.3.4 *Considere o tangle racional, $T(a_1, a_2, \dots, a_n)$. Aplicando as relações de $\mathcal{L}(B)$ nos cruzamentos do diagrama do tangle T obtemos:*

$$\begin{pmatrix} T(a_1, a_2, \dots, a_n) \\ T(a_1 - 1, a_2, \dots, a_n) \\ a^{a_1} T(a_2, a_3, \dots, a_n) \end{pmatrix} = M^{a_1-1} S M^{a_2-1} S \dots M^{a_n-1} S M^{a_n-1} S \begin{pmatrix} A_\infty \\ A_1 \\ A_0 \end{pmatrix}$$

Prova. Considere o tangle racional $T(a_1, a_2, \dots, a_n)$ (Figura 3.22). Aplicando as relações de $\mathcal{L}(B)$ em um dos cruzamentos do diagrama de A_{a_1} , obtemos a Equação 3-4, com $m=a_1$. Agora, relacionamos o tangle $T(a_1, a_2, \dots, a_n)$, após as modificações em A_{a_1} , com a Equação 3-4, para $m=a_1$

Observe que, se não alterarmos A_{a_1} , mantemos o tangle $T(a_1, a_2, \dots, a_n)$; e para o tangle A_{a_1} menos um cruzamento, A_{a_1-1} , temos o tangle $T(a_1 - 1, a_2, \dots, a_n)$. Agora, note que, para $a^{a_1}A_{a_1}$, obtemos o tangle $a^{a_1}T(a_2, \dots, a_n)$.

Para o caso em que $a_1 = 1$, eliminamos o único cruzamento (positivo) em A_{a_1} por uma torção negativa em a_2 , o que diminui a_2 em uma unidade, e assim obtemos $T(a_2 - 1, \dots, a_n)$, veja Figura 3.27. Se $a_1 = \infty$ temos o tangle $T(a_2, \dots, a_n)$, conforme Figura 3.29. Agora, se $a_1 = 0$, eliminamos A_{a_2} desfazendo a torção a_2 e obtemos o tangle $a^{a_2}T(a_3, \dots, a_n)$, como na Figura 3.28.

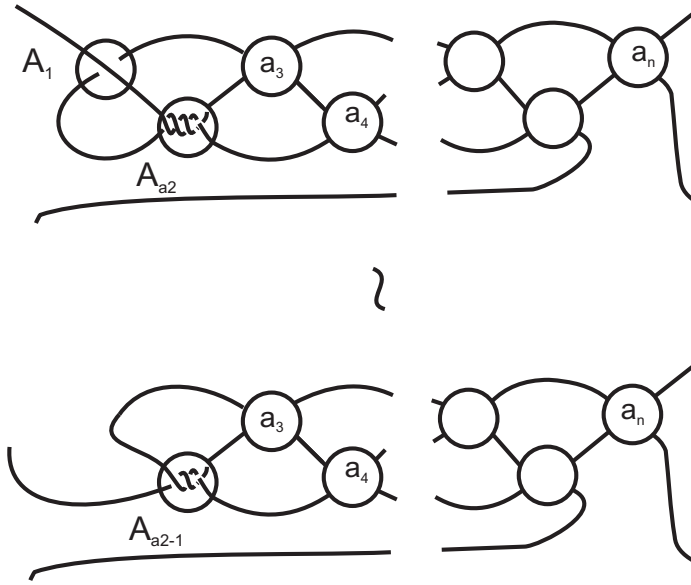


Figura 3.27: Tangle $T(a_2 - 1, \dots, a_n)$.

Agora podemos escrever a Equação 3-4 da seguinte forma:

$$\begin{pmatrix} T(a_1, a_2, \dots, a_n) \\ T(a_1 - 1, a_2, \dots, a_n) \\ a^{a_1}T(a_2, a_3, \dots, a_n) \end{pmatrix} = M^{a_1-1} \begin{pmatrix} T(a_2 - 1, a_3, \dots, a_n) \\ a^{a_2}T(a_3, a_4, \dots, a_n) \\ aT(a_2, a_3, \dots, a_n) \end{pmatrix}$$

$$= M^{a_1-1} S \begin{pmatrix} T(a_2, a_3, \dots, a_n) \\ T(a_2 - 1, a_3, \dots, a_n) \\ a^{a_2}T(a_3, a_4, \dots, a_n) \end{pmatrix} \quad (3-6)$$

Usando a Equação 3-6, fazemos o (n-1) iterado.

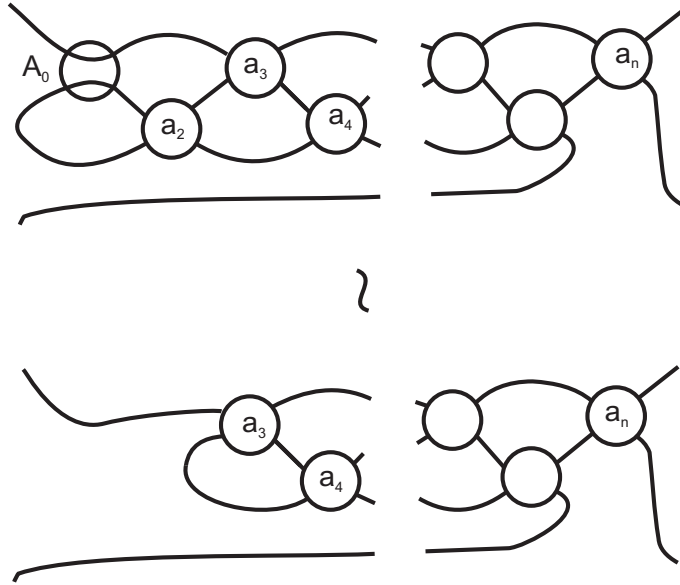


Figura 3.28: Tangle $a^{a_2}T(a_3, \dots, a_n)$.

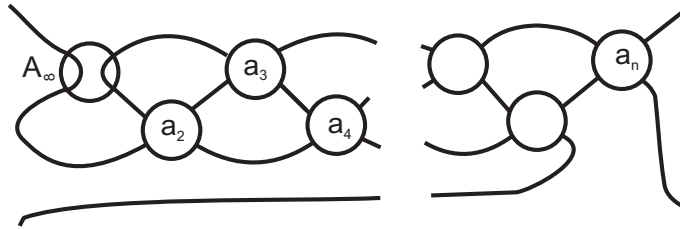


Figura 3.29: Tangle $T(a_2, \dots, a_n)$.

$$\begin{pmatrix} T(a_1, a_2, \dots, a_n) \\ T(a_1 - 1, a_2, \dots, a_n) \\ a^{a_1}T(a_2, a_3, \dots, a_n) \end{pmatrix} = M^{a_1-1} S \begin{pmatrix} T(a_2, a_3, \dots, a_n) \\ T(a_2 - 1, a_3, \dots, a_n) \\ a^{a_2}T(a_3, a_4, \dots, a_n) \end{pmatrix}$$

$$= M^{a_1-1} S M^{a_2-1} S \begin{pmatrix} T(a_3, \dots, a_n) \\ T(a_3 - 1, \dots, a_n) \\ a^{a_3}T(a_4, a_5, \dots, a_n) \end{pmatrix}$$

$\vdots$

$$= M^{a_1-1} S M^{a_2-1} S \dots M^{a_{n-2}-1} S \begin{pmatrix} T(a_{n-1}, a_n) \\ T(a_{n-1} - 1, a_n) \\ a^{a_{n-1}}T(a_n) \end{pmatrix} \quad (3-7)$$

$$= M^{a_1-1} S M^{a_2-1} S \dots M^{a_{n-2}-1} S M^{a_{n-1}-1} S \begin{pmatrix} T(a_n) \\ T(a_n - 1) \\ a^{a_n} \end{pmatrix} \quad (3-8)$$

Observe que,

$$\begin{pmatrix} T(a_n) \\ T(a_n - 1) \\ a^{a_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{a_n} \\ A_{a_n-1} \\ a^{a_n} A_\infty \end{pmatrix},$$

então pela Equação 3-5 temos,

$$\begin{pmatrix} T(a_n) \\ T(a_n - 1) \\ a^{a_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{a_n} \\ A_{a_n-1} \\ a^{a_n} A_\infty \end{pmatrix} = M^{a_n-1} S \begin{pmatrix} A_\infty \\ A_1 \\ A_0 \end{pmatrix},$$

o que implica que

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} T(a_1, a_2, \dots, a_n) \\ T(a_1 - 1, a_2, \dots, a_n) \\ a^{a_1} T(a_2, a_3, \dots, a_n) \end{pmatrix} &= M^{a_1-1} \begin{pmatrix} T(a_2 - 1, a_3, \dots, a_n) \\ a^{a_2} T(a_3, a_4, \dots, a_n) \\ a T(a_2, a_3, \dots, a_n) \end{pmatrix} \\ &= M^{a_1-1} S M^{a_2-1} S \dots M^{a_{n-1}-1} S M^{a_n-1} S \begin{pmatrix} A_\infty \\ A_1 \\ A_0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Assim, demonstramos a Afirmação 3.3.4. ■

Agora, inserimos o tangle $T(a_1, a_2, \dots, a_n)$ na bola B e obtemos o nó de 2-pontes $C(a_1, a_2, \dots, a_n)$ e uma aplicação $\mathcal{L}(B) \rightarrow \mathbb{Z}[a^{\pm 1}, x^{\pm 1}]$, que leva o tangle $T(a_1, a_2, \dots, a_n)$ no polinômio de Laurent, $R_{C(a_1, a_2, \dots, a_n)}$, de Kauffman.

Verificamos através da Proposição 2.8.5, que os polinômios, R_A , de Kauffman, para A_∞ , A_1 , A_0 são iguais a 1, a^{-1} e $\left(\frac{a+a^{-1}}{x} - 1\right)$ respectivamente. Assim, o resultado desejado é dado pela primeira linha do produto de matrizes da Afirmação 3.3.4.

Concluimos, então, que

$$R_{C(a_1, a_2, \dots, a_n)}(a, x) = av^t M^{a_1-1} S M^{a_2-1} S \dots M^{a_n-1} S w,$$

■

Observação 3.3.5 *Observe que para a imagem por reflexão do nó C , o sinal da torção muda e portanto o polinômio de Kauffman é dado por $F_C = \frac{1}{a} w^{(C)} R_C$.*

Dessa forma, segue a fórmula para nós de 2-pontes C^* , que é imagem por reflexão do nó 2-pontes C .

$$R_{C^*(-a_1, -a_2, \dots, -a_n)}(a, x) = \frac{1}{a} v^t M^{-a_1-1} S M^{-a_2-1} S \dots M^{-a_n-1} S w,$$

$$M = \begin{pmatrix} x & -1 & x \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{a} \end{pmatrix}, \quad S = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{a} & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad e \quad \omega = \begin{pmatrix} a \\ a^2 \\ \frac{a^2+1}{x} - a \end{pmatrix}.$$