



**Leandro Tavares da Silva**

**Superfícies Mínimas Cíclicas em  $\mathbb{R}^3$ ,  $S^2 \times \mathbb{R}$  e  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$**

**Dissertação de Mestrado**

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre pelo Programa de Pós-graduação em Matemática Pura do Departamento de Matemática da PUC-Rio

Orientador: Prof. Henri Anciaux

Rio de Janeiro  
Junho de 2007



**Leandro Tavares da Silva**

**Superfícies Mínimas Cíclicas em  $\mathbb{R}^3$ ,  $S^2 \times \mathbb{R}$  e  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$**

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre pelo Programa de Pós-graduação em Matemática Pura do Departamento de Matemática do Centro Técnico Científico da PUC-Rio. Aprovada pela Comissão Examinadora abaixo assinada.

**Prof. Henri Anciaux**

Orientador

Departamento de Matemática — PUC-Rio

**Prof. Henri Nicolas Guillame Anciaux**

Departamento de Matemática — PUC-Rio

**Prof. Ricardo Sá Earp**

Departamento de Matemática — PUC-Rio

**Prof. Celso José da Costa**

Instituto de Matemática — UFF

**Prof. Detang Zhou**

Instituto de Matemática — UFF

**Prof. José Eugenio Leal**

Coordenador Setorial do Centro Técnico Científico — PUC-Rio

Rio de Janeiro, 29 de Junho de 2007

Todos os direitos reservados. É proibida a reprodução total ou parcial do trabalho sem autorização da universidade, do autor e do orientador.

### Leandro Tavares da Silva

Mestrado: Matemática Pura — Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro – PUC–Rio (2005–2007).

Graduação: Licenciatura em Matemática — Universidade Federal Fluminense – UFF (2000–2004).

#### Ficha Catalográfica

Tavares, Leandro

Superfícies Mínimas Cíclicas em  $\mathbb{R}^3$ ,  $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$  e  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$  / Leandro Tavares da Silva; orientador: Henri Anciaux. — Rio de Janeiro : PUC–Rio, Departamento de Matemática, 2007.

v., 71 f: il. ; 29,7 cm

1. Dissertação (mestrado) - Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Departamento de Matemática.

Inclui referências bibliográficas.

1. Matemática – Tese. 2. Superfícies Mínimas. 3. Geometria Diferencial. I. Anciaux, Henri. II. Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro. Departamento de Matemática. III. Título.

CDD: 510

Para minha mãe Ireny

## Agradecimentos

Muito obrigado Deus, por mais uma etapa da minha vida cumprida! Agradeço por me dares força para chegar até aqui! Agradeço a minha mãe a quem dedico essa dissertação, pelo seu empenho na minha educação, sua dedicação e seu amor por mim e pelo resto de nossa família, agradeço a meu pai e meus irmãos (Cesar, Edson, Josiane e Junior) e suas famílias, irmãos esses que não tenho palavras para descrevê-los, afinal se hoje estou aqui, agradeço muito a eles! Agradeço a minha família em geral, que por mais que não soubessem e não sabem direito o que faço me dão muita força!

Aos amigos, são tantos, graças a Deus, muito obrigado por tudo! Amigos esses que são: Fábio Agra, Marcos Marcelo, Rafael Sorrilha, Reile Gomes e Vinicius Ferreira. Vocês são demais! Agora aos amigos da UFF: Betina Vath, Daniele Garcia, João Luiz, Marcelo Oliveira, Wellington Serra e outros. Agradeço muito ao Eduardo Teles pelo incentivo, ajuda (muita) e as horas de estudo juntos! Muito obrigado também as amigos que fiz na PUC-Rio. Agradeço também a algumas pessoas e suas famílias que sempre me incentivaram: Célio Pacheco, Jorge Silveira, Antonio Agra, Alcir Moura, Isabel Cristina e Daniel Ferreira.

Juliana Freitas muito obrigado pelo seu carinho, companheirismo e dedicação, saiba que você me ajudou muito! Arlene Freitas muito obrigado pelas suas sempre bem-vindas orações e palavras amigas!

Aos meus professores-amigos que sempre me incentivaram, meu muito obrigado! Em especial: Eugênia Tavares, Humberto Bortolossi, Jorge Delgado, Maria do Socorro, Pierre Pétin, Tomas Lewiner e Wallace Tavares. Muito obrigado amigos do CEDERJ: Adriana França, Aline, Jefferson, Mirele, Joyce e também Eliane, Marília, Kátia e Regina!

Agradeço muito ao meu Orientador, Henri Auciaux por sua dedicação, sua amizade e por suas “broncas”! Tudo foi bem aproveitado por mim! Agradeço a PUC-Rio, ao Departamento de Matemática, seus professores e funcionários, em especial a Creuza, Otávio, Orlando e Kátia sempre tão solícitos a ajudar! Agradeço aos professores Ricardo Sá Earp, Celso Costa, que sempre me incentivou, e De Tang por aceitarem fazer parte da minha banca de defesa. Agradeço também a CAPES pelos auxílios concedidos.

## Resumo

Tavares, Leandro; Anciaux, Henri. **Superfícies Mínimas Cíclicas em  $\mathbb{R}^3$ ,  $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$  e  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$** . Rio de Janeiro, 2007. 71p. Dissertação de Mestrado — Departamento de Matemática, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

Nesse trabalho descrevemos superfícies mínimas mergulhadas em espaços produtos  $M \times \mathbb{R}$ , onde  $M = \mathbb{R}^2, \mathbb{S}^2$  e  $\mathbb{H}^2$  que são folheadas por geodésicas (superfícies *regradas*) e curvas de curvatura constante de  $M$  (superfícies *cíclicas*). Em  $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$ , ou seja, em  $\mathbb{R}^3$  vamos demonstrar que só existem duas superfícies mínimas cíclicas, que são o catenóide e o exemplo de Riemann. Em seguida caracterizamos as superfícies mínimas cíclicas em  $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$  que formam uma família a dois parâmetros e por fim exibimos três famílias de dois parâmetros de superfícies mínimas cíclicas em  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ .

## Palavras-chave

Superfícies Mínimas. Geometria Diferencial.

## Abstract

Tavares, Leandro; Anciaux, Henri. **Cyclic Minimal Surfaces in  $\mathbb{R}^3$ ,  $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$  and  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$** . Rio de Janeiro, 2007. 71p. MsC Thesis — Department of Mathematics, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

In this work we describe minimal surfaces embedded in product spaces  $M \times \mathbb{R}$ , where  $M = \mathbb{R}^2, \mathbb{S}^2$  and  $\mathbb{H}^2$  which are foliated by geodesics (*ruled surfaces*) and curves of  $M$  with constant curvature (*cyclic surfaces*). In  $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$ , i.e.  $\mathbb{R}^3$ , we shall prove that there exist only two minimal cyclic surfaces which are the catenoid and the Riemann example. Then we characterize minimal cyclic surfaces in  $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ ; they form a two-parameter family. Finally we exhibit three two-parameter families of minimal cyclic surfaces in  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ .

## Keywords

Minimal Surfaces. Differential Geometry.



## Sumário

1	Preliminares	<b>9</b>
1.1	Teoria das Curvas	9
1.2	Teorias das Superfícies	13
2	Caracterização das Superfícies Mínimas Cíclicas em $\mathbb{R}^3$	<b>21</b>
2.1	Superfícies Regradas: O Helicóide	21
2.2	Superfícies Mínimas de Revolução: O Catenóide	22
2.3	Superfícies Cíclicas com Círculos Horizontais: Exemplos de Riemann	24
2.4	Superfícies mínimas cíclicas em $\mathbb{R}^3$ : O caso geral	30
2.5	Conclusão	33
3	Caracterização das Superfícies Mínimas Cíclicas em $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$	<b>35</b>
3.1	Exemplos de superfícies mínimas cíclicas folheadas por grandes círculos	35
3.2	O Catenóide	37
3.3	O caso geral	40
3.4	Conclusão	45
4	Exemplos de Superfícies Mínimas Cíclicas em $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$	<b>46</b>
4.1	Exemplos de superfícies mínimas folheadas por geodésicas	46
4.2	O Catenóide	48
4.3	Superfícies Mínimas folheadas por curvas de curvatura constante maior que 1	51
4.4	O Catenóide folheado por curvas de curvatura constante menor que 1	56
4.5	Superfícies Mínimas folheadas por curvas de curvatura constante menor que 1	58
4.6	Conclusão	68
	Referências Bibliográficas	<b>70</b>