



Raquel Rodrigues Santos

**Técnicas de modelagem do *improvement* para
construção de tábuas geracionais**

Dissertação de Mestrado

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do título de Mestre pelo Programa de Pós-Graduação em Ciências Atuariais do Instituto de Gestão de Riscos Financeiros e Atuariais da PUC-Rio.

Orientadora: Fernanda Chaves Pereira

Rio de Janeiro
Agosto de 2007



Raquel Rodrigues Santos

**Técnicas de modelagem do *improvement* para
construção de tábuas geracionais**

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do título de Mestre pelo Programa de Pós-Graduação em Ciências Atuariais do Instituto de Gestão de Riscos Financeiros e Atuariais da PUC-Rio.

Prof.^a Fernanda Chaves Pereira

Orientadora e Presidente

Instituto de Gestão de Riscos Financeiros e Atuarias - PUC-Rio

Prof. Cristiano A. C. Fernandes

Instituto de Gestão de Riscos Financeiros e Atuarias e Departamento de Engenharia Elétrica - PUC-Rio

Prof. Renato Martins Assunção

Coordenador do Curso de Ciências Atuariais da Universidade Federal de Minas Gerais – UFMG

Prof. João Pontes Nogueira

Coordenador Setorial do Centro de Ciências Sociais – PUC-Rio

Rio de Janeiro, 31 de agosto de 2007

Todos os direitos reservados. É proibida a reprodução total ou parcial do trabalho sem autorização da universidade, da autora e do orientador.

Raquel Rodrigues Santos

Graduou-se em Ciências Atuariais na UFMG (Universidade Federal de Minas Gerais) em 2005. Fez parte da área de previdência da Watson Wyatt Worldwide, prestando consultoria atuarial direcionada para Entidades Fechadas de Previdência Complementar. Atualmente, trabalha no segmento de resseguros, como atuária da Aon Re Services e da área de contratos da Aon Re.

Ficha Catalográfica

Santos, Raquel Rodrigues

Técnicas de modelagem do improvement para construção de tábuas geracionais / Raquel Rodrigues Santos ; orientadora: Fernanda Chaves Pereira. – 2007.

78f. : il. ; 30 cm

Dissertação (Mestrado em Gestão de Riscos Financeiros e Atuariais)–Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2007.

Inclui bibliografia

1. Gestão de Riscos Financeiros e Atuariais - Teses. 2. Tábuas geracionais. 3. Improvement. 4. Previsão. 5. Projeção da mortalidade. 6. Lee-Carter. 7. Modelos lineares generalizados. I. Pereira, Fernanda Chaves. II. Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro. Instituto de Gestão de Riscos Financeiros e Atuariais. III. Título.

CDD: 368.01

Para Eliane, Gilson e Humberto

Agradecimentos

À Deus.

Às pessoas mais importantes da minha vida: minha família, pela presença constante mesmo distante, pelo amor, apoio, torcida e conselhos.

À Prof.^a e orientadora Fernanda Chaves, pelos ensinamentos e auxílios. Agradeço sobretudo sua atenção e compreensão na fase de conclusão do curso.

Ao Prof. Renato Assunção, que foi minha referência quando da decisão de cursar o mestrado na PUC-Rio.

Aos membros da banca Prof. Cristiano Fernandes, Prof. Renato Assunção e Prof.^a Fernanda Chaves, pela oportunidade de discussão do tema estudado, pelas sugestões e comentários, fundamentais para o aprimoramento deste trabalho.

A todos os professores da PUC-Rio, que contribuíram para minha formação.

À Luciene Pereira, pela presteza incomparável no IAPUC.

Aos colegas da PUC-Rio e de profissão, pelo companheirismo, oportunidade de compartilhar conhecimentos e ajuda nas disciplinas ou durante a elaboração deste estudo. Em especial, à Priscila, Fábio, Mariana, Carlos e Sátyro.

À Capes e à PUC-Rio, pelos auxílios concedidos.

À todos aqueles que torceram por mim e me ajudaram.

Resumo

Santos, Raquel Rodrigues; Pereira, Fernanda Chaves. **Técnicas de modelagem do *improvement* para construção de tábuas geracionais**. Rio de Janeiro, 2007. 78p. Dissertação de Mestrado – Instituto de Gestão de Riscos Financeiros e Atuariais, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

Melhorias da mortalidade vêm sendo observadas em praticamente todo o mundo desde o início do século XX e impactam diretamente o resultado dos cálculos atuariais. A incorporação das tendências futuras da mortalidade no cálculo atuarial é possível através do uso de tábuas de mortalidade geracionais, que fornecem probabilidades de morte baseadas não só na idade x do indivíduo, como também no tempo t . O estudo aborda técnicas para projeção da mortalidade e consequente determinação dos fatores de *improvement*, utilizados para tornar uma tábua de mortalidade na forma geracional. As metodologias Lee-Carter e modelos lineares generalizados são utilizadas para construir previsões de mortalidade com base na experiência de mortalidade da população da Inglaterra e País de Gales da última metade do século passado.

Palavras-chave

tábuas geracionais; *improvement*; previsão; projeção da mortalidade; Lee-Carter; modelos lineares generalizados.

Abstract

Santos, Raquel Rodrigues; Pereira, Fernanda Chaves. **Modeling the improvement of mortality rates on life tables' construction**. Rio de Janeiro, 2007. 78p. MsC Thesis - Instituto de Gestão de Riscos Financeiros e Atuariais da PUC-Rio, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

By the beginning of the 20th century, improvement on mortality started rising in many countries and this has a direct impact on the results of actuarial calculus. The trend of mortality can be incorporated into actuarial calculus through the use of generation mortality tables, that consider not only the age x of the individual but also the time t . This study explores techniques to project the mortality and the improvement factors used to turn a mortality table into a generational one. The methodologies of Lee-Carter and generalized linear models were used to forecast mortality by using the England and Wales mortality experience of the past half century.

Keywords

generational tables; improvement; forecast; mortality projection; Lee-Carter; generalized linear models.

Sumário

1	Introdução e motivação	11
2	Tendências da mortalidade	16
2.1.	Noções básicas de matemática atuarial	16
2.2.	Panorama da mortalidade	19
2.3.	Tábuas de mortalidade estáticas versus geracionais	23
3	Métodos de projeção da mortalidade	28
3.1.	Método Lee-Carter	31
3.2.	Utilização de modelos lineares generalizados	38
4	Dados	44
5	Resultados	47
5.1.	Lee-Carter	47
5.2.	Modelos Lineares Generalizados	63
6	Conclusão	70
7	Referências Bibliográficas	71
	Apêndice I – Estimativas dos parâmetros LC	75
	Anexo I – Escala AA	78

Lista de figuras

Figura 1 - Evolução da expectativa de vida mundial (1700 – 2050)	12
Figura 2 – Expectativa de vida por países (2005)	20
Figura 3 – Mudanças na curva da função de sobrevivência	21
Figura 4 – Expectativa de vida feminina e masculina aos 60 anos	21
Figura 5 – Projeção da população brasileira (2050)	22
Figura 6 – Probabilidades de morte: tábuas estáticas x geracionais	25
Figura 7 – Comparação das probabilidades de morte entre 60 e 80 anos	26
Figura 8 – Polinômios de Legendre $Ln(x)$ para $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6$.	40
Figura 9 – Evolução das taxas brutas de mortalidade femininas	46
Figura 10 – Evolução das taxas brutas de mortalidade masculinas	46
Figura 11 – Coeficientes α_x estimados por sexo (1950-2003)	48
Figura 12 – Coeficientes κ_t estimados por sexo (1950-2003)	49
Figura 13 – Coeficientes β_x estimados, por sexo (1950-2003)	49
Figura 14 – Coeficientes κ_t reestimados (1950-2003)	50
Figura 15 – Correlograma da série κ_t feminina	51
Figura 16 – Correlograma da série κ_t masculina	52
Figura 17 – Valores observados x ajustados x resíduos – Série κ_{fem_t}	55
Figura 18 – Valores observados x ajustados x resíduos – Série κ_{masc_t}	55
Figura 19 – Teste de normalidade dos resíduos – Série κ_{fem_t}	56
Figura 20 – Teste de normalidade dos resíduos – Série κ_{masc_t}	57
Figura 21 – Previsão out-of-sample da série κ_{fem_t}	58
Figura 22 – Previsão out-of-sample da série κ_{masc_t}	59
Figura 23 – Previsão da série κ_{fem_t} (2004 – 2028)	60
Figura 24 – Previsão da série κ_{masc_t} (2004 – 2028)	60
Figura 25 – Logaritmo dos q_x projetados via método LC	62
Figura 26 – Logaritmo dos q_x projetados via método GLM	68
Figura 27 – Comparativo do logaritmo dos q_x projetados - Feminino	69
Figura 28 – Comparativo do logaritmo dos q_x projetados - Masculino	69

Lista de tabelas

Tabela 1 – Tábua de mortalidade da População dos Estados Unidos 1979-1981	24
Tabela 2 – Expectativa de vida aos 55 anos - AT-83M e RP-2000 Geracional	26
Tabela 3 – Parâmetros estimados - processo ARIMA(0,1,1), série κ_{fem_t}	53
Tabela 4 – Parâmetros estimados - processo com tendência linear, série κ_{fem_t}	53
Tabela 5 – Estimação dos parâmetros - modelo ajustado para a série κ_{masc_t}	54
Tabela 6 – Teste de autocorrelação dos resíduos – Série κ_{fem_t}	56
Tabela 7 – Teste de autocorrelação dos resíduos – Série κ_{masc_t}	56
Tabela 8 – Medidas de aderência no período <i>out-of-sample</i>	58
Tabela 9 – Coeficientes estimados para os modelos preditivos finais	59
Tabela 10 – Deviance e AIC – polinômios preditivos femininos	63
Tabela 11 – Deviance e AIC – polinômios preditivos masculinos	64
Tabela 12 – Estimação dos parâmetros GLM masculinos	65
Tabela 13 – Estimação dos parâmetros GLM masculino	66
Tabela 14 – Estimação dos parâmetros GLM feminino com interação	67
Tabela 15 – Estimação dos parâmetros GLM masculino com interação	67