

2

Caracterização das Superfícies Mínimas Cíclicas em $\mathbb{R}^3$

Nesse capítulo estamos interessados nas superfícies folheadas por curvas de curvatura constante, ou seja, retas e círculos. Inicialmente apresentaremos as superfícies mínimas regradas que podem ser vistas como um caso limite de cíclicas no sentido que uma linha reta tem $k = 0$, ou seja, “raio infinito” em seguida daremos uma caracterização das superfícies mínimas cíclicas. Parte desses resultados encontra-se em [NI1].

2.1

Superfícies Regradas: O Helicóide

Em $\mathbb{R}^3$ pode-se demonstrar que as únicas superfícies regradas que também são mínimas são o plano e o helicóide, confira [DC1].

O helicóide é uma superfície gerada por uma reta que gira em um plano horizontal que esta subindo; localmente ela pode ser parametrizada por:

$$\begin{aligned} X_{ab} : \mathbb{R} \times \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (u, v) &\longmapsto (v \cos au, v \sin au, bu) \end{aligned}$$

onde $a \neq 0$ e $b \neq 0$.

O plano por sua vez aparece como dois casos limites do helicóide:

- a) X_{a0} - Reta girando sem subir, onde $a \neq 0$: plano horizontal
- b) X_{0b} - Reta subindo sem girar, onde $b \neq 0$: plano vertical

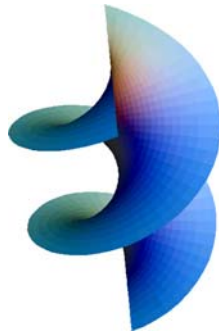


Figura 2.1: O Helicóide

2.2

Superfícies Mínimas de Revolução: O Catenóide

Seja uma superfície de revolução, localmente ela pode ser parametrizada por:

$$\begin{aligned} X : I \times (0, 2\pi) &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (u, v) &\longmapsto (R(u) \cos v, R(u) \sin v, u) \end{aligned}$$

onde I é um intervalo e $R : I \longrightarrow \mathbb{R}$, assim temos as primeiras derivadas de X :

$$\begin{aligned} X_u &= (R' \cos v, R' \sin v, 1), \\ X_v &= (-R \sin v, R \cos v, 0), \end{aligned}$$

E a primeira forma fundamental:

$$\begin{aligned} E &= (R')^2 + 1 \\ F &= 0 \\ G &= R^2 \end{aligned}$$

Agora calcularemos as segundas derivadas parciais de X :

$$\begin{aligned} X_{uu} &= (R'' \cos v, R'' \sin v, 0) \\ X_{uv} &= (-R' \sin v, R' \cos v, 0) \\ X_{vv} &= (-R \cos v, -R \sin v, 0) \end{aligned}$$

Precisamos calcular o vetor normal:

$$\begin{aligned} X_u \times X_v &= (-R \cos v, -R \sin v, RR'), \\ |X_u \times X_v| &= \sqrt{R^2(1 + (R')^2)} = R\sqrt{1 + (R')^2}, \end{aligned}$$

e finalmente temos então $\mathbf{N}$:

$$\mathbf{N} = \frac{X_u \times X_v}{|X_u \times X_v|} = \frac{(-\cos v, -\sin v, R')}{\sqrt{1 + (R')^2}}$$

Com as segundas derivadas parciais de X e seu vetor normal obtemos a segunda forma fundamental:

$$\begin{aligned} e &= \langle X_{uu}, \mathbf{N} \rangle = \frac{-R''}{\sqrt{1 + (R')^2}} \\ f &= \langle X_{uv}, \mathbf{N} \rangle = 0 \\ g &= \langle X_{vv}, \mathbf{N} \rangle = \frac{R}{\sqrt{1 + (R')^2}} \end{aligned}$$

Como estamos interessados nas superfícies mínimas,

$$H = \frac{1}{2} \frac{eG - 2fF + Eg}{EG - F^2} = 0 \iff eG + Eg = 0$$

pois $f = 0$, assim

$$eG + Eg = -R''R^2 + R((R')^2 + 1) = 0$$

$$-R''R^2 + R(R')^2 + R = 0$$

Dividindo por R , temos:

$$-R''R + (R')^2 + 1 = 0$$

que reescrevemos fica:

$$RR'' = 1 + (R')^2$$

para resolver essa equação vamos multiplica-lá por R' , assim

$$\frac{R'R''}{1 + (R')^2} = \frac{R'}{R} \implies \int \frac{R'dR'}{1 + (R')^2} = \int \frac{dR}{R}$$

resolvendo essas integrais temos

$$\frac{1}{2} \ln(1 + (R')^2) = \ln(R) + c'$$

e portanto,

$$\sqrt{1 + (R')^2} = cR \quad c = e^{c'} \text{ é positivo e } c' \text{ é qualquer,}$$

logo,

$$1 + (R')^2 = c^2 R^2$$

$$(R')^2 = c^2 R^2 - 1$$

agora podemos ter a expressão de R explicitamente:

$$R' = \sqrt{c^2 R^2 - 1} \implies R(u) = \frac{1}{c} \cosh cu$$

Assim temos $X(u, v) = (\frac{1}{c} \cosh cu \cos v, \frac{1}{c} \cosh cu \sin v, u)$. Vários valores do parâmetro c correspondem a dilatações da mesma superfície, portanto existe uma única superfície de revolução mínima, o *catenóide*.

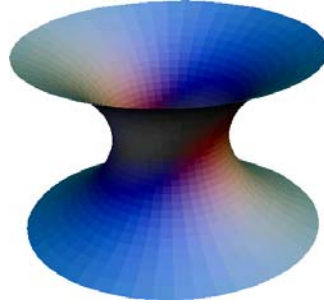


Figura 2.2: O Catenóide

2.3

Superfícies Cíclicas com Círculos Horizontais: Exemplos de Riemann

Seja agora uma superfície folheada por círculos, todos paralelos. Sem perda de generalidade podemos assumir que todos os planos são horizontais. Portanto essa superfície pode ser parametrizada localmente por:

$$\begin{aligned} X : I \times \mathbb{S}^1 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (u, v) &\longmapsto (a(u) + R(u) \cos v, b(u) + R(u) \sin v, u), \end{aligned}$$

onde $(a(u), b(u))$ é a projeção dos centros dos círculos que geram a superfície e $R(u)$ é o raio de um círculo, para cada u . Vamos provar que a curva determinada pelos centros dos círculos é uma reta.

Determinaremos a primeira e a segunda forma fundamental de $X(u, v)$.

Vamos determinar as primeiras derivadas de X , para podermos calcular a primeira forma fundamental:

$$\begin{aligned} X_u(u, v) &= (a' + R' \cos v, b' + R' \sin v, 1) \\ X_v(u, v) &= (-R \sin v, R \cos v, 0) \end{aligned}$$

Agora podemos determinar a primeira forma fundamental:

$$\begin{aligned} E &= \langle X_u, X_u \rangle = (a')^2 + (b')^2 + (R')^2 + 2R'(a' \cos v + b' \sin v) + 1 \\ F &= \langle X_u, X_v \rangle = R(b' \cos v - a' \sin v) \\ G &= \langle X_v, X_v \rangle = R^2 \end{aligned}$$

A seguir temos as derivadas segundas:

$$\begin{aligned} X_{uu}(u, v) &= (a'' + R'' \cos v, b'' + R'' \sin v, 0) \\ X_{vv}(u, v) &= (-R \cos v, -R \sin v, 0) \\ X_{uv}(u, v) &= (-R' \sin v, R' \cos v, 0) \end{aligned}$$

Então podemos encontrar os coeficientes $\bar{e}$, $\bar{f}$, $\bar{g}$ da segunda forma fundamental de X :

$$\begin{aligned} \bar{e} &= -R(b'' \sin v + a'' \cos v) - RR'' \\ \bar{f} &= 0 \\ \bar{g} &= R^2 \end{aligned}$$

Agora calcularemos $\bar{H}$, temos então:

$$\begin{aligned} \bar{H} &= -R^3(b'' \sin v + a'' \cos v) - R^3R'' + \\ &\quad R^2[(a')^2 + (b')^2 + (R')^2 + 2R'(a' \cos v + b' \sin v) + 1] \end{aligned}$$

Dividindo por R^2 , pois $R \neq 0$, temos:

$$\begin{aligned} \bar{H} &= -R(b'' \sin v + a'' \cos v) - RR'' + (a')^2 + (b')^2 + (R')^2 + \\ &\quad 2R'(a' \cos v + b' \sin v) + 1 \end{aligned}$$

Colocando o cosseno e seno em evidência teremos:

$$\bar{H} = (-Rb'' + 2R'b') \sin v + (-Ra'' + 2R'a') \cos v + (a')^2 + (b')^2 + (R')^2 - RR'' + 1$$

Como $\bar{H} = 0$ e chamando $b_1 = -Rb'' + 2R'b'$ e $a_1 = -Ra'' + 2R'a'$, fazemos:

$$b_1 = 0 \Rightarrow -Rb'' + 2R'b' = 0 \Rightarrow b'' = \frac{2R'b'}{R}$$

$$a_1 = 0 \Rightarrow -Ra'' + 2R'a' = 0 \Rightarrow a'' = \frac{2R'a'}{R}$$

Seja a curva plana $\gamma(u) = (a(u), b(u))$, $\gamma'(u) = (a'(u), b'(u))$ e $\gamma''(u) = (a'', b'')$.

Logo:

$$\gamma'' \times \gamma' = a''b' - a'b'' = \frac{2R'a'b'}{R} - \frac{2R'b'a'}{R} = 0$$

Então a curvatura $k(s) = \frac{\gamma'' \times \gamma'}{|\gamma'|^3} = 0$ de γ é zero e portanto γ é uma linha reta, podemos então supor que γ percorre o eixo x , ou seja, $b \equiv 0$. Assim temos:

$$\begin{cases} -Ra'' + 2R'a' = 0 \\ -RR'' + (R')^2 + (a')^2 + 1 = 0 \end{cases} \quad (2-1)$$

e da primeira equação de (2-1):

$$\frac{a''}{a'} = 2\frac{R'}{R}$$

integramos ambos os lados:

$$\int \frac{da'}{a'} = 2 \int \frac{dR}{R}$$

assim

$$a' = \lambda R^2$$

onde λ é uma constante real positiva, agora podemos reescrever a segunda equação de (2-1) da seguinte maneira:

$$-RR'' + (R')^2 + 1 + \lambda^2 R^4 = 0$$

que dividindo por $-R$ pode ser reescrita assim:

$$R'' - \frac{(R')^2 + 1}{R} - \lambda^2 R^3 = 0 \quad (2-2)$$

Observação 5 Se $\lambda = 0$ a função a é constante, ou seja, os centros se projetam num único ponto, a superfície sendo de revolução, reencontramos o caso do catenóide. Se $\lambda \neq 0$ as superfícies são chamadas exemplos de Riemann.

Considere agora a seguinte expressão:

$$E(R(u), R'(u)) = ((R')^2 + 1)A(R) + B(R)$$

derivando E obtemos:

$$\frac{dE}{du}(R(u), R'(u)) = 2R''R'A + \frac{dA}{dR}R'((R')^2 + 1) + R'\frac{dB}{dR}$$

dividindo por $2AR'$ temos

$$\frac{dE}{du} = R'' + \frac{A_R((R')^2 + 1)}{2A} + \frac{B_R}{2A}$$

onde $A_R = \frac{dA}{dR}$ e $B_R = \frac{dB}{dR}$, vamos escolher A e B de forma que $\frac{dE}{du} = 0$, ou seja, E é uma integral primeira de (2-2):

$$\frac{A_R}{2A} = -\frac{1}{R} \implies A_R = -\frac{2A}{R}$$

logo,

$$A = \frac{1}{R^2}$$

e

$$B_R = -\lambda^2 R^3 2A$$

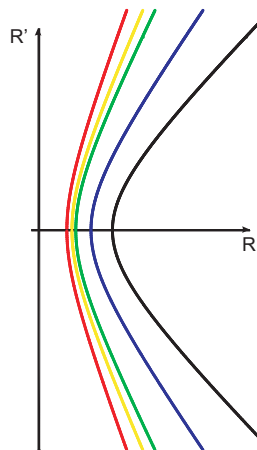
como $A = -\frac{1}{R^2}$ temos:

$$B_R = -2\lambda^2 R$$

Assim $B = -R^2$. Com isso podemos reescrever E :

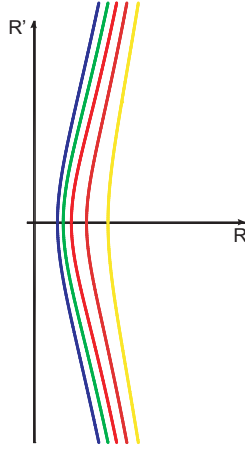
$$E = \frac{(R')^2 + 1}{R^2} - \lambda^2 R^2$$

Agora para uma análise dessa expressão fazemos E igual a uma constante e traçamos o gráfico dessas curva para diferentes valores de E e para $\lambda = 0$, que é o caso do catenóide, como podemos ver na figura abaixo:



Abaixo fazemos a mesma análise, mas para $\lambda \neq 0$, caso dos exemplos de

Riemann.



Agora vamos mostrar que se $R(u)$ é uma solução da equação $(2-2)_\lambda$, para $\lambda > 0$, uma dilatação conveniente de $R(u)$ é solução da equação $(2-2)_1$. Com efeito seja $R_1(u)$ uma solução de $(2-2)_1$ e $R_\mu = \frac{1}{\mu}R_1(\frac{1}{\mu})$. Temos então:

$$\begin{aligned} R_\mu'' - \frac{(R_\mu')^2 + 1}{R_\mu} - \lambda^2 R_\mu^3 &= \frac{1}{\mu} R_1'' - \frac{(R_1')^2 + 1}{\mu R_1} - \lambda^2 \mu^3 R_1^3 \\ &= \frac{1}{\mu} [R_1'' - \frac{(R_1')^2 + 1}{R_1} - \lambda^2 \mu^4 R_1^3]. \end{aligned}$$

Portanto escolhendo $\mu = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}$ deduzimos que $R_{1/\sqrt{\lambda}}$ é solução $(2-2)_\lambda$ se e somente se R_1 é solução de $(2-2)_1$. Em conclusão os exemplos de Riemann formam uma família a um parâmetro (módulo dilatações). Assim em seguida fixaremos $\lambda = 1$.

Observamos que sobre toda curva integral, R admite um mínimo que denotaremos por R_0 e que cada curva tem dois fins, onde R tende ao infinito. Sem perda de generalidade suponhamos que $R(0) = R_0$. Vamos mostrar que R tende a infinito em tempo finito. Considerando a parte da curva integral em que R' é positiva, temos que $R(u)$ é crescente, então existe a função inversa, que denotamos por $u(R)$, definida sobre o intervalo $[R_0, \infty)$. Antes vamos ver o comportamento de $u(R)$ quando $R \rightarrow R_0$:

$$u(R) = \int_{R_0}^R \frac{du}{dR} dR = \int_{R_0}^R \frac{dR}{\sqrt{R^4 + ER^2 - 1}}$$

observamos que essa última integral é imprópria em R_0 , uma vez que $\sqrt{R_0^4 + ER_0^2 - 1} = 0$, mas é bem definida, pois

$$\sqrt{R^4 + ER^2 - 1} \sim \sqrt{R - R_0} \text{ com } R \rightarrow R_0$$

e a integral imprópria $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$ converge, com efeito, seja $f(R) = \sqrt{R_0^4 + ER^2 - 1}$, isto é, $f(R) = (R^2 - X_1)(R^2 - R_0^2)$ onde R_0^2 e X_1 são as raízes distintas do polinômio quadrático $P(X) = X^2 + EX - 1$.

Calculamos $f'(R_0) = 2R_0(R_0^2 - X) \neq 0$, então pela fórmula de Taylor:

$$f(R) = f(R_0) + (R - R_0)f'(R_0) + o(R - R_0),$$

mas $f(R_0) = 0$, logo podemos reescrever $u(R)$:

$$\int_{R_0}^R \frac{dR}{\sqrt{f(R)}} = \int_{R_0}^R \frac{dR}{\sqrt{(R - R_0)f'(R_0) + o(R - R_0)}}$$

assim,

$$\int_{R_0}^R \frac{dR}{\sqrt{f(R)}} \sim \frac{1}{\sqrt{f'(R_0)}} \int_{R_0}^R \frac{dR}{\sqrt{R - R_0}} < \infty$$

Agora podemos calcular $\lim_{R \rightarrow \infty} u(R)$.

Tome

$$u(R) = \int_{R_0}^R \frac{du}{dR} dR = \int_{R_0}^R \frac{dR}{\sqrt{R^4 + ER^2 - 1}} \quad (2-3)$$

$$\text{Como } \frac{1}{\sqrt{R^4 + ER^2 - 1}} < \frac{1}{R^2} \text{ e } \lim_{R \rightarrow \infty} \int \frac{1}{R^2} < \infty,$$

concluimos que a integral (2-3) converge, isto é, existe $u_\infty < \infty$ tal que

$$\lim_{R \rightarrow \infty} u(R) = u_\infty.$$

Para $R' < 0$, a situação é simétrica com respeito ao plano horizontal $u = 0$.

assim a superfície está limitada por dois planos horizontais.

Agora temos que $a'(u) = R^2(u)$, logo

$$a(u) = \int_0^u R^2(u) du$$

mas $du = \frac{dR}{\frac{dR}{du}}$, assim

$$a(R) = \int_{R_0}^R \frac{dR}{\sqrt{1 + \frac{E}{R^2} - \frac{1}{R^4}}}$$

com isso obtemos que $\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{a(R)}{R} = 1$, então $\lim_{R \rightarrow \infty} a(R) - R < \infty$.

Concluimos que quando $u \rightarrow u_\infty$, o raio dos círculos tende ao infinito enquanto um dos dois pontos de interseção dos círculos com o eixo x converge. Portanto a posição limite dos círculos quando $z = u \rightarrow u_\infty$ é uma reta horizontal

perpendicular ao eixo x . Por simetria, a posição limite quando $z = u \rightarrow -u_\infty$ é também uma reta horizontal perpendicular ao eixo x . Aplicando o princípio de reflexão de Schwarz, cf. em [NI1], podemos refletir a superfície com respeito a estas duas retas; iterando o processo obtemos uma superfície periódica, invariante por um grupo de translações.

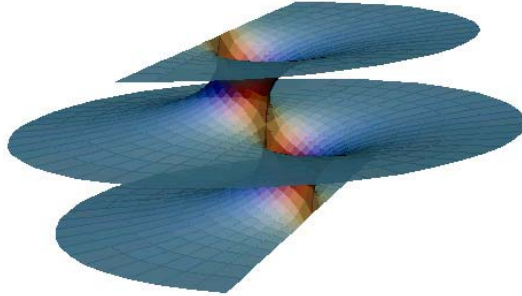


Figura 2.3: O Exemplo de Riemann

2.4

Superfícies mínimas cíclicas em $\mathbb{R}^3$: O caso geral

Seja uma superfície cíclica S , denotaremos por $R(u)$ o raio de cada círculo e por $z(u)$ a posição de cada círculo e seja $\{y_1, y_2\}$ uma base ortonormal do plano, seja agora $\mathbf{N}$ o vetor normal aos planos que contém cada círculo, tal que, $\{y_1, y_2, \mathbf{N}\}$ é uma base ortonormal de $\mathbb{R}^3$. Portanto S pode ser parametrizada por:

$$\begin{aligned} X : I \times \mathbb{S}^1 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (u, v) &\longmapsto z(u) + R(u) \cos vy_1(u) + R(u) \sin vy_2(u) \end{aligned}$$

Queremos provar que se a superfície é mínima, então esses círculos são todos horizontais, para isso enunciamos o teorema:

Teorema 5 *Seja uma superfície mínima folheada por círculos, então todos os círculos são paralelos.*

Prova: A prova que se encontra em [NI1] será feita por contradição, então agora assumamos $\mathbf{N}$ não constante, isto é, $\mathbf{N}' \neq 0$. Então o vetor $\mathbf{N}$ é paralelo ao vetor $\mathbf{t}$, tangente a alguma curva parametrizada pelo comprimento de arco e temos $\mathbf{n}$ vetor normal e $\mathbf{b}$ binormal a essa curva. Vamos assumir os vetores $\mathbf{y}_1$ e $\mathbf{y}_2$ como os vetores $\mathbf{n}$ e $\mathbf{b}$. Seja a curvatura e a torção da curva: $k > 0$ e τ , respectivamente, e seja $\mathbf{z}' = \alpha \mathbf{t} + \beta \mathbf{n} + \gamma \mathbf{b}$. Então:

$$X(u, v) = z(u) + R(u) \cos v \mathbf{n}(u) + R(u) \sin v \mathbf{b}(u)$$

A seguir determinamos as derivadas primeiras de X usando as equações de Frenet.

$$\begin{aligned} X_u(u, v) &= z' + R \cos v \mathbf{n} + R \cos v \mathbf{n}' + R' \sin v \mathbf{b} + R \sin v \mathbf{b}' \\ X_u(u, v) &= \alpha \mathbf{t} + \beta \mathbf{n} + \gamma \mathbf{b} + R' \cos v \mathbf{n} - Rk \cos v \mathbf{t} \\ &\quad - R\tau \cos v \mathbf{b} + R' \sin v \mathbf{b} + R\tau \sin v \mathbf{n} \end{aligned}$$

Assim temos,

$$\begin{aligned} X_u(u, v) &= (\alpha - kR \cos v) \mathbf{t} + (\beta + R' \cos v + \tau R \sin v) \mathbf{n} \\ &\quad + (\gamma - \tau R \cos v + R' \sin v) \mathbf{b} \end{aligned}$$

e também

$$X_v(u, v) = -(R \sin v) \mathbf{n} + (R \cos v) \mathbf{b},$$

com isso podemos calcular a primeira forma fundamental:

$$\begin{aligned} E &= \alpha^2 - 2R\alpha k \cos v + R^2 k^2 \cos^2 v + \beta^2 + 2R'\beta \cos v + \\ &\quad 2R\beta\tau \sin v + R^2 \tau^2 + \gamma^2 + 2R'\gamma \sin v - 2R\gamma\tau \cos v + (R'')^2 \\ F &= -R(\beta \sin v + R\tau - \gamma \cos v) \\ G &= R^2 \end{aligned}$$

Agora para calcular a segunda forma fundamental vamos precisar das segundas derivadas de X :

$$\begin{aligned} X_{uu}(u, v) &= (\alpha' - 2R'k \cos v - Rk' \cos v - \beta k - kR\tau \sin v) \mathbf{t} + \\ &\quad (\beta' + \alpha k Rk^2 \cos v + R'' \cos v + 2R'\tau \sin v + R\tau' \sin v + \gamma\tau - R\tau^2 \cos v) \mathbf{n} + \\ &\quad (\gamma' - \beta\tau - 2R'\tau \cos v - R\tau^2 \sin v + R'' \sin v - R\tau' \cos v) \mathbf{b} \\ X_{uv}(u, v) &= (Rk \sin v) \mathbf{t} + (-R' \sin v + R\tau \cos v) \mathbf{n} + (R' \cos v + R\tau \sin v) \mathbf{b} \\ X_{vv}(u, v) &= (-R \cos v) \mathbf{n} + (-R \sin v) \mathbf{b} \end{aligned}$$

Então determinamos a segunda forma fundamental:

$$\begin{aligned}
 \bar{e} &= -R(2kR\tau\beta \sin v \cos v + Rk'\gamma \cos v \sin v - 2Rk\gamma\tau \cos^2 v + 2R'k\gamma \cos v \sin v \\
 &\quad - \alpha R\tau^2 - RkR'' \cos v + R^2k\tau^2 \cos v + kR\tau\gamma + Rk'R' \cos v - \alpha'R' + \alpha R'' + \\
 &\quad \beta kR' + 2(R')^2k \cos v + kR\tau R' \sin v - Rk\gamma' \cos v \sin v - Rk\beta' \cos^2 v + \\
 &\quad 2R'k\beta \cos^2 v + \beta k\gamma \sin v + \alpha\gamma\tau \cos v - \alpha\beta\tau \sin v + R\beta k' \cos^2 v \\
 &\quad - 2\alpha Rk^2 \cos^2 v + \alpha\beta' \cos v + \alpha^2k \cos v - \alpha'\gamma \sin v - \alpha'\beta \cos v + \\
 &\quad \beta^2k \cos v + \alpha\gamma' \sin v + R^2k^3 \cos^3 v) \\
 \bar{f} &= R^2(k\beta \sin v \cos v + k\gamma - k\gamma \cos^2 v + kR' \sin v - \alpha\tau + Rk\tau \cos v) \\
 \bar{g} &= -R^2(-\alpha + Rk \cos v)
 \end{aligned}$$

Temos $\bar{H} = E\bar{g} - 2F\bar{f} + G\bar{e} = 0$, então:

$$\begin{aligned}
 \bar{H} &= \frac{R^3}{2}[5\alpha k^2 R + \beta'kR - \beta k'R - 6\beta kR'] \cos 2v - \frac{1}{2}kR^3[k^2 R^2 + \beta^2 - \gamma^2] \cos 3v \\
 &\quad - \frac{R^2}{2}[3R^3k^3 + 3R\beta^2k + 8R\alpha^2k - 2R\alpha'\beta + 6(R')^2Rk + 2R\alpha\beta' + 2R^2k'R' + 2R\gamma\tau\alpha \\
 &\quad - 4R'\beta\alpha - 2R^2kR'' + 3R\gamma^2k] \cos v - \beta\gamma kR^3 \sin 3v \\
 &\quad - \frac{R^2}{2}[-2R\beta\tau\alpha - 2R\alpha'\gamma - 4R'\gamma\alpha - 2R^2k\tau R' + 2R\alpha\gamma'] \sin v + \\
 &\quad \frac{R^3}{3}[\gamma'kR - \gamma k'R - 6\gamma kR'] \sin 2v - \frac{R^2}{2}[-5R^2\alpha k^2 + R^2k'\beta \\
 &\quad - 2\beta^2\alpha - 2(R')^2\alpha + 2R\alpha R'' - 2R\alpha'R' - 2R^2k\tau\gamma - 2\alpha^3 + 4R\beta kR' - 2\gamma^2\alpha - R^2k\beta'] \\
 \bar{H} &= a_3 \cos 3v + b_3 \sin 3v + a_2 \cos 2v + \\
 &\quad b_2 \sin 2v + a_1 \cos v + b_1 \sin v + a_0
 \end{aligned} \tag{2-4}$$

Onde:

$$\begin{aligned}
 a_3 &= -\frac{kR^3}{2}[k^2 R^2 + \beta^2 - \gamma^2] \\
 b_3 &= -\beta\gamma kR^3 \\
 a_2 &= \frac{R^3}{2}[5\alpha k^2 R + \beta'kR - \beta k'R - 6\beta kR'] \\
 b_2 &= \frac{R^3}{3}[\gamma'kR - \gamma k'R - 6\gamma kR'] \\
 a_1 &= -\frac{R^2}{2}[3R^3k^3 + 3R\beta^2k + 8R\alpha^2k - 2R\alpha'\beta + 6(R')^2Rk + 2R\alpha\beta' + \\
 &\quad 2R^2k'R' + 2R\gamma\tau\alpha - 4R'\beta\alpha - 2R^2kR'' + 3R\gamma^2k] \\
 b_1 &= -\frac{R^2}{2}[-2R\beta\tau\alpha - 2R\alpha'\gamma - 4R'\gamma\alpha - 2R^2k\tau R' + 2R\alpha\gamma'] \\
 a_0 &= -\frac{R^2}{2}[-5R^2\alpha k^2 + R^2k'\beta - 2\beta^2\alpha - 2(R')^2\alpha + 2R\alpha R'' - 2R\alpha'R' \\
 &\quad - 2R^2k\tau\gamma - 2\alpha^3 + 4R\beta kR' - 2\gamma^2\alpha - R^2k\beta']
 \end{aligned}$$

Temos que $R > 0$ e $k > 0$, logo:

$$b_3 = 0 \implies \beta\gamma = 0, \text{ então } \beta = 0 \text{ ou } \gamma = 0$$

$a_3 = 0$, vamos considerar $\beta = 0$, pois se $\gamma = 0$ teríamos $k^2R^2 + \beta > 0$ o que é absurdo, uma vez que $a_3 = 0$, logo $-\gamma^2 + k^2R^2 = 0 \Rightarrow \gamma^2 = k^2R^2$

$$a_2 = 0 \implies 5\alpha k^2R = 0, \text{ pois } \beta = 0, R > 0, k > 0; \text{ logo } \alpha = 0.$$

Temos agora:

$$b_2 = 0 \implies 6\gamma kR' = \gamma'kR - \gamma k'R \implies \gamma(6kR' + k'R) = \gamma'kR \quad (2-5)$$

mas

$$\gamma^2 = k^2R^2 \Rightarrow \gamma = \pm kR \quad (2-6)$$

que derivando obtém-se:

$$\gamma' = \pm(k'R + kR'), \quad (2-7)$$

e substituindo (2-6) e (2-7) em (2-5) temos:

$$\pm kR(6kR' + k'R) = \pm(k'R + kR')kR,$$

podemos simplificar R e k portanto

$$6kR' + k'R = k'R + kR' \quad (2-8)$$

temos que $6kR' = kR'$ e como $k \neq 0 \Rightarrow R' = 0$. Substituindo $R > 0$, $R' = 0$, $k > 0$, $\alpha = \beta = 0$ e $\gamma^2 = k^2R^2$ em (2-4) temos que:

$$a_3 = 0, b_3 = 0, a_2 = 0, b_2 = 0, b_1 = 0.$$

Atribuindo em a_1 os valores $R' = 0$, $\alpha = \beta = 0$, obtemos:

$$a_1 = -\frac{3}{2}R^5k^3 - \frac{3}{2}R^3\gamma^2k = 0$$

Como $\gamma^2 = k^2R^2$, podemos escrever a_1 desta maneira:

$$-3R^5k^3 - 3R^3k^2R^2k = 0 \Rightarrow -3R^5k^3 - 3R^5k^3 = 0 \Rightarrow -6R^5k^3 = 0$$

Sabemos que $R \neq 0$, então $k = 0$ o que é uma contradição.

Logo N é constante. ■

2.5

Conclusão

Após toda essa discussão podemos enunciar o seguinte teorema:

Teorema 6 *As únicas superfícies mínimas cíclicas em $\mathbb{R}^3$ são o catenóide e os exemplos de Riemann.*

Observação 6 *Os exemplos de Riemann admitem uma outra descrição, mais clássica, em termos da representação de Weierstrass e de funções elípticas. Com essas ferramentas pode-se mostrar que os exemplos de Riemann são superfícies completas, com curvatura total finita e de tipo conforme retangular. Confira em [HM] e [EN].*