



Raquel Ribeiro Barroso Portela

**Nós Legendreanos em \mathbb{R}^3 e o número máximo
de Thurston-Bennequin para nós de 2 pontes**

Dissertação de Mestrado

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre pelo Programa de Pós-graduação em Matemática Pura do Departamento de Matemática da PUC-Rio

Orientador: Prof. Paul Alexander Schweitzer, s.j

Rio de Janeiro
junho de 2007



Raquel Ribeiro Barroso Portela

**Nós Legendreanos em \mathbb{R}^3 e o número máximo
de Thurston-Bennequin para nós de 2 pontes**

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre pelo Programa de Pós-graduação em Matemática Pura do Departamento de Matemática do Centro Técnico Científico da PUC-Rio. Aprovada pela Comissão Examinadora abaixo assinada.

Prof. Paul Alexander Schweitzer, s.j

Orientador

Departamento de Matemática — PUC-Rio

Prof. Derek Douglas Jack Hacon

Departamento de Matemática — PUC-Rio

Prof. Leonardo Navarro de Carvalho

Instituto de Matemática — UFF

Prof. Paulo Henrique Cabido Gusmão

Instituto de Matemática — UFF

Prof. Nicolau Corção Saldanha

Departamento de Matemática — PUC-Rio

Prof. José Eugenio Leal

Coordenador Setorial do Centro

Técnico Científico — PUC-Rio

Rio de Janeiro, 27 de junho de 2007

Todos os direitos reservados. É proibida a reprodução total ou parcial do trabalho sem autorização da universidade, do autor e do orientador.

Raquel Ribeiro Barroso Portela

Graduação em Licenciatura Plena em Matemática, Universidade do Estado do Rio de Janeiro (agosto/2000 – dezembro/2004).

Mestrado em Matemática Pura, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro (março/2005 – junho/2007).

Ficha Catalográfica

Portela, Raquel Ribeiro Barroso

Nós Legendreanos em \mathbb{R}^3 e o número máximo de Thurston-Bennequin para nós de 2 pontes / Raquel Ribeiro Barroso Portela; orientador: Paul Alexander Schweitzer, s.j. — Rio de Janeiro : PUC-Rio, Departamento de Matemática, 2007.

v., 109 f: il. ; 29,7 cm

1. Dissertação (mestrado) - Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Departamento de Matemática.

Inclui referências bibliográficas.

1. Matemática – Tese. 2. Nós topológicos. 3. Nós legendreanos. 4. Nós de 2-pontes. 5. Isotopia legendreana. 6. Número de Maslov. 7. Número de Thurston-Bennequin. 8. Polinômio de Kauffman.

I. Schweitzer, s.j., Paul Alexander. II. Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro. Departamento de Matemática. III. Título.

CDD: 510

Agradecimentos

Especialmente a Deus, que me dá forças nos momentos difíceis, e me torna vencedora a cada dia.

À minha mãe, Maria da Graça, pela dedicação e carinho em ter me educado e cuidado de mim.

Aos professores de graduação, especialmente ao Luérbio Faria e a Clícia Valladares, por acreditarem em mim e terem me ensinado mais do que matemática, mas a ser um profissional.

Ao meu orientador, Paul Alexander Schweitzer, por ter me encaminhado ao mestrado nesta Instituição.

Ao professor Derek Hacon, por me apresentar a teoria dos nós legendreanos e pelo incentivo dado.

Aos matemáticos, Peter Zvengrowski e Vladimir Chernov, por estarem sempre dispostos a esclarecer dúvidas e dar sugestões.

Ao amigo Ivan Gonzales, pela ajuda em questões matemáticas e pelos conselhos dados neste dois anos de mestrado, os quais me ajudaram a chegar até aqui.

Aos amigos da UFRJ, Leandro Araujo, por fazer as figuras desta dissertação, e Fábio Ramos, por me fornecer os artigos necessários, os quais não tinha acesso.

Aos amigos, Renata Arruda e Guilherme Frederico, que se disponibilizaram a ler esta dissertação.

A todos que me ajudaram direta ou indiretamente durante todo o meu mestrado.

Resumo

Portela, Raquel Ribeiro Barroso; Schweitzer, s.j., Paul Alexander. **Nós Legendreanos em \mathbb{R}^3 e o número máximo de Thurston-Bennequin para nós de 2 pontes**. Rio de Janeiro, 2007. 109p. Dissertação de Mestrado — Departamento de Matemática, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

O propósito deste trabalho é apresentar a teoria dos nós legendreanos, que diz respeito a nós tangentes a uma estrutura de contato, assim como demonstrar o Teorema do Número Máximo de Thurston-Bennequin para nós de 2-pontes em termos do polinômio de Kauffman. Iniciamos este trabalho com uma introdução aos nós topológicos. Apresentamos a teoria de nós legendreanos, dando ênfase aos nós legendreanos em \mathbb{R}^3 tangentes à estrutura de contato canônica neste espaço. Apresentamos dois invariantes clássicos de nós legendreanos: os números de Thurston-Bennequin e Maslov. Finalmente, obtemos o número máximo de Thurston-Bennequin, motivo de estudos nos dias atuais, para todos os nós legendreanos topologicamente isotópicos aos nós de 2-pontes na estrutura de contato canônica em \mathbb{R}^3 .

Palavras-chave

Nós topológicos. Nós legendreanos. Nós de 2-pontes. Isotopia legendreana. Número de Maslov. Número de Thurston-Bennequin. Polinômio de Kauffman.

Abstract

Portela, Raquel Ribeiro Barroso; Schweitzer, s.j., Paul Alexander.
Legendrian Knots and the maximal Thurston-Bennequin number of two-bridge knots . Rio de Janeiro, 2007. 109p.
MsC Thesis — Department of Matemática, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

The purpose of this work is to present the Theory of the Legendrian knots, which refers to knots tangent to a contact structure, and also to prove the Theorem of the Maximal Thurston-Bennequin number for 2-bridge knots in terms of the Kauffman polynomial. We begin this study with an introduction to topological knots. We present the theory of the Legendrian knots, we emphasize Legendrian knots in \mathbb{R}^3 , knots tangent to the standard contact structure in this space. We present two classical invariants of Legendrian knots, the Thurston-Bennequin and Maslov numbers. Finally we show the maximal Thurston-Bennequin number for Legendrian two-bridge knots in standard contact structure on \mathbb{R}^3 , an active area of current research.

Keywords

Topological Knots. Legendrian Knots. 2-bridge knots. Legendrian isotopy. Thurston-Bennequin number. Maslov number. Kauffman polynomial.

Sumário

1	Introdução	8
2	Nós Topológicos	11
2.1	Definições básicas	11
2.2	Equivalência de nós	12
2.3	Projeções e diagramas	15
2.4	Invariantes de nós	18
2.5	Movimentos de Reidemeister	19
2.6	Superfície de Seifert	22
2.7	Soma Conexa	27
2.8	Polinômios	29
3	Tangles e nós de 2-pontes	37
3.1	Tangles	37
3.2	Nós de 2-pontes	45
3.3	Polinômio de Kauffman para nós 2-pontes	52
4	Nós legendreanos	61
4.1	Estrutura de contato	61
4.2	Nós legendreanos e transversais	67
4.3	Projeções frontal e lagrangeana	67
4.4	Isotopia legendreana	76
5	Invariantes de nós legendreanos	79
5.1	Números de Bennequin e Maslov	79
5.2	Estabilização	84
5.3	Cotas superiores	86
6	Número Máximo de Thurston-Bennequin para nós de 2-pontes	89
6.1	Forma racional legendreana	90
6.2	Demonstração do Teorema do Número Máximo de Thurston-Bennequin para nós de 2-pontes	93
	Bibliografia	97
	Índice Remissivo	100
A	Apêndice	103
A.1	Independência dos movimentos de Reidemeister	103
A.2	Frações contínuas	106