3
Caracterização das Superfícies Mínimas Cíclicas em $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$

3.1
Exemplos de superfícies mínimas cíclicas folheadas por grandes círculos

Em $\mathbb{R}^3$ tínhamos as retas como geodésicas, mas em $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ as geodésicas são os grandes círculos de uma esfera, com isso apresentaremos a seguir uma série de exemplos de superfícies mínimas folheadas por grandes círculos.

3.1.1
A Esfera

Seja S a esfera em $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ parametrizada localmente por:

$$X : \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \longrightarrow \mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$$
$$(u, v) \longmapsto \left(\begin{pmatrix} \cos v \\ \operatorname{sen} v \cos u \\ \operatorname{sen} v \operatorname{sen} u \end{pmatrix}, 0 \right)$$

S é totalmente geodésica (isto é, a segunda forma fundamental anula-se) portanto ela é mínima.

3.1.2
O Cilindro

Seja o produto de um grande círculo por $\mathbb{R}$ em $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$, ele é parametrizado por:

$$X : \mathbb{R} \times \mathbb{S}^1 \longrightarrow \mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$$
$$(u, v) \longmapsto \left(\begin{pmatrix} \cos v \\ \operatorname{sen} v \\ 0 \end{pmatrix}, u \right)$$

S é o produto de uma curva geodésica por $\mathbb{R}$, então ela é totalmente geodésica, logo S é mínima.

3.1.3
O Helicóide

Seja S, o helicóide em $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ parametrizado localmente por:

$$\begin{aligned} X_{ab} : \mathbb{R} \times \mathbb{S}^1 &\longrightarrow \mathbb{S}^2 \times \mathbb{R} \\ (u,v) &\longmapsto \left(\begin{pmatrix} \cos v \\ \operatorname{sen} v \cos au \\ \operatorname{sen} v \operatorname{sen} au \end{pmatrix}, bu \right) \end{aligned}$$

Apresentaremos agora dois casos limites do helicóide:

a) X_{a0} - círculo gira e não sobe, obtemos assim a esfera $\mathbb{S}^2 \times \{0\} \subset \mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$.(cf. seção 3.1.1)

b) X_{0b} - círculo sobe e não gira, obtemos o cilindro.(cf. seção 3.1.2)

Vamos provar que essa superfície é mínima em $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$, para isso temos a seguir as derivadas primeiras de $X_{ab}(u,v)$, que para simplificar vamos chamar apenas de $X(u,v)$

$$\begin{aligned} X_u &= (0, -a \operatorname{sen} v \operatorname{sen} au, a \operatorname{sen} v \cos au, b) \\ X_v &= (-\operatorname{sen} v, \cos v \cos au, \cos v \operatorname{sen} au, 0) \end{aligned}$$

temos assim a primeira forma fundamental:

$$\begin{aligned} E &= a^2 \operatorname{sen}^2 v + b^2 \\ F &= 0 \\ G &= 1 \end{aligned}$$

Abaixo temos as derivadas segundas de X:

$$\begin{aligned} X_{uu} &= (0, -a^2 \operatorname{sen} v \cos au, -a^2 \operatorname{sen} v \operatorname{sen} au, 0) \\ X_{uv} &= (0, -a \cos v \operatorname{sen} au, a \cos v \cos au, 0) \\ X_{vv} &= (-\cos v, -\operatorname{sen} v \cos au, -\operatorname{sen} v \operatorname{sen} au, 0) \end{aligned}$$

Seja o vetor

$$\mathbf{N} = (0, -a \operatorname{sen} v \operatorname{sen} au, a \operatorname{sen} v \cos au, t)$$

onde t é escolhido de maneira que **N** seja normal a superfície, então os coeficientes em relação a **N** da segunda forma fundamental são:

$$\begin{aligned}\bar{e} &= 0\\ \bar{f} &= a^2 \operatorname{sen} v \cos v\\ \bar{g} &= 0\end{aligned}$$

Portanto temos que $\bar{H}=0$, logo pela proposição 3 temos que essa superfície é mínima.

3.2
O Catenóide

Seja uma superfície de $\mathbb{S}^2\times\mathbb{R}$ folheada por círculos paralelos de $\mathbb{S}^2$, podemos considera-los horizontais, portanto podemos parametriza-lá localmente como:

$$\begin{aligned} X : \mathbb{R}\times\mathbb{S}^1 &\longrightarrow \mathbb{S}^2\times\mathbb{R}\\ (u,v) &\longmapsto \left(\begin{pmatrix}\cos\theta(u)\\ \operatorname{sen}\theta(u)\cos v\\ \operatorname{sen}\theta(u)\operatorname{sen} v\end{pmatrix}, u\right)\end{aligned}$$

Novamente vamos definir:

$$Y(u,v) = (\cos\theta(u), \operatorname{sen}\theta(u)\cos v, \operatorname{sen}\theta(u)\operatorname{sen} v)$$

Assim temos:

$$X(u,v) = (Y(u,v), u)$$

Com isso calculamos as derivadas primeiras de Y(u,v):

$$\begin{aligned} Y_u &= (-\theta'\operatorname{sen}\theta, \theta'\cos\theta\cos v, \theta'\cos\theta\operatorname{sen} v)\\ Y_v &= (0, -\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen} v, \operatorname{sen}\theta\cos v)\end{aligned}$$

Primeira Forma Fundamental:

$$\begin{aligned} E &= 1+(\theta')^2\\ F &= 0\\ G &= \operatorname{sen}^2\theta\end{aligned}$$

Agora determinamos as derivadas segundas de Y:

$$\begin{aligned} Y_{uu} &= (-\theta'' \operatorname{sen}\theta - (\theta')^2 \cos\theta, \theta'' \cos\theta \cos v - (\theta')^2 \operatorname{sen}\theta \cos v, \theta'' \cos\theta \operatorname{sen} v \\ & \quad -(\theta')^2 \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen} v) \\ Y_{uv} &= (0, -\theta' \cos\theta \operatorname{sen} v, \theta' \cos\theta \cos v) \\ Y_{vv} &= (0, -\operatorname{sen}\theta \cos v, -\operatorname{sen}\theta \operatorname{sen} v) \end{aligned}$$

Agora precisamos, para calcular a Segunda Forma Fundamental, de algum vetor $\mathbf{N}$ normal a superfície, uma vez que não precisamos de um vetor normal unitário por causa da proposição 3. Sabemos que X_u e X_v são tangentes a superfície, logo:

$$\langle \mathbf{N}, X_u \rangle = 0$$

$$\langle \mathbf{N}, X_v \rangle = 0$$

Isso significa que X_u e X_v pertencem a $T_x(\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}) = T_y\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$, tal que $x \in \mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ sendo $x = (y, t)$, assim temos:

$$Y(u, v) \in \mathbb{S}^2$$

e que $X(u, v) = (Y(u, v), u)$, assim $\mathbf{N} = (M, t)$, tal que $M = (a, b, c)$, agora vamos determinar M, mas não o calcularemos explicitamente t, uma vez que todas segundas derivadas de X tem como última coordenada o zero.
Então para calcular M temos:

$$\langle \mathbf{N}, X_u \rangle = \langle M, Y_u \rangle + t.1 = 0 \Rightarrow t = -\langle M, Y_u \rangle$$

$$\langle \mathbf{N}, X_v \rangle = \langle M, Y_v \rangle + t.0 = 0$$

Agora determinaremos a, b e c de $M = (a, b, c)$, então:

$$\langle M, Y_v \rangle = 0 \Rightarrow -b \cos\theta \operatorname{sen} v + c \cos\theta \cos v = 0$$

Como $\cos\theta \neq 0$, portanto podemos simplificar:

$$-b \operatorname{sen} v + c \cos v = 0$$

Determinamos agora:

$$b = \cos v$$

$$c = \operatorname{sen} v$$

e $M = (a, \cos v, \operatorname{sen} v)$, para encontrar a, fazemos:

$$\langle Y, M \rangle = 0$$

Como $Y(u, v) = (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta\cos v, \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen} v)$, temos:

$$\begin{aligned}\langle Y, M \rangle &= a\cos\theta + \cos^2 v\operatorname{sen}\theta + \operatorname{sen}^2 v\operatorname{sen}\theta \\ &= a\cos\theta + \operatorname{sen}\theta = 0\end{aligned}$$

Assim teríamos $a = -\tan\theta$, mas para simplificar vamos definir $b = \cos v\cos\theta$ e $c = \operatorname{sen} v\cos\theta$, então:

$$\langle Y, M \rangle = a\cos\theta + \cos\theta\operatorname{sen}\theta = 0$$

Todavia sabemos que $\cos\theta \neq 0$, logo $a = -\operatorname{sen}\theta$.
Com isso encontramos M:

$$M = (-\operatorname{sen}\theta, \cos v\cos\theta, \operatorname{sen} v\cos\theta)$$

e como $\mathbf{N} = (M, t)$, temos

$$\mathbf{N} = (-\operatorname{sen}\theta, \cos v\cos\theta, \operatorname{sen} v\cos\theta, t) \tag{3-1}$$

Segunda Forma Fundamental

$$\begin{aligned}\bar{e} &= -\theta'' \\ \bar{f} &= 0 \\ \bar{g} &= -\cos\theta\operatorname{sen}\theta\end{aligned}$$

Portanto temos que a curvatura média é:

$$\bar{H} = \theta''\operatorname{sen}^2\theta - (\theta')^2\cos\theta\operatorname{sen}\theta - \cos\theta\operatorname{sen}\theta$$

No caso das superfícies mínimas temos $\bar{H} = 0$, assim:

$$\theta''\operatorname{sen}\theta - (\theta')^2\cos\theta - \cos\theta = 0 \tag{3-2}$$

Uma solução trivial dessa equação é $\theta \equiv 0$, o caso do cilindro, já estudado na seção 3.1.2. Veremos que a equação (3-2) é um caso particular de uma equação que resolveremos na seção seguinte.

3.3
O caso geral

Nessa seção vamos estudar as superfícies mínimas cíclicas em $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$. Daremos uma parametrização de uma superfície cíclica qualquer e iremos estudar quando ela é mínima.

Seja então um círculo $\mathcal{C}$ em $\mathbb{S}^2$. O círculo $\mathcal{C}$ tem raio $R \leq 1$. Seja então $\theta \in (0, \frac{\pi}{2}]$ de tal maneira que o raio de $\mathcal{C}$ seja $\operatorname{sen}\theta$, isto é, $R = \operatorname{sen}\theta$. Isto implica que o centro c de $\mathcal{C}$ em $\mathbb{R}^3$ está a uma distância $\cos\theta$ da origem, então seja $c = \mathbf{t}\cos\theta$, o centro de $\mathcal{C}$, com $|\mathbf{t}| = 1$. Como foi feito no capítulo anterior, vamos considerar a curva parametrizada γ tal que $\gamma' = \mathbf{t}$, isto é:

$$\gamma(s) = \int_{s_0}^{s} \mathbf{t}(\sigma) d\sigma$$

e agora vamos assumir que $k \neq 0$, pois já tratamos o caso contrário, assim seja $(\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b})$ o triedo de Frenet, associada a γ, então C esta no plano Π formado pelos vetores $\mathbf{n}$ e $\mathbf{b}$, então C é parametrizado por:

$$C(v) = \operatorname{sen}\theta(u)(\mathbf{n}\cos v + \mathbf{b}\operatorname{sen} v) + \mathbf{t}\cos\theta(u) \ \in \mathbb{S}^2$$

para alguma função $\theta = \theta(u)$. Assim podemos parametrizar localmente qualquer superfície cíclica por:

$$\begin{aligned} X : I \times \mathbb{S}^1 &\longrightarrow \mathbb{S}^2 \times \mathbb{R} \\ (u, v) &\longmapsto (\operatorname{sen}\theta(u)[\cos v\mathbf{n}(u) + \operatorname{sen} v\mathbf{b}(u)] + \cos\theta(u)\mathbf{t}(u), u), \end{aligned}$$

ou seja,

$$X(u, v) = (\cos\theta(u))\mathbf{t}(u) + (\operatorname{sen}\theta(u)\cos v)\mathbf{n}(u) + (\operatorname{sen}\theta(u)\operatorname{sen} v)\mathbf{b}(u) + u$$

Definiremos agora

$$Y(u, v) = (\cos\theta(u))\mathbf{t}(u) + (\operatorname{sen}\theta(u)\cos v)\mathbf{n}(u) + (\operatorname{sen}\theta(u)\operatorname{sen} v)\mathbf{b}(u),$$

para facilitar os cálculos, uma vez que:

$$\begin{aligned}
X(u,v) &= (Y(u,v),u)\\
X_u(u,v) &= (Y_u(u,v),1)\\
X_v(u,v) &= (Y_v(u,v),0)\\
X_{uu}(u,v) &= (Y_{uu},0)\\
X_{uv}(u,v) &= (Y_{uv},0)\\
X_{vv}(u,v) &= (Y_{vv},0)
\end{aligned}$$

Agora vamos determinar as derivadas primeiras de $Y(u,v)$, todas na base $\{\mathbf{t},\mathbf{n},\mathbf{b}\}$

$$\begin{aligned}
Y_u(u,v) &= \big(-k\operatorname{sen}\theta\cos v - \theta'\operatorname{sen}\theta, \theta'\cos\theta\cos v + \tau\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen} v + k\cos\theta,\\
&\quad \theta'\cos\theta\operatorname{sen} v - \tau\operatorname{sen}\theta\cos v\big)\\
Y_v(u,v) &= \big(0, -\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen} v, \operatorname{sen}\theta\cos v\big)
\end{aligned}$$

Primeira Forma Fundamental:
Antes de apresentar os coeficientes da primeira forma fundamental de $X(u,v)$, vale observar o seguinte:

$$\begin{aligned}
E &= \bar{E}+1\\
F &= \bar{F}\\
G &= \bar{G}
\end{aligned}$$

Onde $\bar{E}$, $\bar{F}$ e $\bar{G}$ são os coeficientes da primeira forma fundamental de $Y(u,v)$. Abaixo são apresentados os coeficientes da primeira forma fundamental de $X(u,v)$

$$\begin{aligned}
E &= 1+(\theta')^2+\tau^2\operatorname{sen}^2\theta + k^2\cos^2\theta + 2\theta' k\cos v +\\
&\quad 2\tau k\cos\theta\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen} v + k^2\operatorname{sen}^2\theta\cos^2 v\\
F &= -k\operatorname{sen}\theta\cos\theta\operatorname{sen} v - \tau\operatorname{sen}^2\theta\\
G &= \operatorname{sen}^2\theta
\end{aligned}$$

Abaixo as derivadas segundas de $Y(u, v)$:

$$\begin{aligned}
Y_{uu}(u,v) &= \big(-k' \operatorname{sen}\theta\cos v - 2k\theta'\cos\theta\cos v - \theta''\operatorname{sen}\theta - (\theta')^2\cos\theta \\
&\quad -k\tau\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen} v - k^2\cos\theta, \\
&\quad -k^2\operatorname{sen}\theta\cos v - 2k\theta'\operatorname{sen}\theta + \theta''\cos\theta\cos v - (\theta')^2\operatorname{sen}\theta\cos v + \\
&\quad \tau'\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen} v + 2\tau\theta'\cos\theta\operatorname{sen} v + k'\cos\theta - \tau^2\operatorname{sen}\theta\cos v, \\
&\quad -2\tau\theta'\cos\theta\cos v - \tau^2\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen} v - \tau k\cos\theta - \theta''\cos\theta\operatorname{sen} v - \\
&\quad (\theta')^2\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen} v - \tau'\operatorname{sen}\theta\cos v\big) \\
Y_{uv}(u,v) &= \big(k\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen} v, -\theta'\cos\theta\operatorname{sen} v + \tau\operatorname{sen}\theta\cos v, \theta'\cos\theta\cos v + \\
&\quad \tau\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen} v\big) \\
Y_{vv}(u,v) &= \big(0, -\operatorname{sen}\theta\cos v, -\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen} v\big)
\end{aligned}$$

Para calcular a segunda forma fundamental usaremos o vetor normal **N**(cf.3-1) que encontramos na seção 3.2 desse capítulo, pois o espaço normal a uma superfície não depende da base usada.

Segunda Forma Fundamental.
Agora podemos determinar $\bar{e}$, $\bar{f}$ e $\bar{g}$:

$$\begin{aligned}
\bar{e} &= \theta'' - \tau^2\operatorname{sen}\theta\cos\theta + (-2k\tau\cos^2\theta + k\tau)\operatorname{sen} v + \\
&\quad k'\cos v + k^2\cos\theta\operatorname{sen}\theta\sin^2 v \\
\bar{f} &= \tau\cos\theta\operatorname{sen}\theta - k\operatorname{sen}^2\theta\operatorname{sen} v \\
\bar{g} &= -\cos\theta\operatorname{sen}\theta
\end{aligned}$$

Temos $\bar{H} = E\bar{g} - 2F\bar{f} + G\bar{e} = 0$, então:

$$\begin{aligned}
\bar{H} &= (\theta''\operatorname{sen}\theta - (\theta')^2\cos\theta - \cos\theta - k^2\cos\theta)\operatorname{sen}\theta - k\tau\operatorname{sen}^2\theta\operatorname{sen} v + \\
&\quad (k'\operatorname{sen}^2\theta - 2\theta' k\cos\theta\operatorname{sen}\theta)\cos v
\end{aligned}$$

Se a superfície é mínima, temos:

$$H = 0 \Longrightarrow \begin{cases} \theta''\operatorname{sen}\theta - ((\theta')^2 + 1)\cos\theta - k^2\cos\theta = 0 \\ -k\tau\operatorname{sen}^2\theta = 0 \\ k'\operatorname{sen}^2\theta - 2\theta' k\cos\theta\operatorname{sen}\theta = 0 \end{cases}$$

Vamos analisar a segunda equação do sistema. Sabemos que $\operatorname{sen}^2\theta \neq 0$ e $k \neq 0$, logo $\tau = 0$, significando que a curva γ é plana, o plano no qual

γ pertence é paralelo ao plano gerado por $\mathbf{t}$ e $\mathbf{n}$ e observamos que o fato de termos $\tau = 0$ também significa $\mathbf{b}$ constante. Já vimos que o círculo $\mathcal{C}$ tem centro $c = \mathbf{t}\cos\theta$ e temos que o centro em $\mathbb{S}^2$ é $\mathbf{t}$, temos então que $\mathbf{t}$ pertence a um grande círculo.

Analisando agora a equação $k' \operatorname{sen}\theta = 2\theta' k \cos\theta$, ou seja,

$$\frac{k'}{k} = 2\theta' \operatorname{cotan}\theta$$

Agora integramos os dois termos:

$$\int \frac{1}{k}\, dk = 2\int \operatorname{cotan}\theta d\theta$$

obtemos,

$$\ln k = 2\ln|\operatorname{sen}\theta| + c$$

Que simplificando fica $k = \lambda \operatorname{sen}^2\theta$, onde λ é uma constante positiva. Observamos que k é sempre positivo, o que implica que **t'** nunca se anula logo $\mathbf{t}$ percorre um grande círculo sempre no mesmo sentido.

Resolveremos agora a equação:

$$\theta'' \operatorname{sen}\theta - ((\theta')^2 + 1)\cos\theta - k^2\cos\theta = 0$$

na qual reescrevemos dessa maneira:

$$\theta'' \operatorname{sen}\theta - ((\theta')^2 + 1)\cos\theta - \lambda^2 \operatorname{sen}^4\theta\cos\theta = 0 \tag{3-3}$$

Uma solução simples dessa equação é $\theta = \dfrac{\pi}{2}$ que corresponde uma superfície folheada por grandes círculos, nesse caso temos $k = \lambda$, o que implica que o vetor $\mathbf{t}(u)$ (normal aos grandes círculos) percorre um círculo à velocidade constante, portanto a superfície é um helicóide.

Agora para auxiliar nos cálculos multiplicamos a equação acima por $2\theta' \operatorname{sen}\theta$, obtendo assim:

$$2\theta''\theta' \operatorname{sen}^2\theta - 2\theta'\cos\theta\operatorname{sen}\theta((\theta')^2 + 1) - 2\lambda^2\theta' \operatorname{sen}^5\theta\cos\theta = 0$$

agora dividindo por $\operatorname{sen}^4\theta$ temos:

$$\frac{2\theta''\theta' \operatorname{sen}^2\theta - 2\theta'\cos\theta\operatorname{sen}\theta((\theta')^2 + 1)}{\operatorname{sen}^4\theta} - 2\lambda^2\theta' \operatorname{sen}\theta\cos\theta = 0$$

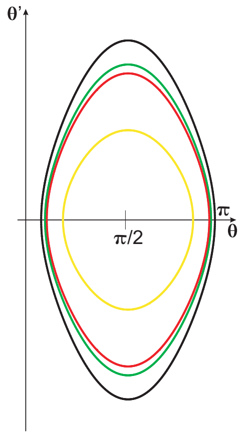
Como $\left(\dfrac{(\theta')^2+1}{\operatorname{sen}^2\theta}\right)' = \dfrac{2\theta''\theta'\operatorname{sen}^2\theta - 2\theta'\cos\theta\operatorname{sen}\theta((\theta')^2+1)}{\operatorname{sen}^4\theta}$ temos:

$$\left(\frac{(\theta')^2+1}{\operatorname{sen}^2\theta}\right)' - 2\lambda^2\theta'\operatorname{sen}\theta\cos\theta = 0$$

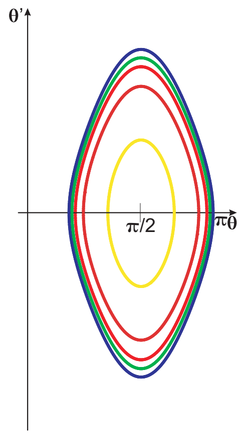
ou seja,

$$\left(\frac{(\theta')^2+1}{\operatorname{sen}^2\theta} - \lambda^2\operatorname{sen}^2\theta\right)' = 0$$

então a função $E(\theta,\theta') = \dfrac{(\theta')^2+1}{\operatorname{sen}^2\theta} - \lambda^2\operatorname{sen}^2\theta$ é uma integral primeira de (3-3).
Se $\lambda = 0$ reencontramos o caso do catenóide.
Agora para uma análise dessa expressão fazemos E igual a uma constante e traçamos o gráfico dessas curva para diferentes valores de E e para $\lambda = 0$, que é o caso do catenóide, como podemos ver na figura abaixo:



e para $\lambda \neq 0$ temos:



Vemos com esses gráficos que o raio dos círculos não tende para infinito como em $\mathbb{R}^3$ e $\mathbb{H}^2\times\mathbb{R}$, que veremos no próximo capítulo, mas é periódico com respeito à variável u.

Observamos pelo gráfico que $\theta' = 0$ para dois valores de θ, que chamaremos de θ_0 e θ_1, considerando a parte da curva integral onde θ' é positivo, temos que $\theta(u)$ é crescente, então existe a função inversa que denotaremos por $u(\theta)$, definida sobre o intervalo $[\theta_0, \theta_1]$, que estudaremos quando $\theta \to \theta_0$, assim:

$$u(\theta) = \int_{\theta_0}^{\theta_1} \frac{d\theta}{\sqrt{f(\theta)}},$$

onde $f(\theta) = \lambda^2 \operatorname{sen}^4 \theta + E \operatorname{sen}^2 \theta - 1$, que é convergente pelo mesmo raciocínio do capítulo 2. Para a parte da curva integral onde θ' é negativa, o raciocínio é análogo por simetria e concluímos que a superfície é periódica na direção vertical.

3.4 Conclusão

Demonstramos então que as superfícies mínimas cíclicas e regradas de $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ são:

- A esfera $\mathbb{S}^2 \times \{0\}$ (cf. seção 3.1.1)
- O cilindro $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$ (cf. seção 3.1.2)
- O helicóide (cf. seção 3.1.3)
- O catenóide (cf. seção 3.2) descoberto por Pedrosa, Ritoré.
- Uma família a dois parâmetros E, λ de superfícies folheadas por pequenos círculos, periódicas na direção vertical. A trajetória dos centros dos círculos percorre uma "hélice" em $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$, no sentido que ela "sobe"(a última coordenada é crescente) e se projeta sobre uma geodésica de $\mathbb{S}^2$; além disso o raio de um círculo da superfície é relacionado com a posição do seu centro sobre a "hélice".

Reencontramos então um resultado de Laurent Hauswirth cf. [HA]