

# 1

## Introdução

Atualmente é conhecido que, como uma teoria matemática, a teoria dos nós apareceu no final do século XVIII. Um primeiro estudo matemático dos nós foi provavelmente realizado por K. F. Gauss (1777 - 1855) em pesquisas em eletrodinâmica, que incluía uma formulação analítica de número de enlaçamento.

Estudos sistemáticos da teoria dos nós começaram no final do século XIX. Contudo, os resultados mais significantes tiveram lugar na segunda metade do século XX. Nas últimas duas décadas do século passado, devido a pesquisas em parte nesta área, Jones, Witten, Drinfeld (1990) e Kontsevich (1998) receberam a medalha Fields.

Novas direções da teoria dos nós surgiram. Uma interessante área é a teoria dos nós legendreanos. Esta teoria relaciona a teoria dos nós, geometria de contato e topologia, e se tornou motivo de estudos desde o trabalho de Bennequin (1) em 1983, porém ganhou destaque em 1997 com o trabalho de Fuchs e Tabachnikov (39). Nós legendreanos em uma variedade, em particular  $\mathbb{R}^3$ , são nós tangentes a uma estrutura de contato.

Com o intuito de classificar os nós legendreanos, Bennequin (1) definiu um invariante, atualmente conhecido como o número de Thurston-Bennequin. Neste artigo, Bennequin mostrou também a primeira cota superior do número de Bennequin. Em 2001, Ng (32), mostrou com exatidão o mais recente resultado sobre cotas superiores do número de Thurston-Bennequin para uma classe de nós legendreanos, o número máximo de Thurston-Bennequin para nós de 2-pontes, que é dado pelo polinômio de Kauffman.

Foi neste contexto que despertei meu interesse pela teoria dos nós legendreanos e pelo invariante de Thurston-Bennequin.

Nesta dissertação, introduzimos, esperando que com justiça, a contribuição de vários matemáticos para a teoria dos nós.

O objetivo deste trabalho é descrever alguns dos principais conceitos da atual teoria dos nós legendreanos e resultados obtidos para seus clássicos invariantes. Damos uma descrição de nós legendreanos em uma variedade e

estudamos o caso em  $\mathbb{R}^3$ . Além disso, incluímos importantes resultados sobre os invariantes clássicos de nós legendreanos, os números de Thurston-Bennequin e Maslov. Como resultado principal, demonstramos de forma clara o importante e recente Teorema do Número Máximo de Bennequin para nós de 2-pontes, em termos do grau do polinômio de Kauffman.

Durante toda a dissertação nos concentramos em lúcidas exposições e fazemos uso extensivo de diagramas para facilitar o entendimento do leitor a partir de dados geométricos. Incluímos textos explicativos e vários exemplos, que tornam mais simples a leitura. Contudo, as provas são feitas com padrão usual de rigor matemático. Em certos casos, por conveniência, fizemos apêndices no final da dissertação.

Essa dissertação é dividida em cinco capítulos.

No capítulo dois, são apresentadas noções básicas da teoria dos nós topológicos, principais definições, conceitos e importantes resultados. A demonstração do teorema de Reidemester, o qual diz que dois nós são equivalentes se um pode ser obtido do outro por três movimentos e isotopia planar, que pode ser encontrada em (30), é feita de forma mais simples que a realizada por Reidemester, a qual utiliza teoria de singularidades. Discutimos também o conceito de invariante de nós topológicos e, como caso particular, os polinômios, enfatizando o polinômio de Kauffman, que é parte do resultado principal desta dissertação.

O terceiro capítulo contém os conceitos dos nós tangles e de duas pontes. O motivo pelo qual é dedicado um capítulo a esses nós é dado claramente pelo título da dissertação, suas propriedades e definições são extremamente importantes para o nosso principal resultado. É também neste capítulo que é determinada a fórmula para o polinômio de Kauffman para nós de 2-pontes em termos do produto de matrizes.

O quarto capítulo é dedicado à interessante teoria dos nós legendreanos. São apresentadas algumas estruturas de contato, entre elas a estrutura de contato canônica no espaço  $\mathbb{R}^3$ , que é trabalhada no restante da dissertação; e então são definidos os nós legendreanos, que são os nós tangentes a estruturas de contato. São discutidas suas propriedades e como recuperar os nós legendreanos através de suas projeções frontal e lagrangeana.

No quinto capítulo são apresentados dois clássicos invariantes de nós legendreanos: o número de Thurston-Bennequin e o número de Maslov. São discutidas propriedades e relações entre estes números. Através da operação de estabilização é observado que é possível diminuir o número de Thurston-Bennequin de um tipo de nó e então introduzir o conceito de cotas superiores do número de Bennequin de um nó. É neste capítulo que é introduzido o

conceito de número máximo de Thurston-Bennequin de nós legendreanos de um determinado tipo topológico.

Finalmente, o sexto capítulo é dedicado à demonstração do Teorema do Número Máximo de Thurston-Bennequin para todos os nós legendreanos topologicamente isotópicos aos nós de 2-pontes em termos do grau do polinômio de Kauffman.