

## 2 Nós Topológicos

Uma área fascinante da matemática é a teoria dos nós, cuja origem remonta ao final do século XIX e modernamente se insere no campo da topologia algébrica. A teoria dos nós estuda as curvas no espaço, sem auto interseções e fechadas. Em outras palavras, as curvas que são imagens (suaves) de um círculo, no espaço tridimensional.

Apresentaremos neste capítulo as noções básicas de nós topológicos necessárias ao entendimento da dissertação. Uma abordagem mais detalhada destes conteúdos pode ser encontrada em livros específicos (35). Suporemos que o leitor já esteja familiarizado com os conceitos fundamentais de topologia.

O capítulo contém uma base elementar da teoria dos nós. Definimos e discutimos nós e suas classes de equivalência, assim como as projeções regulares dos nós e enfatizamos os movimentos de Reidemeister.

### 2.1 Definições básicas

**Definição 2.1.1** *Um nó  $k$  é um mergulho suave por partes de um círculo no espaço euclidiano de dimensão 3.*

Equivalentemente, podemos dizer que um nó  $k$ , é uma curva  $k : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}^3$  simples fechada, que é imersão por partes.

Nos referiremos a um nó  $k : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $k(t_0) \neq k(t_1)$  se  $t_0 \neq t_1$  exceto  $k(0) = k(1)$ , que é uma imersão de classe  $C^1$  por partes, pela sua imagem  $k([0, 1]) = K$ . É conveniente assumirmos que  $k$  seja suave por partes, ou seja, para uma determinada partição do intervalo  $[0, 1]$ ,  $0 < t_0 < t_1 < \dots < t_k = 1$ , a restrição  $k|_{[t_{i-1}, t_i]} : [t_{i-1}, t_i] \longrightarrow \mathbb{R}^3$  é suave, pois veremos mais a frente que esta consideração evitará certos tipos de nós (nós selvagens), os quais não estudaremos nesta dissertação.

A definição de nó pode ser generalizada da seguinte maneira. Em vez de apenas uma curva fechada no espaço, podemos considerar uma coleção (finita) de curvas disjuntas no espaço, eventualmente enlaçadas entre si.

**Definição 2.1.2** Um enlace é uma coleção finita ordenada de nós  $L_i$ ,  $i \in \mathbb{N}$  que não se intersectam entre si. Cada nó  $L_i$  é dito uma componente do enlace.

Note que nos referindo a um nó pela sua imagem, escrevemos um enlace de  $k$  componentes  $l : \coprod_{i=1}^k [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$  pela sua imagem  $l(\coprod_{i=1}^k [0, 1]) = L$ , o que nos permite escrever  $L = L_1 \cup L_2 \cup \dots \cup L_k$ , onde cada  $L_i$  é um nó.

Nas Figuras 2.1, 2.2 e 2.3 mostramos três desses nós: o *enlace de Hopf*, que são dois círculos enlaçados da maneira mais simples, o *enlace de Whitehead* e o *enlace de Borromean*, sendo os dois primeiros com duas componentes e o terceiro com três. Um outro exemplo é o símbolo das olimpíadas, que é um enlace de 5 componentes.



Figura 2.1: Enlace de Hopf.

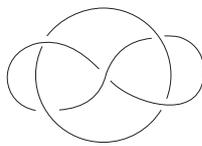


Figura 2.2: Enlace de Whitehead.

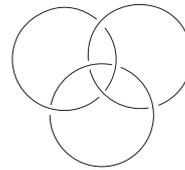


Figura 2.3: Enlace de Borromean.

Note que um nó é um enlace de uma componente. Com o intuito de não haver repetições, nos referiremos a nós durante a dissertação, sabendo-se que os resultados e definições para nós se estendem naturalmente para enlaces.

## 2.2

### Equivalência de nós

O problema central da teoria do nós é classificá-los. Classificar significa saber listá-los todos (mesmo que sejam em número infinito, como é o caso), sem que haja uma isotopia (Definição 2.2.1) entre eles, e saber dizer, para cada curva, qual nó dessa lista ela representa. Isto implica, em particular, ter critérios para dizer se duas curvas são, ou não são, equivalentes (Definição 2.2.3).

A teoria considera como equivalentes, duas curvas tais que uma pode ser deformada continuamente de tal forma a ficar idêntica à outra, sem que no

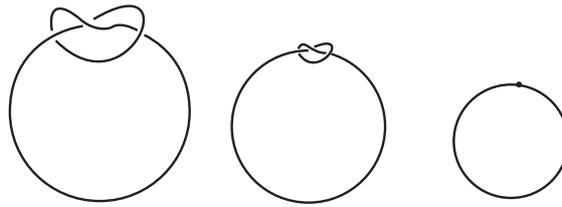


Figura 2.4: Diagrama ilustrando o colapso.

processo de deformação se criem auto-interseções, sem que a curva “se rompa” e sem colapsos (como um nó tão apertado que desaparece, como podemos ver na Figura 2.4). A preocupação não é com a forma exata das curvas, mas sim obter critérios para dizer se duas curvas são ou não são equivalentes.

Um nó não é uma curva em particular, mas todo o conjunto de posições que ela pode assumir se for deformada de acordo com esses critérios. Por exemplo, o nó *trivial* é a classe de curvas que podem se deformar até se tornarem circunferências.

**Definição 2.2.1** Uma isotopia ambiente de  $\mathbb{R}^3$  é uma aplicação  $C^0$ ,

$$h : \mathbb{R}^3 \times I \longrightarrow \mathbb{R}^3,$$

tal que  $h_0 = id$  e  $h_t = h(\cdot, t)$  é um difeomorfismo para todo  $t \in I = [0, 1]$ .

**Definição 2.2.2** Dois nós  $K_1$  e  $K_2$  são isotópicos se existe uma isotopia ambiente  $h$ , tal que  $h_1(K_1) = K_2$  onde  $K_i = k_i(I)$ ,  $I = [0, 1]$ . Além disso, se os nós são orientados,  $h_1$  preserva a orientação.

Em uma isotopia ambiente, o espaço inteiro deve ser deformado, arrastando a curva de uma posição a outra. Com isotopias ambientes impede-se que haja o colapso de uma porção não trivial do nó, reduzindo sua complexidade de forma artificial. Nos referiremos a isotopia ambiente, simplesmente por isotopia.

Uma isotopia preserva a orientação, isto é, se dois nós  $K_0$  e  $K_1$  orientados são isotópicos por uma isotopia  $h$ , então a isotopia  $h$  preserva a orientação.

**Definição 2.2.3** Dois nós  $K_0$  e  $K_1$  são equivalentes se eles são isotópicos,  $K_0 \sim K_1$ .

Sem dificuldades, podemos verificar que a relação  $\sim$  é uma relação de equivalência. Então podemos falar de classe de equivalência de um nó. Cada classe de equivalência de um nó é dito um *tipo de nó*; então nós equivalentes tem o mesmo tipo de nó. Por exemplo, nós equivalentes a uma circunferência são chamados triviais, e constituem o tipo trivial.

**Definição 2.2.4** *Dois enlacs  $L = L_1 \cup L_2 \cup \dots \cup L_m$  e  $L' = L'_1 \cup L'_2 \cup \dots \cup L'_n$  são equivalentes se satisfazem as seguintes condições:*

- (1)  $m = n$ , ou seja, os enlacs  $L$  e  $L'$  tem o mesmo número de componentes;
- (2) existe um difeomorfismo de  $\mathbb{R}^3$  em si mesmo que preserva a orientação e leva a coleção  $L_1 \cup L_2 \cup \dots \cup L_m$  na coleção  $L'_1 \cup L'_2 \cup \dots \cup L'_m$ .

Com o intuito de simplificar certas demonstrações através de determinados movimentos, os quais serão vistos na Seção 2.5, usaremos a definição de nó como se segue.

**Definição 2.2.5** *Um nó  $K$  chama-se nó poligonal se  $K$  é isotópico a uma linha poligonal fechada, sem interseções, em  $\mathbb{R}^3$ .*

Podemos considerar um nó poligonal como um polígono em  $\mathbb{R}^3$ . Um exemplo de nó poligonal se encontra na Figura 2.5.

**Definição 2.2.6** *Um enlace poligonal de  $k$ -componentes, é uma coleção finita de nós poligonais disjuntos  $K_i$ , com  $i \in \mathbb{N}$ .*

**Definição 2.2.7** *Um nó é dito dócil se ele é equivalente a um nó poligonal.*

Se um nó não é dócil, ele é chamado *selvagem*. Nessa dissertação nos concentramos no estudo de nós dóceis, por tal motivo a Definição 2.2.5 dada anteriormente não inclui os nós selvagens. Exemplos de nós selvagens se encontram nas Figuras 2.6 e 2.7. Note também que, para o único ponto limite  $p$ , o nó é suave, porém não é imersão. Esta distinção é de fundamental importância, pois toda teoria desenvolvida nessa dissertação é aplicada somente a nós docéis. Em diversos momentos usaremos a definição de nós poligonais em  $\mathbb{R}^3$ .

É natural perguntarmos que tipo de nós são nós dóceis. Uma resposta parcial para isto é dada pelo seguinte teorema.

**Teorema 2.2.8 (Ver (7))** *Se um nó parametrizado pelo comprimento de arco é uma imersão de classe  $C^1$ , isto é, continuamente diferenciável com derivada não nula, então ele é dócil.*

**Definição 2.2.9** *Dizemos que uma aplicação  $\varphi : X \rightarrow \mathbb{R}^3$ , é uma reflexão (ou uma simetria) de  $X \subseteq \mathbb{R}^3$  com respeito a um plano  $E$ , se para todo ponto  $p \in X$ ,  $\varphi(p)$  é o ponto simétrico a  $p$  com respeito a  $E$ . A imagem  $\varphi(K)$ , obtida pela reflexão  $\varphi$  do nó  $K$ , é dita ser uma imagem por reflexão de  $K$ .*

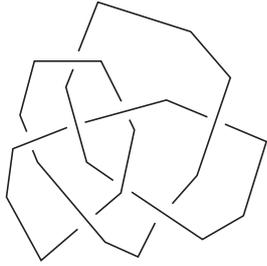


Figura 2.5: Nó poligonal.

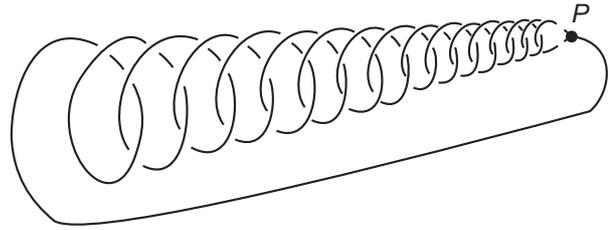


Figura 2.6: Nó selvagem.

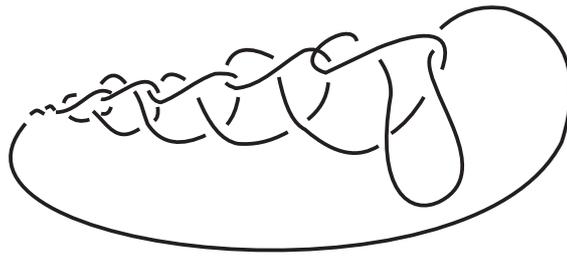


Figura 2.7: Nó selvagem.

A imagem por reflexão de um nó  $K$  orientado, inverte a orientação do nó.

**Exemplo 2.2.10** *A imagem por reflexão com respeito a um plano, por exemplo, o plano  $xy$ , dada por  $f(x, y, z) = (x, y, -z)$ , não é um homeomorfismo que preserva a orientação, de fato, a orientação é inversa (ver Figura 2.8).*

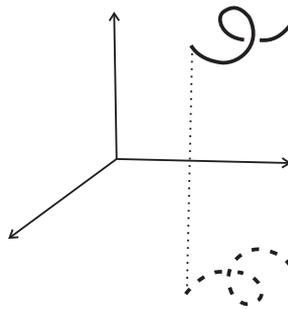


Figura 2.8: Imagem por reflexão.

### 2.3

#### Projeções e diagramas

O estudo dos nós é realizado de uma maneira mais simples que o estudo em um mergulho de uma curva em  $\mathbb{R}^3$ . Suas propriedades são obtidas através de seus gráficos em  $\mathbb{R}^2$ , isto é, através de suas projeções.

**Definição 2.3.1** A projeção em  $P$ ,  $P \subset \mathbb{R}^3$ , de um nó  $K$  em  $\mathbb{R}^3$  é a imagem  $\pi(K)$  de  $K$  por uma aplicação linear sobrejetiva,  $\pi : \mathbb{R}^3 \rightarrow P$ , onde  $P$  é um plano.

Se  $K$  é um nó, diremos que  $\pi(K)$  é a *projeção do nó  $K$* . Um ponto  $p$  na imagem  $\pi(K)$  é chamado de *ponto múltiplo* se a imagem inversa  $\pi^{-1}(p)$  tem mais de um ponto, caso contrário  $p$  é dito *ponto regular*.

Se  $\pi^{-1}(p)$  possui exatamente dois pontos, então dizemos que  $p$  é *ponto duplo*. Um ponto duplo é dito *transversal* se  $\pi^{-1}(p) = \{a, b\}$  e  $\text{Im } d\pi_a + \text{Im } d\pi_b = T_p\mathbb{R}^2$ , ou seja,  $\pi$  é imersão em  $a$  e em  $b$  e as retas imagens das retas tangentes em  $a$  e  $b$  não coincidem (Figura 2.9).

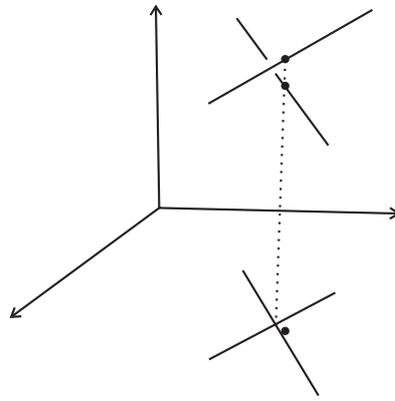


Figura 2.9: Ponto duplo transversal.

Em geral a imagem de  $\pi(K)$  pode ser bem complicada em relação ao número e tipo de pontos múltiplos. Contudo, todo nó dócil  $K$  é equivalente a outro nó, cuja projeção seja relativamente simples.

**Definição 2.3.2** A projeção  $\pi(K)$  de um nó  $K$  é dita *regular* se,

- (i)  $\pi$  restrita a  $K$  é imersão;
- (ii) existe um número finito de pontos múltiplos e todos são pontos duplos transversais.

Numa projeção regular de um nó poligonal, não ocorre pontos múltiplos como na Figura 2.10.

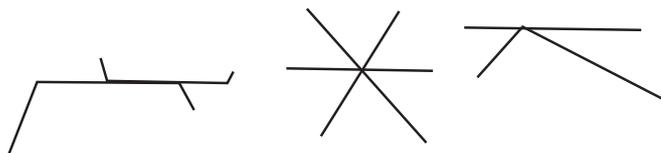


Figura 2.10: Pontos múltiplos não permitidos numa projeção regular.

Uma isotopia se transpõe naturalmente para as projeções. Assim como as curvas, dizemos que duas *projeções* são *equivalentes* se uma isotopia transforma uma na outra.

Sendo  $K$  um nó orientado, a projeção de  $K$  herda a orientação de maneira natural.

A projeção regular de um nó com suas informações adicionais é chamada de *projeção do nó* ou *diagrama do nó*.

**Definição 2.3.3** *Uma isotopia planar de um diagrama do nó é um difeomorfismo do plano em si que não muda a estrutura combinatoria do diagrama.*

Um nó pode ser representado por sua projeção, porém esta projeção somente determina o nó diante algumas informações. Se para todo ponto duplo transversal, chamado *cruzamento*, numa projeção regular for determinado o segmento que passa por baixo (cima), o nó pode ser reconstruído, a menos de isotopia, a partir da projeção, como por exemplo, a projeção da Figura 2.11.

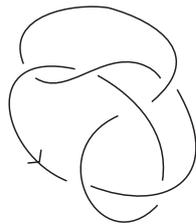


Figura 2.11: Projeção regular de um nó.

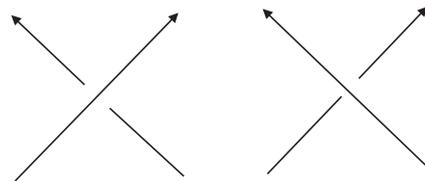


Figura 2.12: Cruzamentos positivo (+) e negativo (-) respectivamente.

Um cruzamento é chamado *positivo* (negativo) se o segmento que passa por cima precisa girar no sentido anti-horário (horário) para chegar à mesma posição do segmento de baixo. Os cruzamentos são ilustrados na figura 2.12.

Um nó então é representado pela sua classe de projeções (regulares) possíveis. Observe que uma isotopia pode desfazer cruzamentos ou mudar sua disposição, mas não pode inverter a posição de dois segmentos em um cruzamento, fazendo quem passa por baixo passar por cima (se isso fosse possível, transformaríamos qualquer curva em uma circunferência). Note também que quando um cruzamento é desfeito pode haver uma posição de transição que não seja regular, mas nós estamos preocupados apenas com as projeções regulares que ocorrem “antes” e “depois” da transição, as quais serão estudadas durante este trabalho.

## 2.4

### Invariantes de nós

Os invariantes são, em geral, calculados sobre projeções (regulares). Um *invariante* é um objeto matemático que pode ser um número, polinômio de uma ou mais variáveis, um grupo, etc, que serve para distinguir projeções que não são equivalentes. Se o resultado for diferente então uma não pode ser deformada na outra. Infelizmente, a recíproca é falsa. Não necessariamente duas projeções com o mesmo objeto matemático representam o mesmo nó. Contudo, nós equivalentes tem os mesmos invariantes.

Reservamos a última seção deste capítulo aos polinômios invariantes de nós, destacando um deles, o qual será de grande importância nesta dissertação.

Não foi encontrado até hoje um invariante finito, de fácil acesso (isto é, calculável em um número finito de passos) que seja completo; dizemos que um invariante é *completo* se é capaz de determinar quando duas projeções determinam o mesmo nó. Porém, para merecer esse nome, é essencial que o invariante não dependa da projeção do nó utilizada para o cálculo.

Nos perguntamos como podemos saber se uma regra que associa a cada projeção um número, polinômio, grupo ou outro objeto matemático é realmente invariante, isto é, independente da projeção utilizada entre todas as projeções equivalentes.

Em geral, não existe problema enquanto a isotopia não mexe com cruzamentos, mas apenas muda o formato da projeção, chamada de *isotopia planar* (Definição 2.3.3), pois os invariantes já costumam ser definidos sem se dar muita importância ao desenho exato das curvas. Mas, quando um cruzamento é alterado e a nova projeção é essencialmente diferente da inicial, será que a regra continua gerando o mesmo polinômio, grupo, ou outro objeto matemático?

Pensamos agora no que ocorre durante uma isotopia. Haverá instantes de transição onde a projeção pode não ser regular, e os demais instantes correspondem a projeções regulares, transformadas apenas por isotopias planares onde essencialmente nada acontece. Durante a isotopia se transita de uma projeção regular a outra.

Concluimos que mostrar que um invariante independe da projeção é mostrar que ele não se altera entre duas projeções regulares separadas por uma transição não regular. O problema é que para ter uma resposta deveríamos, necessariamente, conhecer todos os tipos de transição entre projeções regulares. Essa questão foi estudada por Kurt Reidemeister, o qual nos fornece um importante teorema sobre equivalência de nós. Reservamos a próxima seção

para estes resultados.

## 2.5

### Movimentos de Reidemeister

Pelas considerações feitas na seção anterior, é necessário saber os tipos de transições entre duas projeções regulares para determinar se dois nós são, ou não, equivalentes. Estudos realizados por Kurt Reidemeister em 1920 nos fornecem um teorema que restringe essas transições a três tipos de movimentos, chamados movimentos de Reidemeister, e além disso, garante que estes movimentos são necessários e suficientes para garantir a equivalência de dois nós. Os movimentos de Reidemeister são ilustrados na Figura 2.13, incluindo os movimentos para a imagem por reflexão do nó.

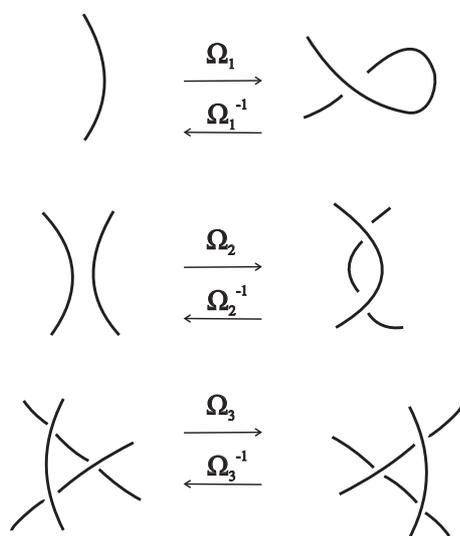


Figura 2.13: Movimentos de Reidemester.

A demonstração do resultado principal desta seção, o Teorema 2.5.3, utiliza-se de teoria de singularidades e é realizada através de complicadas técnicas, porém, uma outra prova feita por Manturov (25), pode ser realizada a partir da definição de nó poligonal, sendo necessário para isso, introduzirmos o conceito de  $\Delta$ -movimento, o qual veremos a seguir.

**Definição 2.5.1** *Seja  $u$  um segmento de reta de um nó poligonal  $K$  em  $\mathbb{R}^3$ , e  $T$  um triângulo em  $\mathbb{R}^3$ ,  $\partial T = u \cup v \cup w$ ,  $u, v, w$  são as arestas de  $T$ . Se  $T \cap K = u$ , então  $K' = (K - u) \cup v \cup w$  define outro nó poligonal. Nós dizemos que  $K'$  resulta de  $K$  por um  $\Delta$ -movimento. Se  $K$  é orientado,  $K'$  herda a orientação de  $K$ . O processo inverso é denotado por  $\Delta^{-1}$ , veja Figura 2.14.*

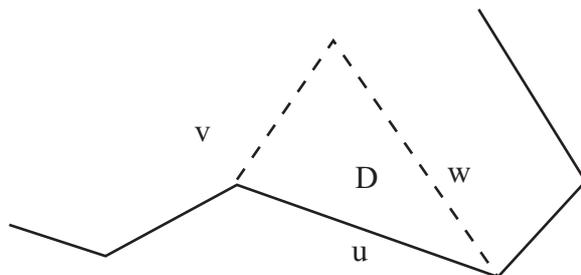


Figura 2.14:  $\Delta$ -movimento.

Um  $\Delta$ -movimento também é dito um *movimento elementar*.

Podemos observar que os movimentos de Reidemester não alteram a classe de isotopia do nó. De fato, o primeiro movimento preserva um cruzamento. O segundo perde ou ganha um cruzamento positivo e um negativo. E o terceiro mantém os cruzamentos existentes.

**Definição 2.5.2** *Dois nós são equivalentes ou isotópicos por movimentos se existe uma sequência finita de  $\Delta$ - e  $\Delta^{-1}$ -movimentos que transforma um nó em outro.*

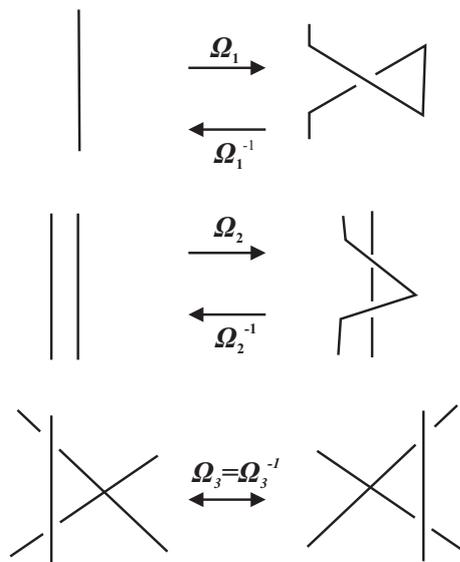


Figura 2.15: Movimentos de Reidemester para nós poligonais.

**Teorema 2.5.3** *Dois nós  $K_1$  e  $K_2$  com diagramas regulares  $D_1$  e  $D_2$ , respectivamente, são equivalentes se, e somente se, um diagrama pode ser transformado no outro por uma sequência finita de movimentos de Reidemester  $\Omega_i, i = 1, 2, 3$  ou seus inversos  $\Omega_i^{-1}$  e isotopias planares.*

*Prova.* Como os movimentos de Reidemester não mudam a classe de isotopia do nó, uma implicação é evidente. Provemos a afirmação inversa do teorema.

Sejam  $D_1$  e  $D_2$  dois diagramas regulares de nós poligonais equivalentes  $K_1$  e  $K_2$ , respectivamente. Então, por definição, existe uma sequência finita de  $\Delta$ - ou  $\Delta^{-1}$ - movimentos que transformam  $K_1$  em  $K_2$ . Se observarmos esta sequência de movimentos na projeção (podemos assumir que todos os nós intermediários tem projeções regulares sem muito esforço), vemos uma sequência de diagramas, cada um obtido do anterior por uma substituição de um segmento de reta por outros dois (ou vice-versa), sendo estes os lados do triângulo. Queremos mostrar que esta substituição pode ser feita por uma sequência de movimentos  $\Omega_1$ ,  $\Omega_2$  e  $\Omega_3$  e seus inversos e isotopias.

Sejam  $\pi(T)$  um triângulo de vértices  $A, B, C$  no plano, onde  $T \cap K_0$  é um segmento apenas, e  $D_0$  o diagrama regular do nó  $K_0$  inicial, no sentido de ser anterior a um movimento. Consideremos dois pontos  $D$  e  $E$  no exterior do triângulo  $ABC$ , e suporemos que os segmentos  $\overline{DA}$  e  $\overline{BE}$  não intersectam o interior do triângulo  $ABC$ , caso isso ocorra, fazemos o primeiro movimento de Reidemester. Agora separamos a intersecção das componentes de  $ABC$ , e  $D_0$  em dois conjuntos: superior e inferior, de acordo com a localização dos segmentos do diagrama  $D_0$  com respeito ao plano  $ABC$ . Agora podemos dividir  $T$  em pequenos triângulos de quatro tipos, onde os lados de cada pequeno triângulo não contém vértices de  $D_0$ .

O triângulo do primeiro tipo possui somente um cruzamento de  $D_0$ , assim lados de  $D_0$  intersectam dois lados do triângulo. O triângulo do segundo tipo contém um único vértice de  $D_0$  e partes dos lados de  $D_0$ . O triângulo do terceiro tipo não contém nenhum vértice, somente partes de lados de  $D_0$ . Finalmente, o triângulo do quarto tipo não contém nem vértices e nem lados, (isto faz corresponder o  $\Delta$ -movimento como a composição de muitos  $\Delta$ -movimentos em pequenos triângulos). Todos os triângulos estão ilustrados na Figura 2.16.

Tal triangulação de  $T$  pode ser feita da seguinte maneira: primeiro, isole todos os cruzamentos e todos os vértices por triângulos do primeiro e segundo tipo, respectivamente. Então triangularize as partes restantes de  $T$  com triângulos do terceiro e quarto tipo.

Agora, ao invés de observar isotopias elementares de  $T$ , analisaremos as isotopias elementares para os pequenos triângulos.

Esses movimentos elementares (isotopias) podem ser representados como uma combinação de movimentos de Reidemeister e de isotopias planares. Mais precisamente, o triângulo do primeiro tipo gera uma combinação de  $\Omega_2$  e  $\Omega_3$ , os triângulos do segundo e do terceiro tipo geram  $\Omega_2$  ou isotopia planar e o quarto tipo gera uma isotopia planar.

Assim concluímos que dois diagramas de nós que são equivalentes podem ser transformados um no outro por uma sequência finita de movimentos de

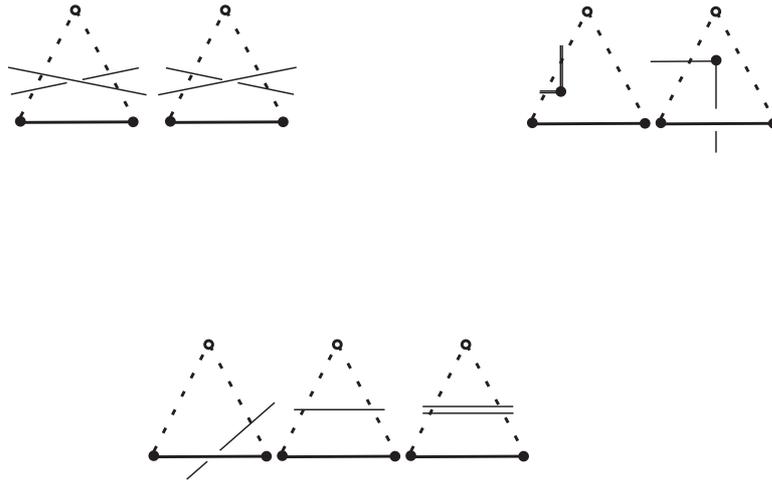


Figura 2.16: Triângulos do primeiro, segundo e terceiro tipo, respectivamente.

Reidemester e de isotopia planares. ■

É importante observar a *independência dos movimentos de Reidemeister*, ou seja, para cada movimento existem dois diagramas de nós equivalentes, que não podem ser transformado um no outro usando apenas os outros dois movimentos. Em outras palavras, um movimento de Reidemeister não pode ser obtido por combinação dos outros dois (Veja Apêndice A.1).

## 2.6 Superfície de Seifert

**Definição 2.6.1** *Seja  $K$  um nó orientado. Uma superfície de Seifert do nó  $K$  é uma superfície bidimensional, conexa, compacta, orientada em  $\mathbb{R}^3$ , cujo bordo é o nó  $K$ , tal que a orientação do nó  $K$  induz a orientação da superfície.*

**Teorema 2.6.2** *Para cada nó  $K$  em  $\mathbb{R}^3$ , existe uma superfície de Seifert de  $K$ .*

*Prova.* Considere um diagrama regular  $D$  do nó orientado  $K$ . Suavizamos os cruzamentos do nó como mostra a Figura 2.17. Então obtemos um conjunto de curvas fechadas que não se intersectam no plano. Essas curvas são chamadas de *circunferências de Seifert*.

Considere os discos presos às circunferências. Embora o interior dessas circunferências no plano possam conter uma outra circunferência, discos no espaço 3-dimensional podem ser presos sem interseções.

Numa vizinhança de cada cruzamento, dois discos encontram-se cada um com o outro. Escolhamos dois intervalos fechados no bordo desses discos e os

conectemos por uma faixa torcida como na Figura 2.18. Os bordos destas faixas são dois ramos do nó incidentes à escolha dos cruzamentos. As duas posições (superior e inferior) na Figura 2.18 mostram diferentes maneiras de torcer (em um caso a reta vertical esta sobre a horizontal e no outro caso o contrário).

Verifiquemos agora que a superfície obtida é uma superfície orientada. Cada faixa é orientada coerentemente com o nó  $K$  e cada disco recebe a orientação do nó. Dessa forma obtemos uma superfície orientada que pode não ser conexa. Então unimos diferentes componentes dessas superfícies por um tubo fino, respeitando a orientação e obtemos uma superfície conexa, com o mesmo bordo. ■

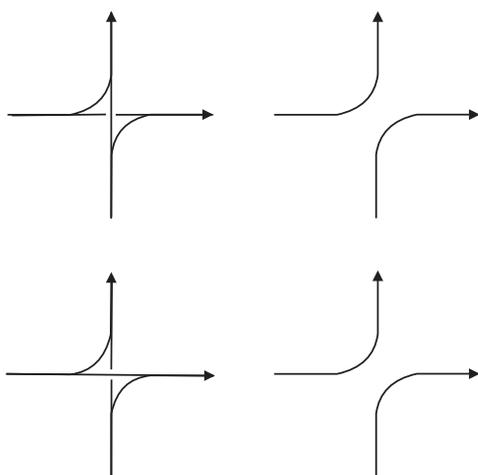


Figura 2.17: Suavizando os cruzamentos no diagrama.

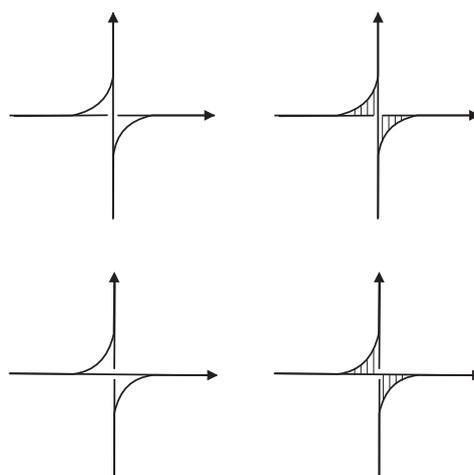


Figura 2.18: Conexão dos discos por faixas torcidas.

**Exemplo 2.6.3** A figura 2.19 mostra o processo para obter a superfície de Seifert (c) do nó trevo.

### 2.6.1 Gênero de um nó

O conceito do gênero de um nó foi introduzido por H. Seifert em (36), o qual ocupou uma posição central na teoria dos nós.

Considere o seguinte teorema:

**Teorema 2.6.4 (Massey)** *Seja  $F_{m,k}$  uma esfera de dimensão 2 com números finitos  $m (\geq 0)$  de alças presas e  $k (\geq 0)$  de componentes de bordo (Figura 2.20). Então,*

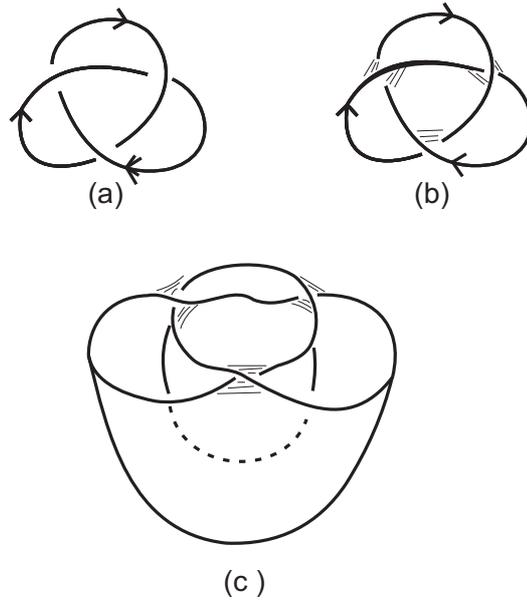


Figura 2.19: Superfície de Seifert do nó trevo.

- (i) uma superfície compacta, conexa e orientável é homeomorfa a  $F_{m,k}$  para algum  $m \geq 0$  e  $k \geq 0$ ;
- (ii)  $F_{m,k}$  e  $F_{\tilde{m},\tilde{k}}$  são homeomorfas se, e somente se,  $m = \tilde{m}$  e  $k = \tilde{k}$ .

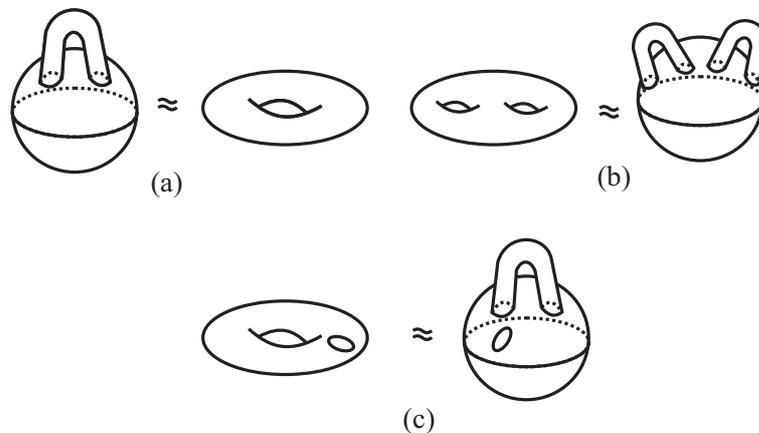


Figura 2.20: Superfícies homeomorfas à esfera com alças.

A teoria para classificação de superfícies fechadas não orientáveis pode ser encontrada em (27).

O Teorema 2.6.4 diz que uma superfície compacta, conexa e orientada  $M$  é topologicamente equivalente (isto é, homeomorfa) à esfera com várias alças presas em sua superfície. O número dessas alças, bem definido, é chamado de *gênero da superfície*  $F$  e denotado por  $g(F)$ .

**Exemplo 2.6.5** A Figura 2.20 (a), com  $m=1$  e  $k=0$ , mostra uma superfície de gênero 1, chamada toro, enquanto 2.20 (b), com  $m=2$  e  $k=0$ , é uma superfície de gênero 2. A Figura 2.20 (c) com  $m=1$  e  $k=1$  mostra uma superfície de gênero 1.

**Definição 2.6.6** O gênero mínimo  $g$  de todas as superfícies de Seifert do nó  $K$  é chamado de gênero do nó  $K$ .

Nos perguntamos como calcular o gênero de um nó. Para um nó arbitrário existem algoritmos para calculá-lo, mas tais algoritmos são de difícil implementação. Embora a determinação do gênero de um nó arbitrário seja difícil, determinar o gênero de uma superfície de Seifert “construída” é relativamente fácil.

**Teorema 2.6.7** Dada uma superfície  $F$  compacta, conexa e orientável, dividimos esta em  $\alpha_0$  pontos,  $\alpha_1$  arestas e  $\alpha_2$  faces.

Seja

$$\chi(F) = \alpha_0 - \alpha_1 + \alpha_2,$$

então  $\chi(F)$  é um inteiro que é independente de como dividimos  $F$ , isto é,  $\chi(F)$  depende somente da superfície  $F$ . Este inteiro é chamado de característica de Euler de  $F$ .

A característica de Euler,  $\chi(F)$ , e o gênero,  $g(F)$ , de uma superfície fechada  $F$ , , são relacionados pelas equações:

$$\chi(F) = 2 - k(F) - 2g(F)$$

onde  $k(F)$  é o número de curvas fechadas que constituem o bordo de  $F$ .

Note que, se  $F$  não tem bordo, então  $k(F)$  é igual a zero e, portanto,

$$g(F) = \frac{2 - \chi(F)}{2}.$$

### 2.6.2

#### Número de enlaçamento

Nesta seção definiremos o número de enlaçamento de dois nós orientados disjuntos, um importante invariante de nós orientados, o qual será abordado no capítulo 4.

Sejam  $K_1, K_2$  nós orientados disjuntos com  $D_1, D_2$  seus respectivos diagramas e  $P = \{ p ; p \in D_1 \cap D_2 \}$  o conjunto de todos os pontos de cruzamento no diagrama  $D_1 \cup D_2$ , que supomos ser regular, onde  $D_1$  intersecta  $D_2$ . Atribuímos a cada ponto  $p \in P$  o valor  $\pm 1$ , conforme segue:

$$s_p = \begin{cases} +1 & \text{se } p \text{ é cruzamento positivo} \\ -1 & \text{se } p \text{ é cruzamento negativo} \end{cases}$$

onde  $s_p$  é dito o sinal de  $p$  (Figura 2.12).

**Definição 2.6.8** *Dados dois nós orientados  $K_1$  e  $K_2$ , então o número*

$$lk(K_1, K_2) = \frac{1}{2} \sum_{p \in P} s_p$$

*é chamado número de enlaçamento de  $K_1$  e  $K_2$ .*

O número de enlaçamento depende da orientação. Se invertemos a orientação dos dois nós, o sinal do número de enlaçamento é preservado, porém, se invertemos a orientação de apenas um dos nós, o número de enlaçamento muda de sinal.

Note que, o número de enlaçamento entre dois nós é o número de vezes (contados com sinal) que um deles intersecta a superfície de Seifert do outro.

**Proposição 2.6.9** *Seja  $L$  um enlace orientado de duas componentes,  $L = K_1 \cup K_2$ . Então o número de enlaçamento  $lk(K_1, K_2)$  é um invariante de  $L$  (com a sua orientação).*

*Prova.* Analisemos os movimentos de Reidemester.

O movimento  $\Omega_1$  é realizado sobre um dos dois nós, logo não altera  $lk(K_1, K_2)$ . O movimento  $\Omega_2$  cria ou remove um cruzamento positivo e um negativo, logo não altera  $lk(K_1, K_2)$ . O movimento  $\Omega_3$  não altera um cruzamento e portanto não altera  $lk(K_1, K_2)$ . ■

**Definição 2.6.10** *Seja  $L$  um enlace orientado e  $C$  o conjunto de todos os pontos de cruzamento no diagrama de  $L$ . Então o número*

$$w(L) = \sum_{p \in C} s_p$$

é chamado de número de torção de  $L$ .

Note que, a torção,  $w(L)$ , de um enlace  $L$  não é invariante pelo movimento de Reidemeister  $\Omega_1$ . De fato, o movimento  $\Omega_1$  cria ou remove um cruzamento, o que altera  $w(L)$  em uma unidade.

Se a torção fosse um invariante de isotopia (isotopia ambiente), então seu cálculo seria um excelente método para distinguir imagens por reflexão. Dizemos, então, que o número de torção de um enlace  $L$  é um invariante sob *isotopia regular*, ou seja, dois diagramas são ditos ser isotópicos por isotopia regular se um pode ser obtido do outro por uma sequência de movimentos de Reidemeister  $\Omega_2$  e  $\Omega_3$ .

## 2.7

### Soma Conexa

Em 1934 idéias geométricas conduziram H. Schubert à soma conexa de nós e posteriormente, em 1954, ele introduziu a noção de número de pontes de um nó.

**Definição 2.7.1** *Seja  $K$  um nó orientado que intercepta um plano  $E \subset \mathbb{R}^3$  em dois pontos  $P$  e  $Q$ . Em cada semiespaço de  $E$  temos os arcos  $K_1$  e  $K_2$  fechados, obtidos de  $K$  pelos arcos de  $P$  a  $Q$  e de  $Q$  a  $P$  respectivamente, ambos fechados por arcos em  $E$ . O nó  $K$  é dito uma soma conexa dos nós  $K_1$  e  $K_2$  orientados, denotado por  $K = K_1 \# K_2$ .*

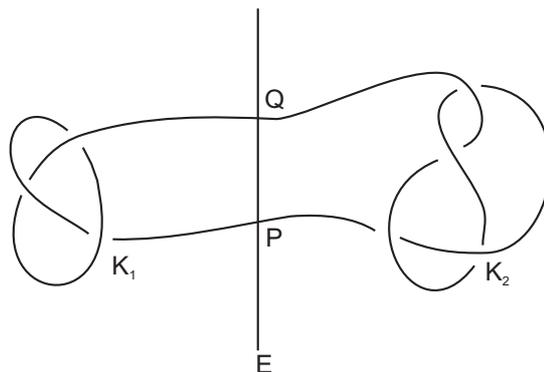


Figura 2.21: Soma conexa de nós  $K_1$  e  $K_2$ .

Uma soma conexa pode ser vista como uma operação entre nós orientados e é também chamada de *composição de nós*. A operação de soma é bem definida, isto é, não depende dos pontos  $P$  e  $Q$  escolhidos, de modo a compor

o novo nó. Então dizemos que  $K_1 \# K_2$  é unicamente determinado por  $K_1$  e  $K_2$ .

**Proposição 2.7.2** *Sejam  $K_1, K_2, K_3$  nós orientados e  $K_0$  o nó trivial orientado. Então*

- (1)  $K_1 \# K_2 \approx K_2 \# K_1$ ;
- (2)  $K_1 \# (K_2 \# K_3) \approx (K_1 \# K_2) \# K_3$ ;
- (3)  $K_i \# K_0 \approx K_i$ ;
- (4) se  $K_1$  é um nó não trivial, então  $K_1 \# K_2$  é um nó não trivial.

*Prova.* (1) Facilmente vemos que a soma conexa é comutativa. De fato, considere os diagramas das composição de nós  $K_1 \# K_2$  e  $K_2 \# K_1$ , então através de isotopias planares, concluímos que eles são idênticos.

(2) Considere a soma conexa  $K_1 \# (K_2 \# K_3)$ . Agora façamos  $K_2 \# K_3 = M$  e  $K_1 \# M = M'$ . Sejam  $E$  e  $E'$  os planos que interceptam  $M$  e  $M'$  nos pontos  $P, Q$  e  $P', Q'$  respectivamente. Agora, façamos a soma conexa de  $K_1$  e  $K_2$  através da união dos arcos de  $P'$  a  $Q'$  nos dois semi planos de  $E'$ ; da mesma forma, fazemos a soma conexa do nó obtido,  $(K_1 \# K_2)$ , com  $K_3$  através dos arcos de  $P$  a  $Q$  nos dois semi planos de  $E$  e, portanto obtemos a soma conexa de nós  $(K_1 \# K_2) \# K_3$ , que é isotópica a  $K_1 \# (K_2 \# K_3)$ .

(3) A verificação é imediata.

(4) Suponhamos que  $K_1 \# K_2$  é um nó trivial. Considere a sequência

$$K_1 \# K_2, (K_1 \# K_2) \# (K_1 \# K_2), (K_1 \# K_2) \# (K_1 \# K_2) \# (K_1 \# K_2),$$

onde cada termo  $M_n$  da sequência está numa bola de raio  $1/2^{n-1}$ . Dessa forma, construímos uma série infinita dentro de um compacto, obtendo assim um nó que possivelmente é selvagem. Denotamos esse nó por  $K'$ .

Como o nó  $K_1 \# K_2$  é trivial, o nó  $K'$  é trivial também. Além disso temos a decomposição

$$K' = K_1 \# (K_2 \# K_1) \# (K_2 \# K_1) \dots$$

A soma conexa de nós é comutativa e então  $K_2 \# K_1$  é um nó trivial. Logo  $K'$  é isotópico a  $K_1$ , pelo item (3). O que é uma contradição, pois  $K_1$  é não trivial. ■

A proposição (item (4)) nos diz que um nó não trivial não possui um simétrico com relação a operação de composição de nós. Daí, concluímos que o conjunto de todos os nós com a operação de soma conexa tem a estrutura de um semigrupo e não de um grupo.



Figura 2.22: Diagramas de dois nós de 2-pontes e um enlace de 2-pontes, respectivamente.

**Definição 2.7.3** Um nó  $K$  que é a soma conexa de dois nós não triviais é chamado composto. Um nó não trivial que não é composto é dito um nó primo.

**Definição 2.7.4** Seja  $K$  um nó em  $\mathbb{R}^3$  que intersecta um plano  $E \subset \mathbb{R}^3$  em  $2m$  pontos, tais que os arcos de  $K$  contidos em cada semi espaço (provenientes da intersecção com o plano  $E$ ) possuem projeção ortogonal em  $E$ , as quais são simples e disjuntas. Então o número mínimo  $m$  possível para um nó  $K$  é chamado de número de pontes de  $K$ , e o nó é dito um nó de  $m$ -pontes.

**Exemplo 2.7.5** A Figura 2.22 mostra diagramas de nós de 2-pontes.

**Proposição 2.7.6** Todo nó  $K$  de 2-pontes é um nó primo.

A demonstração desta proposição se encontra em (2),7.8.

## 2.8 Polinômios

Nesta seção faremos uma breve apresentação, baseada nos trabalhos: Nudos e Variedades Tridimensionales por María Teresa Lozano Imízcoz (18), e em (19, 20) por Louis H. Kauffman, dos polinômios para enlases ou nós. Restringiremos esta seção somente às suas definições, visto que as usaremos raramente nos próximos capítulos, exceto para o polinômio de Kauffman, ao qual daremos uma atenção especial por possuir importante papel nessa dissertação. Com o intuito de não nos estendermos em contas, todos os exemplos aqui apresentados serão para o nó trevo, o qual é o nó não trivial com o menor número de cruzamentos. Para um aprofundamento, ver (19, 20).

Em 1928, o matemático Alexander encontrou um polinômio de Laurent em uma variável  $t$  (com potências positivas e negativas), que resultou ser um invariante de nó. Contudo, seu trabalho só utiliza álgebra linear, determinantes e movimentos de Reidemeister. O polinômio é conhecido como *polinômio de Alexander* e denotado por  $\Delta_K(t)$ . A descoberta deste polinômio foi um importante avanço em teoria dos nós, pois é um polinômio de cálculo acessível.

Observou-se que o polinômio de Alexander do nó trivial é igual a 1, mas para certos outros nós não triviais o polinômio também tem valor igual a 1, como, por exemplo, o nó de Kinoshita-Terasaka (Figura 2.23). Em 1984 Alexander verificou que há infinitos pares de nós distintos cujos polinômios são iguais, logo o polinômio de Alexander não é um invariante completo.

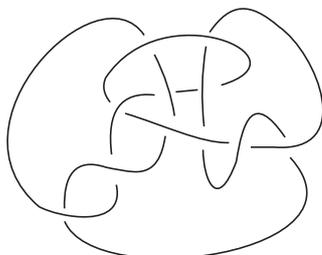


Figura 2.23: Nó de Kinoshita-Terasaka.

No final dos anos 60, matemáticos buscaram novos algoritmos para calcular os invariantes e, em 1970, J.H Conway definiu um novo polinômio de Laurent,  $\nabla_L(z)$ , para um enlace orientado, conhecido como *polinômio de Conway*, que é definido por um mecanismo indutivo, com uma regra que permite escrever o polinômio de um nó em aplicação das variáveis. Sendo assim, após um número finito de etapas elimina-se completamente os cruzamentos, restando apenas circunferências. O polinômio de Conway é determinado de forma recursiva pelos seguintes axiomas:

- 1 -  $\nabla_{\bigcirc}(z)=1$ , onde  $\bigcirc$  é o nó trivial;
- 2 -  $\nabla_{L_+}(z) - \nabla_{L_-}(z) = z\nabla_{L_0}(z)$ ; onde os diagramas dos enlaces  $L_+$ ,  $L_-$  e  $L_0$  são como na figura 2.24;
- 3 - Se  $L$  é equivalente a  $L'$  então,  $\nabla_L(z) = \nabla_{L'}(z)$ .

O polinômio de Conway é independente da orientação escolhida. Isto significa que o polinômio de Conway é um invariante de nó sem orientação. O polinômio de Conway está relacionado com o polinômio de Alexander por uma mudança de variável,

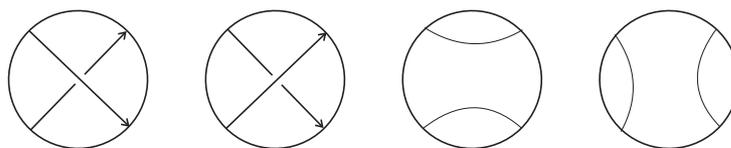


Figura 2.24: Diagramas dos enlaces  $L_+$ ,  $L_-$ ,  $L_0$  e  $L_\infty$ , que diferem por um cruzamento.

$$\Delta_k(t) = \nabla_L \left( \sqrt{t} - \frac{1}{\sqrt{t}} \right).$$

**Exemplo 2.8.1** *Polinômio de Conway do nó trevo:*

$$\nabla_K(z) = 1\nabla_{\bigcirc}(z) + z\nabla_{\bigcirc\bigcirc}(z) + z^2\nabla_{\bigcirc}(z) = (1+z^2)\nabla_{\bigcirc}(z) + 1\nabla_{\bigcirc}(z) = (1+z^2)$$

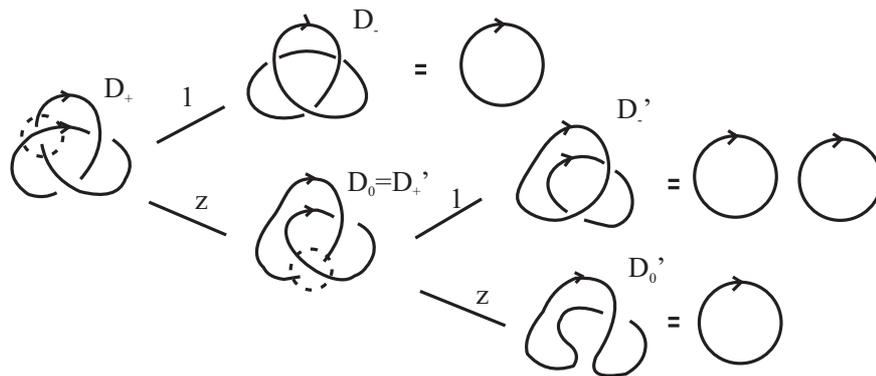


Figura 2.25: Árvore para o cálculo do polinômio de Conway do nó trevo.

Em 1984, V. Jones encontrou um polinômio invariante que depois levaria seu nome. Vários estudos foram realizados com o intuito de encontrar invariantes de nós e enlaces. O trabalho de Jones abriu novas linhas de pesquisa em diversos campos e o tornou merecedor da medalha Fields, no Congresso Internacional de Matemática celebrado em Kyoto em 1990. Jones trabalhou em mecânica estatística e estudou grupo de tranças <sup>1</sup>(Todo nó pode ser construído por uma trança, embora não de maneira única). Jones provou que o polinômio era um invariante para cada trança, logo para cada nó. Imediatamente, ele mostrou que cumpria a propriedade que podemos chamar de axioma (2) para sua definição. Assim, o *polinômio de Jones* de um nó ou enlace orientado,  $V_L(t)$ , satisfaz os axiomas:

- 1 -  $V_{\bigcirc}(z)=1$ , onde  $\bigcirc$  é o nó trivial;
- 2 -  $\frac{1}{t}V_{L_+}(z) - tV_{L_-}(z) = \left( \sqrt{t} - \frac{1}{\sqrt{t}} \right) V_{L_0}(t)$ .

Podemos verificar que o polinômio de um enlace orientado, definido por estes axiomas preserva os movimentos de Reidemeister. Logo, pode ser calculado de forma análoga aos polinômios de Conway e Alexander. Observamos

<sup>1</sup>Uma  $n$ -trança é um conjunto de  $n$  arcos disjuntos que unem  $n$  pontos em um plano  $\Omega$  com suas projeções em outro plano paralelo  $\Omega'$ .

por simetria do axioma 2, que o polinômio de Jones da reflexão de um nó é o polinômio de Jones inicial por uma mudança de variável  $t$  por  $t^{-1}$ .

**Exemplo 2.8.2** *Polinômio de Jones para o nó trevo:*

$$V_K(t) = t^2 V_{\bigcirc}(t) + t^3 \left( \sqrt{t} + \frac{1}{\sqrt{t}} \right) V_{\bigcirc\bigcirc}(t) + t^2 \left( \sqrt{t} - \frac{1}{\sqrt{t}} \right)^2 V_{\bigcirc}(t) = t + t^3 - t^4.$$

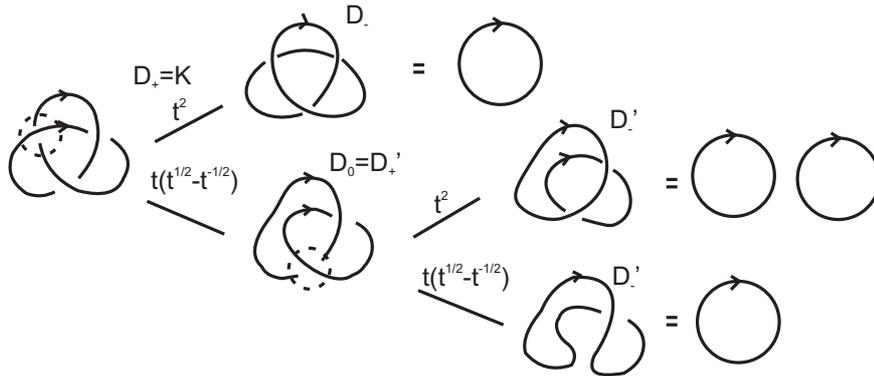


Figura 2.26: Árvore para o cálculo do polinômio de Jones do nó trevo.

Vários especialistas em teoria dos nós descobriram independentemente, mas ao mesmo tempo, que ambos polinômios são casos especiais de um invariante mais geral, definido para enlaces ou nós orientados com os mesmos axiomas, porém introduzidas duas variáveis,  $v$  e  $z$ . Esse polinômio é chamado *polinômio de HOMFLY*, nome formado pelas letras iniciais dos nomes dos matemáticos que o definiram: Hoste, Ocneanu, Millett, Freyd, Lickorish, and Yetter, e é denotado por  $P_K(v, z)$ . Os axiomas que o definem são :

- 1-  $P_{\bigcirc}(v, z) = 1$ ;
- 2-  $\frac{1}{v} P_{L_+}(v, z) - v P_{L_-}(v, z) = z P_{L_0}(v, z)$ .

O polinômio de HOMFLY se relaciona com os anteriores da seguinte forma:

$$V_K(t) = P_K \left( t, \sqrt{t} - \frac{1}{\sqrt{t}} \right),$$

$$\nabla_K(t) = P_K \left( 1, \sqrt{t} - \frac{1}{\sqrt{t}} \right).$$

Isto implica que ambos os polinômios, o de Alexander e o de Jones são casos particulares do polinômio de HOMFLY. Assim como os demais polinômios,  $P_K(v, z)$  também não é um invariante completo de nó.

**Exemplo 2.8.3** *Polinômios de HOMFLY para o nó trevo  $T$  :*

$$P_T(a, z) = a^{-3} \left( \frac{a - a^{-1}}{z} \right) (2a - a^{-1} + az^2).$$

Grandes avanços na teoria combinatória de nós foram produzidos em velocidade. Os avanços mais significativos são devidos a Louis Kauffman, o qual escreveu vários livros e numerosos artigos sobre estes temas. Realmente, Kauffman trabalhou em teoria dos nós desde os anos 70. No final da década de 80, Kauffman descobriu um polinômio, chamado *polinômio de Kauffman*, que assim como o de HOMFLY, é definido axiomáticamente para duas variáveis.

Os polinômios de HOMFLY e de Kauffman merecem uma atenção especial. Importantes relações entre estes polinômios podem ser vistas em (15). Para os invariantes de nós, estes polinômios contribuíram de forma significativa, como, por exemplo, a contribuição do polinômio de Kauffman para um dos principais resultados dessa dissertação, o número máximo de Thurston-Bennequin para nós de 2-pontes em termos do grau mínimo do polinômio de Kauffman, o qual será visto no capítulo 5.

Antes de definirmos o polinômio de Kauffman para um enlace orientado  $L$ , definimos o polinômio de Laurent,  $R_L(a, x) \in \mathbb{Z}[a^{\pm 1}, x^{\pm 1}]$  (de Kauffman), do enlace  $L$ , desconsiderando a orientação, pelos axiomas:

- 1 -  $R_L$  é um invariante de isotopia regular, isto é, se  $L$  e  $L'$  são isotópicos por isotopia regular então,  $R_L = R_{L'}$ ;
- 2 -  $R_{L_+} + R_{L_-} = x(R_{L_0} + R_{L_\infty})$ ;
- 3 -  $R_{L^+} = aR_L$   
 $R_{L^-} = a^{-1}R_L$ ;
- 4 -  $R_{\bigcirc} = 1$ , onde  $\bigcirc$  é o nó trivial.

Os diagramas dos enlaces  $L_+$ ,  $L_-$ ,  $L_0$ ,  $L_\infty$  e  $L^+$ ,  $L^-$ ,  $L^0$ ,  $L^\infty$  se encontram nas Figuras 2.24 e 2.27.

O *polinômio de Kauffman* de um enlace orientado  $L$  é definido por :

$$F_L = a^{-w(L)} R_L,$$

onde  $w(L)$  é o número de torção de  $L$ .

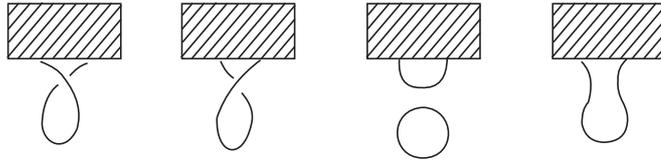


Figura 2.27: Diagramas dos enlacs  $L^+, L^-, L^0$  e  $L^\infty$  que diferem por uma torção.



Figura 2.28: Nó  $M$ , com torção em “espiral”.

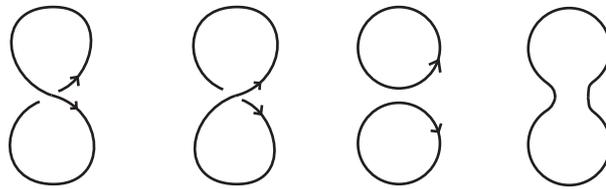


Figura 2.29: Diagramas dos enlacs  $\bar{L}_+, \bar{L}_-, \bar{L}_0$  e  $\bar{L}_\infty$ .

O polinômio de Kauffman,  $F_L = a^{-w(L)}R_L$ , de um enlace  $L$  é um invariante sob isotopia regular. Basta lembrar que a torção  $w(L)$  é um invariante sob isotopia regular.

**Observação 2.8.4** *O polinômio de Kauffman aplicado na imagem por reflexão de  $L$  é obtido substituindo  $a$  por  $a^{-1}$  no polinômio de  $L$ .*

Vejamos algumas importantes propriedades do polinômio de Kauffman:

**Proposição 2.8.5** *Sejam  $\bar{L}$  e  $M$  enlacs orientados, como nas Figuras 2.29 e 2.28, respectivamente,  $K$  e  $K'$  nós (ou enlacs) orientados e  $-K$  o nó com a orientação contrária de  $K$ . Então:*

- (i)  $R_{\bar{L}_0} = \frac{a+a^{-1}}{x} - 1$ ;
- (ii)  $F_{K \cup K'} = \delta F_K \cdot F_{K'}$ ;
- (iii)  $F_K = F_{-K}$ ;
- (iv)  $F_{K \# K'} = F_K \cdot F_{K'}$ ;
- (v)  $R_M = a^{w(M)}$ .

*Prova.* (i) Pelos axiomas do polinômio de Laurent,  $R_L$ , temos as seguintes relações:

$$-R_{\bar{L}_+} + R_{\bar{L}_-} = x(R_{\bar{L}_0} + R_{\bar{L}_\infty})$$

- $R_{\bar{L}_+} = a$  e  $R_{\bar{L}_-} = a^{-1}$
- $R_{\bar{L}_\infty} = R_{\bigcirc} = 1$ .

Dessa forma,  $a + a^{-1} = x(R_{\bar{L}_0} + 1)$  e portanto  $R_{\bar{L}_0} = \frac{a + a^{-1}}{x} - 1$ .

(ii) Determinemos o polinômio de Kauffman para o enlace  $L$  orientado com torção, como mostra a Figura 2.27.

Pelo axioma do polinômio de Laurent,  $R_L$ , temos a seguinte relação:

$$R_{L^+} + R_{L^-} = x(R_{L^0} + R_{L^\infty})$$

e assim,

$$R_{L^0} = \left[ \frac{a + a^{-1}}{x} - 1 \right] R_{L^\infty}.$$

Façamos  $\delta = \left[ \frac{a + a^{-1}}{x} - 1 \right]$ , então  $R_{L^0} = R_{\bigcirc \cup \bar{K}} = \delta R_{\bar{K}}$ , onde  $\cup$  denota a união disjunta, o que implica que  $F_{\bigcirc \cup \bar{K}} = \delta F_{\bar{K}}$ . Mas geralmente para dois nós  $K$  e  $K'$ , temos a relação:

$$F_{K \cup K'} = \delta F_K \cdot F_{K'}. \quad (2-1)$$

(iii) De fato, pela definição do polinômio de Laurent,  $R_K = R_{-K}$

(iv) Sejam  $K$  e  $K'$  dois nós orientados (ou enlaces) e  $K \# K'$  a soma conexa de  $K$  e  $K'$ . Pela definição do polinômio de Kauffman, temos que:

$$R_{K \# K'_+} + R_{K \# K'_-} = x(R_{K \# K'_0} + R_{K \# K'_\infty}),$$

$$\left( \frac{a + a^{-1}}{x} \right) R_{K \# K'} = (R_{K \# K'_0} + R_{K \# K'_\infty}).$$

Mas  $R_{K \# K'_0} = R_{K \# K'}$  e  $R_{K \# K'_\infty} = R_{K \cup K'}$ , então

$$\left( \frac{a + a^{-1}}{x} - 1 \right) R_{K \# K'} = R_{K \cup K'};$$

pela relação (ii), temos

$$\left( \frac{a + a^{-1}}{x} - 1 \right) R_{K \# K'} = \delta R_K \cdot R'_K$$

$$R_{K \# K'} = R_K \cdot R'_K.$$

Portanto,  $F_{K\sharp K'} = F_K \cdot F_{K'}$ .

(v) Pelo axioma 3 do polinômio  $R_L$ , observamos que para um diagrama de um nó  $M$  não trivial, em forma de “espiral” (por exemplo, o diagrama da Figura 2.28) o polinômio de Laurent é dado por  $R_M = a^{w(M)}$ . ■

**Exemplo 2.8.6** *O polinômio de Kauffman para o nó trevo  $T$  é dado por:*

$$F_T = a^{-3} \left( 1 + \frac{a - a^{-1}}{z} \right) (2a - a^{-1} + z - a^{-2}z + az^2 - a^{-1}z^2)$$

É importante mencionar que os resultados acima são demonstrados de forma análoga para o polinômio de HOMFLY e, portanto, para os demais polinômios, por estes serem casos particulares do polinômio de HOMFLY.